



Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

SS 23
10. Mai 2023

Mathematische Logik II

Blatt 2

Abgabe. Mittwoch, 17. Mai 2023, 10:15, in Uni2Work oder in der Vorlesung.

Besprechung. Freitag, 19. Mai 2023, 8:30, A027.

Aufgabe 5 (4 Punkte). Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathbf{EF}_Q &: \forall_x (\perp \rightarrow Qx), & \mathbf{LPO}_Q^- &: \exists_x (\neg Qx) \vee \forall_x Qx, \\ \mathbf{LEM}_Q &: \forall_x (Qx \vee \neg Qx), & \mathbf{Drinker}_Q &: \exists_x (Qx \rightarrow \forall_x Qx). \end{aligned}$$

Zeigen sie jeweils mittels Angabe einer Herleitung

$$\begin{aligned} \{\mathbf{EF}_Q, \mathbf{LPO}_Q^-\} &\vdash \mathbf{Drinker}_Q, \\ \{\mathbf{LEM}_Q, \mathbf{Drinker}_Q\} &\vdash \mathbf{LPO}_Q^-. \end{aligned}$$

Verwenden sie dabei die folgenden *Axiome* für den *Existenz-quantor* bzw. die *Disjunktion*,

$$\begin{aligned} (\vee)_0^+ &: A \rightarrow A \vee B, \\ (\vee)_1^+ &: B \rightarrow A \vee B, \\ (\vee)^- &: (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \vee B \rightarrow C, \\ (\exists)^+ &: \forall_x (A \rightarrow \exists_x A), \\ (\exists)^- &: \forall_x (A \rightarrow B) \rightarrow \exists_x A \rightarrow B \quad (x \text{ nicht frei in } B), \end{aligned}$$

für beliebige Formeln.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Sei $\mathbf{A} = (A, \text{Con}, \vdash)$ ein *Informationssystem*. Für $U \in \text{Con}$ definieren wir

$$(\mathcal{O}_U := \{x \in |\mathbf{A}| \mid U \subseteq x\}) \subseteq |\mathbf{A}|.$$

a) Zeige, dass $\mathcal{B} = \{\mathcal{O}_U \mid U \in \text{Con}\}$ die Basis einer Topologie auf $|\mathbf{A}|$ ist d.h.,

- i) $\bigcup \mathcal{B} = |\mathbf{A}|,$
- ii) $\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_V \in \mathcal{B} \Rightarrow \text{exists } \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B} \text{ with } \mathcal{O}_U \cap \mathcal{O}_V = \bigcup \mathcal{X}.$

b) Assume $\mathcal{O} \subseteq |\mathbf{A}|$ is open in the topology generated by $\mathcal{B}$. Show that for all $x \in \mathcal{O}$

- i) $x \subseteq y \Rightarrow y \in \mathcal{O},$
- ii) exists $U \subseteq x$ with $\bar{U} \in \mathcal{O}.$

Aufgabe 7 (4 Punkte). Sei $\mathbf{Fun}_{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}} = (\mathbb{N} \times \mathbb{B}, \text{Con}_{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}}, \vdash)$, wobei $\mathbb{B} = \{\mathbf{f}, \mathbf{t}\}$, das Informationssystem aus der Vorlesung, wobei

$$\text{Con}_{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}} := \left\{ \left\{ (n_i, b_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{B} \mid i < k \right\} \mid \forall_{i,j < k} (n_i = n_j \Rightarrow b_i = b_j) \right\}.$$

Repräsentieren sie die (Graphen der partiellen) Funktionen

$$\begin{cases} f(2n) = \mathbf{t}, \\ f(2n+1) \text{ undefiniert,} \end{cases} \quad h_{m_0}(n) = \begin{cases} \mathbf{t} & , n \leq m_0, \\ \mathbf{f} & , \text{sonst,} \end{cases} \quad (m_0 \in \mathbb{N})$$

durch Ideale $\tilde{f}, \tilde{h}_{m_0} \in |\mathbf{Fun}_{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}}|$.

Ferner betrachten wir das Informationssystem

$$\mathbf{Fun}_{(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B}} = (\text{Con}_{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}}^* \times \mathbb{B}, \text{Con}_{(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B}}, \vdash),$$

wobei $\text{Con}_{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}}^*$ endliche Teilmengen von $\text{Con}_{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}}$ sind und

$$\left[\left\{ (U_i, a_i) \mid i < k \right\} \in \text{Con}_{(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B}} \right] \Leftrightarrow \left[\forall_{i,j < k} (U_i \cup U_j \in \text{Con}_{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}} \Rightarrow a_i = a_j) \right].$$

Sei nun

$$\tilde{\zeta} = \{(\vec{U}, \mathbf{f}) \mid \vec{U} \in \text{Con}_{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}}^*\} \subseteq \text{Con}_{(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B}}.$$

Zeigen sie, dass $\tilde{\zeta} \in |\mathbf{Fun}_{(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B}}|$ ein Ideal ist, welches das partielle Funktional

$$\zeta : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B}$$

$$\zeta f := \begin{cases} \mathbf{f} & , \text{ existiert } n \in \mathbb{N} \text{ mit } fn = \mathbf{f} \\ \mathbf{t} & , \text{sonst.} \end{cases}$$

darstellt.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Formalisieren sie die beiden Herleitungen aus Aufgabe 5 in Minlog.
Hinweis. Bei einem Ziel $?_n:A$ mit Annahmen $u:B \text{ ord } C, v:\text{exd } x D, w:\text{all } x D$ lassen sich u, v mit

(elim avar-name)

eliminieren. Eine All-Beseitigung in w ist möglich mit dem Befehl

(inst-with-to "w" (pt "t") "wInst"),

der eine neue Annahme $w\text{Inst}:D(\mathbf{t})$ erzeugt. Für $v:\text{exd } x D$, bietet sich auch der Befehl

(by-assume "v" "x0" "vInst")

an, der direkt eine neue Annahme $v\text{Inst}:D \ x0$ erzeugt.

Ziele der Form $?_m:\text{exd } x D, ?_k:B \text{ ord } C$ können mit

(intro 0 (pt "t")), bzw. (intro 0), (intro 1),

hergeleitet werden.