Mathematisches Institut der LMU
Kenji Miyamoto, Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2016
Blatt 7

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 25. Die Leibniz-Gleichheit $\mathrm{EqD} := \mu_X(\forall_x Xxx)$ mit den Axiomen $\mathrm{EqD}_0^+ \colon \forall_x(x^\rho =^\mathrm{d} x^\rho)$ und $\mathrm{EqD}^- \colon \forall_{x,y}(x =^\mathrm{d} y \to \forall_x Xxx \to Xxy)$ (wobei $x =^\mathrm{d} y$ steht für $\mathrm{EqD}(\rho)(x^\rho, y^\rho)$) erfüllt

(a) (Verträglichkeit) $\forall_{x,y}(x =^\mathrm{d} y \to A(x) \to A(y))$,
(b) (Symmetrie) $\forall_{x,y}(x =^\mathrm{d} y \to y =^\mathrm{d} x)$,
(c) (Transitivität) $\forall_{x,y,z}(x =^\mathrm{d} y \to y =^\mathrm{d} z \to x =^\mathrm{d} z)$.

Aufgabe 26. Wir verwenden die Definitionen von Aufgabe 24. Zusätzlich bezeichne ε die leere Substitution und $\{\bot\}$ ein „widerspruchsvolles“ Gleichungssystem. Der Unifikationsalgorithmus nach Martelli-Montanari (1982) ist gegeben durch die Relation $E \mapsto_\vartheta E'$, definiert durch

(i) $\{P = x\} \cup E \mapsto_\varepsilon \{x = P\} \cup E$, falls P keine Variable ist.
(ii) $\{x = x\} \cup E \mapsto_\varepsilon E$.
(iii) $\{\mathrm{C}P_1 \dots P_n = \mathrm{C}Q_1 \dots Q_n\} \cup E \mapsto_\varepsilon \{P_1 = Q_1, \dots P_n = Q_n\} \cup E$.
(iv) $\{\mathrm{C}P_1 \dots P_n = \mathrm{C}'Q_1 \dots Q_n\} \cup E \mapsto_\varepsilon \{\bot\}$ falls $\mathrm{C} \neq \mathrm{C}'$.
(v) $\{x = P, P_1(x) = Q_1(x), \dots, P_n(x) = Q_n(x)\} \mapsto_{\{P/x\}}$
$\{P_1(P) = Q_1(P), \dots P_n(P) = Q_n(P)\}$ falls $x \notin \mathrm{FV}(P)$.
(vi) $\{x = P\} \cup E \mapsto_\varepsilon \{\bot\}$, falls $x \in \mathrm{FV}(P)$ und $P \neq x$.

Unter der Annahme $E \mapsto_\vartheta E'$ beweise man

(a) Ist η' Unifikator von E', so ist $\vartheta\eta'$ Unifikator von E.
(b) Ist η Unifikator von E, so gilt $\eta = \vartheta\eta$ und η ist Unifikator von E'.

Aufgabe 27. Es gelte $E_1 \mapsto_{\vartheta_1} E_2 \mapsto_{\vartheta_2} \dots E_n \mapsto_{\vartheta_n} E_{n+1}$. Man zeige

(a) Ist ϑ Unifikator von E_{n+1}, so ist $\vartheta_1 \dots \vartheta_n\vartheta$ Unifikator von E_1.
(b) Ist η Unifikator von E_1, so gilt $\eta = \vartheta_1 \dots \vartheta_n\eta$ und η ist Unifikator von E_{n+1}.

Aufgabe 28. Es sei E ein endliches Gleichungssystem. Man zeige

(a) $E = E_1 \mapsto_{\vartheta_1} E_2 \mapsto_{\vartheta_2} \dots$ terminiert mit $E_{n+1} = \emptyset$ oder $= \{\bot\}$.
(b) In ersten Fall ist E unifizierbar, und $\vartheta_1 \dots \vartheta_n$ ist ein idempotenter mgu von E.
(c) Im zweiten Fall ist E nicht unifizierbar.

Hinweis. Verwenden Sie die Aufgaben 24 und 27. Ordnen Sie jedem $E = \{P_1 = Q_1, \dots, P_n = Q_n\}$ ein Tripel $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbf{N}^3$ zu durch

$n_1 :=$ Anzahl der Variablen in E,

$n_2 :=$ Anzahl der Vorkommen von Variablen und Konstanten in E,

$n_3 :=$ Anzahl der Gleichungen $P = x$ in E mit P keine Variable,

und verwenden Sie die lexikographische Ordnung von $\mathbf{N}^3$.

Abgabe. Mittwoch, 8. Juni 2016, in der Vorlesung.