



Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

SS 23
26. April 2023

Mathematische Logik II

Blatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $\mathbf{Stab}_A := \neg\neg A \rightarrow A$ und $\mathbf{Stab}_\Gamma := \{\mathbf{Stab}_A \mid A \in \Gamma\}$ für endliche Mengen von Formeln Γ . Zeigen sie

$$\Gamma \vdash \mathbf{Stab}_B \Rightarrow \Gamma \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow \neg\neg A \rightarrow B,$$

für beliebige Formeln A, B und folgern sie, für $\Delta_0, \Delta_1, \Gamma$ endliche Mengen von Formeln

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_0 \vdash \mathbf{Stab}_B \\ \Delta_1 \cup \mathbf{Stab}_\Gamma \vdash B \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta_0 \cup \{\neg\neg A \mid A \in \Delta_1\} \vdash B.$$

Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\vdash \neg\neg \mathbf{Stab}_A$ für alle Formeln A .

Aufgabe 2 (4 Punkte). Wir betrachten das $\rightarrow$ -Fragment von Formeln und Herleitungen

$$\begin{aligned} \mathbf{Form}_\rightarrow &::= P \in \mathbf{Pvar} \mid \perp \mid A \rightarrow B \\ \mathbf{Der}_\rightarrow &::= u : A \mid \mathbf{Ef}(P) : \perp \rightarrow P \mid (M^{A \rightarrow B} N^A) : B \mid \lambda_{v^A} M^B : A \rightarrow B \end{aligned}$$

Definieren sie die *Substitution* von $P \in \mathbf{Pvar}$ durch $B \in \mathbf{Form}_\rightarrow$ für Formeln $A \in \mathbf{Form}_\rightarrow$ und Herleitungen $M^A \in \mathbf{Der}_\rightarrow$

$$A[P/B], \quad M[P/B; \vec{u}/\vec{N}] : A[P/B]$$

d.h., die Ersetzung aller Vorkommen von P durch B und der offenen Annahmen $u_i : C_i$ durch Herleitungen $N_i : C_i[P/B]$, wobei $\vec{u}$ nicht in $\vec{N}$ vorkommen. Zeigen sie

$$\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma[P/B] \vdash A[P/B].$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $\mathbf{Der}_\rightarrow$ wie in Aufgabe 2. Wir definieren induktiv

$$\mathbf{SN} ::= c\vec{M} \mid \lambda_v M \mid (\lambda_v M)N\vec{L},$$

wobei $c = (u : A)$ für eine Formel A oder $c = (\mathbf{Ef}(P) : \perp \rightarrow P)$ und $P \in \mathbf{Pvar}$. Zeigen sie mittels dem Induktionsprinzip von $\mathbf{Der}_\rightarrow$

$$M \in \mathbf{Der}_\rightarrow \Rightarrow M \in \mathbf{SN}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Formalisieren sie in Minlog Herleitungen

$$\mathbf{Stab}_B \vdash A \tilde{\vee} B \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B) \rightarrow B$$

$$\mathbf{Stab}_B \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \rightarrow B$$

$$\mathbf{Stab}_B \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow A \rightarrow B$$

Abgabe. Montag, 8. Mai 2023, 10:00, in Uni2Work oder in der Vorlesung.

Besprechung. Freitag, 12. Mai 2023, 8:30, A027.