

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 13. Beweisen Sie $\exists_x(Px \rightarrow \forall_x Px)$ (zu lesen als: in jeder nicht leeren Bar muß es eine Person x geben mit der Eigenschaft: wenn x trinkt, so trinken alle) durch Angabe einer normalen Herleitung. Schreiben Sie die Herleitung auch als Herleitungsterm.

Aufgabe 14. Es seien $\mathbf{A} = (A, \text{Con}_A, \vdash_A)$, $\mathbf{B} = (B, \text{Con}_B, \vdash_B)$ Informationssysteme und $r, s \subseteq \text{Con}_A \times B$ approximierbare Abbildungen. Beweisen Sie

- (a) $r \cap s$ ist eine approximierbare Abbildung.
- (b) $|r \cap s| = |r| \cap |s|$.

Aufgabe 15. $\mathbf{A} = (A, \text{Con}_A, \vdash_A)$, $\mathbf{B} = (B, \text{Con}_B, \vdash_B)$, $\mathbf{C} = (C, \text{Con}_C, \vdash_C)$ seien Informationssysteme und $r \subseteq \text{Con}_B \times C$, $s \subseteq \text{Con}_A \times B$ approximierbare Abbildungen. Ferner seien $f: |\mathbf{B}| \rightarrow |\mathbf{C}|$ und $g: |\mathbf{A}| \rightarrow |\mathbf{B}|$ stetig.

- (a) Beweisen Sie, daß

$$r \circ s := \{ (U, c) \mid \exists V ((U, V) \subseteq s \text{ und } (V, c) \in r) \}$$

eine approximierbare Abbildung ist (wobei $(U, V) := \{ (U, b) \mid b \in V \}$).

- (b) Beweisen Sie

$$|r \circ s| = |r| \circ |s|, \quad \widehat{f \circ g} = \hat{f} \circ \hat{g}.$$

Aufgabe 16. Wir geben eine simultane induktive Definition dreier Klassen $\mathcal{S}$, $\mathcal{W}$ und $\mathcal{J}$ von Formeln aus dem $\rightarrow, \forall$ -Fragment. Hierin stehen $\mathcal{S}$, $\mathcal{W}$ und $\mathcal{J}$ stets für Formeln aus $\mathcal{S}$, $\mathcal{W}$ bzw. $\mathcal{J}$.

$$\mathcal{S} ::= \text{Atomformeln} \mid \forall_x \mathcal{S} \mid \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{S},$$

$$\mathcal{W} ::= \perp \mid \forall_x \mathcal{W} \mid \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{W},$$

$$\mathcal{J} ::= \text{Atomformeln} \mid \mathcal{W}.$$

Beispielsweise sagt die erste Zeile, wie eine Formel in $\mathcal{S}$ kommt: ihre rechte Klausel legt etwa fest, daß $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$ falls $\mathcal{J}$ in $\mathcal{J}$ und $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$ ist. Beweisen Sie

- (a) $S \vdash S^g$, $W^g \vdash W$ und $J^g \vdash \neg\neg J$ für beliebige Formeln $S \in \mathcal{S}$, $W \in \mathcal{W}$ und $J \in \mathcal{J}$.
- (b) Sei PA^- die Menge der Peanoaxiome ohne die Instanzen des Induktionsschemas (aber mit Gleichheitsaxiomen). Zeigen Sie $\text{PA}^- \subseteq \mathcal{S}$.
- (c) Folgern Sie, daß $\text{PA}^- \vdash_c \perp$ schon $\text{PA}^- \vdash \perp$ impliziert.
(Bemerkung: Mit dem Induktionsschema geht es technisch etwas schwieriger, aber mit derselben Idee.)

Abgabe. Mittwoch, 24. Mai 2017, in der Vorlesung.