Mathematisches Institut der LMU
Kenji Miyamoto, Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2016
Blatt 6

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 21. Sei $\mathbf{Bbin}(\alpha) := \mu_\xi(\xi, \alpha \to \xi \to \xi \to \xi)$.

(a) Bestimmen Sie den Typ des Rekursionsoperators $\mathcal{R}^\tau_{\mathbf{Bbin}(\rho)}$ und des Fallunterscheidungsoperators $\mathcal{C}^\tau_{\mathbf{Bbin}(\rho)}$.

(b) Überprüfen Sie Ihr Resultat durch Ausführen von

```
(add-algs "bbin"
  '("bbin" "BbinNil")
  '("alpha=>bbin=>bbin=>bbin" "BbinBranch"))
(add-tvar-name "beta")
(define arrow-type
 (make-arrow (py "bbin alpha") (py "beta")))
(define const1 (arrow-types-to-rec-const arrow-type))
(pp (const-to-type const1))
(define const2 (arrow-type-to-cases-const arrow-type))
(pp (const-to-type const2))
```

Aufgabe 22. Die Funktion $=_{\mathbf{N}} : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \to \mathbf{B}$ ist definiert durch

$$(0 =_{\mathbf{N}} 0) = \mathtt{tt}, \qquad (Sn =_{\mathbf{N}} 0) = \mathtt{ff},$$
$$(0 =_{\mathbf{N}} Sm) = \mathtt{ff}, \qquad (Sn =_{\mathbf{N}} Sm) = (n =_{\mathbf{N}} m).$$

Geben Sie eine Definition dieser Funktion mittels Rekursionsoperatoren an.

Aufgabe 23. (a) Was ist der Typ des Korekursionsoperators ${}^{\mathrm{co}}\mathcal{R}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{L}(\mathbf{N})}$?

(b) Definieren Sie mit Hilfe von ${}^{\mathrm{co}}\mathcal{R}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{L}(\mathbf{N})}$ eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl n eine echt aufsteigende mit n beginnende Liste zuordnet.

Aufgabe 24. Eine Menge $\vartheta = \{P_1/x_1, \dots, P_n/x_n\}$ (wobei P/x ein Paar aus einem Anwendungsterm P und einer Variable x ist) heißt *Substitution* wenn $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und $P_i \neq x_i$ für alle i. Es sei $P\vartheta$ das Resultat der simultanen Ersetzung der x_i durch P_i in P. Die *Komposition* $\vartheta\eta$ von ϑ mit $\eta = \{Q_1/y_1, \dots, Q_m/y_m\}$ entsteht aus $\{P_1\eta/x_1, \dots, P_n\eta/x_n, Q_1/y_1, \dots, Q_m/y_m\}$ durch Streichen von $P_i\eta/x_i$ mit $P_i\eta = x_i$, und Q_j/y_j mit $y_j \in \{x_1, \dots, x_n\}$. ϑ ist *idempotent* wenn $\vartheta\vartheta = \vartheta$. ϑ heißt *allgemeiner als* η ($\eta \leq \vartheta$) wenn es ein ζ gibt mit $\eta = \vartheta\zeta$. Offenbar gilt $(P\vartheta)\eta = P(\vartheta\eta)$, und die Komposition ist assoziativ. ϑ heißt *Unifikator* von $E = \{P_1 = Q_1, \dots, P_n = Q_n\}$ wenn $\forall_i(P_i\vartheta = Q_i\vartheta)$, und *allgemeinster Unifikator* (mgu) wenn noch gilt $\eta \leq \vartheta$ für alle Unifikatoren η von E. Beweisen Sie, daß ein Unifikator ϑ von E ein mgu ist genau dann, wenn $\eta = \vartheta\eta$ für alle Unifikatoren η von E.

Abgabe. Mittwoch, 1. Juni 2016, in der Vorlesung.