Mathematisches Institut der LMU
Kenji Miyamoto, Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2016
Blatt 5

# Übungen zur Vorlesung „Logik II“

**Aufgabe 17.** Es seien $\boldsymbol{A} = (A, \mathrm{Con}_A, \vdash_A)$, $\boldsymbol{B} = (B, \mathrm{Con}_B, \vdash_B)$ Informationssysteme und $r, s\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ approximierbare Abbildungen. Beweisen Sie

(a) $r \cap s$ ist eine approxomierbare Abbildung.
(b) $|r \cap s| = |r| \cap |s|$.

**Aufgabe 18.** $\boldsymbol{A} = (A, \mathrm{Con}_A, \vdash_A)$, $\boldsymbol{B} = (B, \mathrm{Con}_B, \vdash_B)$, $\boldsymbol{C}=(C, \mathrm{Con}_C, \vdash_C)$ seien Informationssysteme und $r\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$, $s\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ approximierbare Abbildungen. Ferner seien $f\colon |\boldsymbol{B}| \to |\boldsymbol{C}|$ und $g\colon |\boldsymbol{A}| \to |\boldsymbol{B}|$ stetig.

(a) Beweisen Sie, daß

$$r \circ s := \{\, (U, c) \mid \exists_V((U, V) \subseteq s \text{ und } (V, c) \in r) \,\}$$

eine approxomierbare Abbildung ist (wobei $(U, V) := \{\, (U, b) \mid b \in V \,\}$).

(b) Beweisen Sie

$$|r \circ s| = |r| \circ |s|, \qquad \widehat{f \circ g} = \hat{f} \circ \hat{g}.$$

**Aufgabe 19.** Definieren Sie die Verdopplungsfunktion $(n \mapsto 2n)$ auf den natürlichen Zahlen $\mathbf{N}$ mit Hilfe des Rekursionsoperators $\mathcal{R}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{N}}$ vom Typ

$$\mathcal{R}^{\tau}_{\mathbf{N}}\colon \mathbf{N} \to \tau \to (\mathbf{N} \to \tau \to \tau) \to \tau \quad \text{mit } \tau := \mathbf{N}.$$

**Aufgabe 20.** (a) Es seien $A$, $B$ Aussagenvariablen. Erzeugen Sie in Minlog Beweise `S`, `K1` und `K2` von

$$\texttt{S}\colon (A \to (B \to A) \to A) \to (A \to B \to A) \to A \to A,$$
$$\texttt{K1}\colon A \to (B \to A) \to A,$$
$$\texttt{K2}\colon A \to B \to A$$

wobei `S` den Herleitungsterm $\lambda_{u,v,w}(uw(vw))$ haben soll. Geben Sie mittels `proof-to-expr-with-formulas` die Herleitungsterme der drei Beweise an.

(b) Erzeugen Sie den aus `S`, `K1` und `K2` durch $\to^-$ entstehenden Beweis von $A \to A$ mittels

```
(define SKK (mk-proof-in-elim-form S K1 K2))
```

(c) Erzeugen Sie aus `SKK` einen Beweis in Normalform
  (i) durch mehrfaches Anwenden von `proof-to-one-step-reduct` und
  (ii) durch Anwenden von `np`.

(Lösungen bitte als `.scm`-Dateien an Franziskus Wiesnet).

**Abgabe.** Mittwoch, 25. Mai 2016, in der Vorlesung.