

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Wir verwenden $\bar{n}$ als auf $T_{\mathbb{N}}$ eingeschränkte Variable. $\forall_{\bar{n}}A(\bar{n})$ steht für $\forall_n(n \in T_{\mathbb{N}} \rightarrow A(n))$. Ein Funktional heißt total wenn es totale Argumente auf einen totalen Wert abbildet. Ein Term heißt total wenn er nur totale Variablen und Konstanten enthält. $\forall_{\bar{n}}A(\bar{n})$ darf nur durch totale Terme instanziiert werden.

Aufgabe 29. Das Totalitätsprädikat $T_{\mathbb{N}}$ für die Algebra $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist induktiv definiert durch

$$T_{\mathbb{N}} := \mu_{X^c}(0 \in X^c, \forall_n(n \in X^c \rightarrow Sn \in X^c)).$$

- (a) Formulieren Sie die Einführungsaxiome $(T_{\mathbb{N}})_i^+$ ($i = 0, 1$) und das Beseitigungsaxiom $T_{\mathbb{N}}^-$.
- (b) Beweisen Sie $0 \in X \rightarrow \forall_{\bar{n}}(\bar{n} \in X \rightarrow S\bar{n} \in X) \rightarrow \forall_{\bar{n}}(\bar{n} \in X)$.
- (c) Beweisen Sie die Totalität von **NatPlus**, also $\forall_{\bar{n}, \bar{m}}(\bar{n} + \bar{m} \in T_{\mathbb{N}})$.

Aufgabe 30. Formalisieren Sie Aufgabe 29 (b, c) in Minlog.

Aufgabe 31. Das Prädikat Even ist induktiv definiert durch

$$\text{Even} := \mu_{X^c}(0 \in X^c, \forall_n(n \in X^c \rightarrow S(Sn) \in X^c)).$$

Beweisen Sie

- (a) $\forall_n(n \in \text{Even} \rightarrow n \in T_{\mathbb{N}})$,
- (b) $\forall_n(n \in T_{\mathbb{N}} \rightarrow n \in {}^{\text{co}}T_{\mathbb{N}})$.

Welche Instanzen der Axiome $\text{Even}^{\pm}$, $T_{\mathbb{N}}^{\pm}$ und ${}^{\text{co}}T_{\mathbb{N}}^{\pm}$ werden in den Herleitungen verwendet?

Aufgabe 32. Beweisen Sie die Inversionseigenschaft von Even:

$$\forall_n(S(Sn) \in \text{Even} \rightarrow n \in \text{Even}).$$

Hinweis. Verwenden Sie, daß Konstruktoren injektiv sind und disjunkte Wertebereiche haben (Lemma 2.2.1), sowie $\forall_n(\mathbf{F} \rightarrow n \in \text{Even})$ (Theorem 3.2.4).

Abgabe. Mittwoch, 29. Juni 2022, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work. Eine Lösungshilfe für die Minlog-Aufgabe finden Sie in ueb08.scm auf der Vorlesungsseite. Lösung dafür bitte als .scm-Datei schicken an Nils Köpp (koep[un]at[un]math.lmu.de) oder abgeben über Uni2work. Bitte nennen Sie Ihre Datei ueb08[Name].scm.