

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 5. Beweisen Sie $\vdash_c \exists_x (Px \rightarrow \forall_x Px)$ (zu lesen als: in jeder nicht leeren Bar muß es eine Person x geben mit der Eigenschaft: wenn x trinkt, so trinken alle) durch Angabe einer *normalen* (d.h. umwegfreien) Herleitung. Schreiben Sie die Herleitung auch als Herleitungsterm.

Aufgabe 6. Formalisieren Sie in Minlog die Herleitung aus Aufgabe 5.

Aufgabe 7. Sei $\mathbf{A} = (A, \text{Con}, \vdash)$ ein Informationssystem und $U \in \text{Con}$. Wir definieren $\mathcal{O}_U \subseteq |\mathbf{A}|$ durch

$$\mathcal{O}_U := \{x \in |\mathbf{A}| \mid U \subseteq x\}.$$

Man beweise:

- (a) Das System aller $\mathcal{O}_U$ mit $U \in \text{Con}$ bildet die Basis einer Topologie auf $|\mathbf{A}|$ (die „Scott-Topologie“).
- (b) Für $\mathcal{O} \subseteq |\mathbf{A}|$ sind folgende Aussagen äquivalent.
 - (i) $\mathcal{O}$ ist offen in der Scott-Topologie.
 - (ii) $\mathcal{O}$ erfüllt
 - (1) Wenn $x \in \mathcal{O}$ und $x \subseteq y$, so $y \in \mathcal{O}$ (Alexandrov Bedingung).
 - (2) Wenn $x \in \mathcal{O}$, so $\overline{U} \in \mathcal{O}$ für ein $U \subseteq x$ (Scott Bedingung).
 - (iii) $\mathcal{O} = \bigcup_{\overline{U} \in \mathcal{O}} \mathcal{O}_U$.

Aufgabe 8. Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Informationssysteme und $f: |\mathbf{A}| \rightarrow |\mathbf{B}|$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist stetig bzgl. der Scott-Topologie.
- (b) f ist monoton und erfüllt das Prinzip des endlichen Trägers PFS: wenn $b \in f(x)$, so ist $b \in f(\overline{U})$ für ein $U \subseteq x$.

Abgabe. Mittwoch, 18. Mai 2022, physisch in der Vorlesung oder elektronisch über Uni2work. Eine Lösungshilfe für die Minlog-Aufgabe finden Sie in ueb02.scm auf der Vorlesungsseite. Lösung dafür bitte als .scm-Datei schicken an Nils Köpp (koepp[at]math.lmu.de) oder abgeben über Uni2work. Bitte nennen Sie Ihre Datei ueb02[Name].scm.