

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 21. Die Funktion $\text{Fib}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sei definiert durch

$$\begin{aligned}\text{Fib}(0) &= 0, \\ \text{Fib}(1) &= 1, \\ \text{Fib}(S(Sn)) &= \text{Fib}(Sn) + \text{Fib}(n).\end{aligned}$$

Ferner sei $L: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^3$ (mit $\mathbb{N}^3 := \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$) definiert durch

$$\begin{aligned}L(0) &= (1, 0, 1), \\ L(Sn) &= \text{Next}(Ln)\end{aligned}$$

wobei $\text{Next}: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}^3$ definiert ist durch

$$\text{Next}(n_1, n_2, n_3) = (n_1 + n_2, n_2 + n_3, n_2).$$

- (a) Beweisen Sie $L(n+1) = (a_{n+2}, a_{n+1}, a_n)$ mit $a_n := \text{Fib}(n)$.
(b) Definieren Sie L mit $\mathcal{R}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}^3}$.

Aufgabe 22. Formalisieren Sie Aufgabe 21 in Minlog

Aufgabe 23. Die Map-Funktion vom Typ $(\rho \rightarrow \sigma) \rightarrow \mathbb{S}(\rho) \rightarrow \mathbb{S}(\sigma)$ war definiert durch die Berechnungsregel

$$\text{Map}_h(a :: u) := (ha) :: \text{Map}_h(u).$$

Geben Sie eine alternative Definition mit Hilfe des Corekursionsoperators ${}^{\text{co}}\mathcal{R}_{\mathbb{S}(\sigma)}^{\tau}$ für $\tau := \mathbb{S}(\rho)$.

Aufgabe 24. Gegeben seien die Algebren

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &:= \mu_{\xi}(1: \xi, S_0: \xi \rightarrow \xi, S_1: \xi \rightarrow \xi) && (\text{positive Zahlen, binär}), \\ \mathbb{Z} &:= \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{P} && (\text{ganze Zahlen}), \\ \mathbb{Q} &:= \mathbb{Z} \times \mathbb{P} && (\text{rationale Zahlen}).\end{aligned}$$

Die Konstruktoren für $\mathbb{Z}$ seien IntP , 0 und IntN , und $\#$ (infix) für $\mathbb{Q}$.

- (a) Es seien $\text{Dy}, \text{DyNf}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{B}$ wie folgt definiert.

$$\begin{aligned}\text{Dy}(k\#q) &= \mathbf{tt} \text{ gdw nach Kürzen verbleibt } 2^n \text{ im Nenner,} \\ \text{DyNf}(k\#q) &= \mathbf{tt} \text{ gdw } k, q \text{ sind teilerfremd und } q \text{ eine Zweierpotenz.}\end{aligned}$$

Definieren Sie Dy und DyNf durch Berechnungsregeln.

- (b) Beweisen Sie $\text{DyNfToDy}: \forall_a(\text{DyNf}(a) \rightarrow \text{Dy}(a))$.

Abgabe. Mittwoch, 15. Juni 2022, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work. Eine Lösungshilfe für die Minlog-Aufgabe finden Sie in ueb06.scm auf der Vorlesungsseite. Lösung dafür bitte als .scm-Datei schicken an Nils Köpp (koepp[at]math.lmu.de) oder abgeben über Uni2work. Bitte nennen Sie Ihre Datei ueb06[Name].scm.