

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 41. Der transitive Abschluß einer n.c. Relation $\prec$ ist

$$\text{TCNc}_{\prec} := \mu_X(\forall_{x,y}(x \prec y \rightarrow Xxy), \forall_{x,y,z}(x \prec y \rightarrow Xyz \rightarrow Xxz))$$

- (a) Begründen Sie, daß $\mathbf{N}$ die assoziierte Algebra $\iota_{\text{TCNc}_{\prec}}$ ist.
- (b) Wie ist $\text{TCNc}_{\prec}^{\mathbf{r}}$ definiert?
- (c) Geben Sie die Einführungsaxiome $(\text{TCNc}_{\prec}^{\mathbf{r}})_i^+$ ($i=0,1$) und das Beseitigungsaxiom $(\text{TCNc}_{\prec}^{\mathbf{r}})^-$ an.

Aufgabe 42 (Totalität der Realisierer). Beweisen Sie

- (a) $\forall_m(m \mathbf{r} (n \in \text{Even}) \rightarrow m \in E_{\mathbf{N}}^{\text{nc}})$.
- (b) $\forall_z(z \mathbf{r} A \rightarrow z \in E_{\tau(A)}^{\text{nc}})$ für c.r. Formeln A .

Aufgabe 43 (Realisierer für $\wedge$). Beweisen Sie

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle \mathbf{r} (A \wedge B) &\leftrightarrow (z \mathbf{r} A) \wedge (w \mathbf{r} B) && \text{für } A \text{ c.r. und } B \text{ c.r.} \\ z \mathbf{r} (A \wedge B) &\leftrightarrow (z \mathbf{r} A) \wedge B && \text{für } A \text{ c.r. und } B \text{ n.c.} \\ w \mathbf{r} (A \wedge B) &\leftrightarrow A \wedge (w \mathbf{r} B) && \text{für } A \text{ n.c. und } B \text{ c.r.} \end{aligned}$$

Aufgabe 44. Die geraden und ungeraden Zahlen seien definiert durch

$$\begin{aligned} \text{Even} &:= \mu_X(0 \in X, \forall_n(n \in X \rightarrow S(Sn) \in X)), \\ \text{Odd} &:= \mu_X(1 \in X, \forall_n(n \in X \rightarrow S(Sn) \in X)). \end{aligned}$$

- (a) Formulieren Sie das Eliminationsaxiom Odd^- .
- (b) Die Verdopplungsfunktion D auf $\mathbf{N}$ sei definiert durch die Berechnungsregeln $D0 = 0$ und $D(Sn) = S(S(Dn))$. Beweisen Sie (aus Odd^-)

$$\forall_n(n \in \text{Odd} \rightarrow Dn \in \text{Even})$$

und geben Sie den Herleitungsterm M Ihres Beweises an.

- (c) Berechnen Sie den Typ $\tau(\forall_n(n \in \text{Odd} \rightarrow Dn \in \text{Even}))$.
- (d) Berechnen Sie den aus M extrahierten Term $\text{et}(M)$.

Abgabe. Mittwoch, 12. Juli 2017, in der Vorlesung.