Mathematisches Institut der LMU
Kenji Miyamoto, Helmut Schwichtenberg

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 29. Die Relation $A' \sqsupseteq A$ (A' ist eine *rechnerische Verstärkung* von A) ist induktiv definiert wie folgt. Sie ist reflexiv, transitiv und erfüllt

$(A \to^{\mathrm{nc}} B) \sqsupseteq (A \to B)$,

$(A \to B) \sqsupseteq (A \to^{\mathrm{nc}} B)$ falls A oder B n.c. ist,

$(A \to^{\mathrm{c/nc}} B') \sqsupseteq (A \to^{\mathrm{c/nc}} B)$ falls $B' \sqsupseteq B$, mit $\to^{\mathrm{c/nc}} \in \{\to^{\mathrm{c}}, \to^{\mathrm{nc}}\}$,

$(A \to^{\mathrm{c/nc}} B) \sqsupseteq (A' \to^{\mathrm{c/nc}} B)$ falls $A' \sqsupseteq A$, mit $\to^{\mathrm{c/nc}} \in \{\to^{\mathrm{c}}, \to^{\mathrm{nc}}\}$,

$\forall_x^{\mathrm{nc}} A \sqsupseteq \forall_x A$,

$\forall_x A \sqsupseteq \forall_x^{\mathrm{nc}} A$ falls A n.c. ist,

$\forall_x^{\mathrm{c/nc}} A' \sqsupseteq \forall_x^{\mathrm{c/nc}} A$ falls $A' \sqsupseteq A$, mit $\forall^{\mathrm{c/nc}} \in \{\forall^{\mathrm{c}}, \forall^{\mathrm{nc}}\}$.

Zeigen Sie, daß aus $A' \sqsupseteq A$ folgt $\vdash A' \to A$. Hinweis. Es genügt zu zeigen, daß die Relation „$\vdash A' \to A$“ dieselben Abschlußeigenschaften hat wie „$A' \sqsupseteq A$“.

Aufgabe 30. (Umkehrung von $(\exists^{\mathrm{d}})^-, (\exists^{\mathrm{l}})^-, (\exists^{\mathrm{r}})^-, (\exists^{\mathrm{nc}})^-$). Zeigen Sie, daß im Fall $x \notin \mathrm{FV}(B)$ folgende Formeln herleitbar sind.

$$(\exists_x^{\mathrm{d}} A \to B) \to \forall_x (A \to B),$$
$$(\exists_x^{\mathrm{l}} A \to B) \to \forall_x (A \to^{\mathrm{nc}} B),$$
$$(\exists_x^{\mathrm{r}} A \to B) \to \forall_x^{\mathrm{nc}} (A \to B),$$
$$(\exists_x^{\mathrm{nc}} A \to B) \to \forall_x^{\mathrm{nc}} (A \to^{\mathrm{nc}} B).$$

Aufgabe 31. (Vergleich von $\tilde{\exists}_x A$ und $\exists_x^{\mathrm{nc}} A$). Wir verwenden die arithmetische Form $\forall_x (A \to \mathbf{F}) \to \mathbf{F}$ anstelle der logischen Form $\forall_x (A \to \bot) \to \bot$ des schwachen Existenzquantors (andernfalls gibt es keine Beziehung, da $\bot$ eine Prädikatenvariable mit rechnerischem Gehalt ist). Zeigen Sie

(a) $\exists_x^{\mathrm{nc}} A$ impliziert $\tilde{\exists}_x A$.

(b) $\tilde{\exists}_x A$ impliziert $\exists_x^{\mathrm{nc}} A$, falls man folgendes Markov-Axiom für die (nichtrechnerische) Formel $\exists_x^{\mathrm{nc}} A$ annimmt:
$$((\exists_x^{\mathrm{nc}} A \to \mathbf{F}) \to \mathbf{F}) \to \exists_x^{\mathrm{nc}} A.$$

Aufgabe 32. Es sei $\mathrm{Even} := \mu_X (X0, \forall_n^{\mathrm{nc}} (Xn \to X(n+2)))$.

(a) Geben Sie die Einführungsaxiome Even_i^+ (i=0, 1) und das Beseitigungsaxiom Even^- an.

(b) Zeigen Sie
   (i) $\forall_n^{\mathrm{nc}} (\mathrm{Even}\, n \to n =_{\mathbf{N}} 0 \vee^{\mathrm{r}} \exists_m^{\mathrm{r}} (n =_{\mathbf{N}} m+2 \wedge^{\mathrm{r}} \mathrm{Even}\, m))$
   (ii) $\mathrm{Even}\, 1 \to \mathbf{F}$

(c) Formalisieren Sie die Herleitungen in (b) mithilfe der Datei `aufg32.scm` (Lösung bitte als `.scm`-Dateien an Franziskus Wiesnet)

Abgabe. Mittwoch, 15. Juni 2016, in der Vorlesung.