

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 5. Geben Sie Herleitungen an für

$$(A \vee B \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C),$$

$$(A \rightarrow B \vee C) \leftarrow (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C).$$

($B \leftarrow A$ bedeutet $A \rightarrow B$).

Aufgabe 6. Geben Sie Herleitungen an für

$$(\forall_x A \rightarrow B) \leftarrow \exists_x (A \rightarrow B) \quad \text{falls } x \notin \text{FV}(B),$$

$$(A \rightarrow \forall_x B) \leftrightarrow \forall_x (A \rightarrow B) \quad \text{falls } x \notin \text{FV}(A),$$

$$(\exists_x A \rightarrow B) \leftrightarrow \forall_x (A \rightarrow B) \quad \text{falls } x \notin \text{FV}(B).$$

Aufgabe 7. Beweisen Sie $\vdash_i \perp \rightarrow A$ für eine beliebige Formel A .

Aufgabe 8. (a) Zeigen Sie, daß die Einführungs- und Beseitigungsaxiome für die Konjunktion

$$\wedge^+ : A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B, \quad \wedge^- : A \wedge B \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow C$$

äquivalent sind zu den Regeln

$$\frac{\begin{array}{c} | M \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} | N \\ B \end{array}}{A \wedge B} \wedge^+ \quad \frac{\begin{array}{c} [u: A] \quad [v: B] \\ | M \quad | N \\ A \wedge B \quad C \end{array}}{C} \wedge^- u, v$$

(b) Zeigen Sie, daß die Einführungs- und Beseitigungsaxiome für den Existenzquantor

$$\exists^+ : A \rightarrow \exists_x A, \quad \exists^- : \exists_x A \rightarrow \forall_x (A \rightarrow B) \rightarrow B \quad (x \notin \text{FV}(B)).$$

äquivalent sind zu den Regeln

$$\frac{\begin{array}{c} | M \\ r \quad A(r) \end{array}}{\exists_x A(x)} \exists^+ \quad \frac{\begin{array}{c} [u: A] \\ | M \quad | N \\ \exists_x A \quad B \end{array}}{B} \exists^- x, u \text{ (Var.Bed.)}$$

wobei die Regel $\exists^- x, u$ folgende Eigenvariablen-Bedingung erfüllen muß: in der Herleitung N kommt die Variable x (i) nicht frei vor in offenen Annahmen außer $u: A$, und (ii) nicht frei vor in B . (Hinweis: Axiome – z.B. $\exists^+$ – sind immer als außen allquantifiziert zu verstehen.)

Abgabe. Mittwoch, 10. Mai 2017, in der Vorlesung.