Mathematisches Institut der LMU
Kenji Miyamoto, Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2016
Blatt 9

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 33. Zeigen Sie, daß das Ergebnis von Aufgabe 29 erhalten bleibt wenn man die Definition der rechnerischen Verstärkung erweitert durch

$$\exists^{\mathrm{d}}_x A \sqsupseteq \begin{cases} \exists^{\mathrm{l}}_x A \\ \exists^{\mathrm{r}}_x A \end{cases} \sqsupseteq \exists^{\mathrm{nc}}_x A$$

Aufgabe 34. Der transitive Abschluß einer Relation $\prec$ sei definiert durch

$$\mathrm{TCNc}_\prec := \mu_X(\forall^{\mathrm{nc}}_{x,y}(x \prec y \to^{\mathrm{nc}} Xxy), \forall^{\mathrm{nc}}_{x,y,z}(x \prec y \to^{\mathrm{nc}} Xyz \to Xxz))$$

(a) Begründen Sie, daß $\mathbf{N}$ die assoziierte Algebra $\iota_{\mathrm{TCNc}_\prec}$ ist.
(b) Wie ist $\mathrm{TCNc}^{\mathbf{r}}_\prec$ definiert?
(c) Geben Sie die Einführungsaxiome $(\mathrm{TCNc}^{\mathbf{r}}_\prec)^+_i$ $(i{=}0,1)$ und das Beseitigungsaxiom $(\mathrm{TCNc}^{\mathbf{r}}_\prec)^-$ an.

Aufgabe 35 (Realisierer für $\wedge^{\mathrm{d}}$, $\wedge^{\mathrm{l}}$ und $\wedge^{\mathrm{r}}$)**.** Zeigen Sie

$$z\ \mathbf{r}\ A \to w\ \mathbf{r}\ B \to \langle z, w\rangle\ \mathbf{r}\ (A \wedge^{\mathrm{d}} B) \quad \text{für } A, B \text{ c.r.}$$
$$z\ \mathbf{r}\ A \to B \to z\ \mathbf{r}\ (A \wedge^{\mathrm{l}} B) \quad \text{für } A \text{ c.r. und } B \text{ n.c.}$$
$$A \to w\ \mathbf{r}\ B \to w\ \mathbf{r}\ (A \wedge^{\mathrm{r}} B) \quad \text{für } A \text{ n.c. und } B \text{ c.r.}$$

$$\langle z, w\rangle\ \mathbf{r}\ (A \wedge^{\mathrm{d}} B) \to (z\ \mathbf{r}\ A) \wedge^{\mathrm{nc}} (w\ \mathbf{r}\ B) \quad \text{für } A, B \text{ c.r.}$$
$$z\ \mathbf{r}\ (A \wedge^{\mathrm{l}} B) \to (z\ \mathbf{r}\ A) \wedge^{\mathrm{nc}} B \quad \text{für } A \text{ c.r. und } B \text{ n.c.}$$
$$w\ \mathbf{r}\ (A \wedge^{\mathrm{r}} B) \to A \wedge^{\mathrm{nc}} (w\ \mathbf{r}\ B) \quad \text{für } A \text{ n.c. und } B \text{ c.r.}$$

Aufgabe 36. Die geraden und ungeraden Zahlen seien definiert durch

$$\mathrm{Even} := \mu_X(X0, \forall^{\mathrm{nc}}_n(Xn \to X(S(Sn)))),$$
$$\mathrm{Odd} := \mu_X(X1, \forall^{\mathrm{nc}}_n(Xn \to X(S(Sn)))).$$

(a) Formulieren Sie das Eliminationsaxiom Odd^-.
(b) Die Verdopplungsfunktion D auf $\mathbf{N}$ sei definiert durch die Berechnungsregeln $D0 = 0$ und $D(Sn) = S(S(Dn))$. Beweisen Sie (aus Odd^-)
$$\forall^{\mathrm{nc}}_n(\mathrm{Odd}(n) \to \mathrm{Even}(Dn))$$
und geben Sie den Herleitungsterm M Ihres Beweises an.
(c) Berechnen Sie den Typ $\tau(\forall^{\mathrm{nc}}_n(\mathrm{Odd}(n) \to \mathrm{Even}(Dn)))$.
(d) Berechnen Sie den aus M extrahierten Term $\mathrm{et}(M)$.

Abgabe. Mittwoch, 22. Juni 2016, in der Vorlesung.