Mathematisches Institut der LMU
Kenji Miyamoto, Helmut Schwichtenberg

Sommersemester 2016
Blatt 4

Übungen zur Vorlesung „Logik II“

Aufgabe 13. Ein Informationssystem $\boldsymbol{A} = (A, \mathrm{Con}, \vdash)$ heißt *kohärent* wenn es folgende Eigenschaft hat: $U \subseteq A$ ist konsistent genau dann, wenn es alle seine zweielementigen Teilmengen sind. Zeigen Sie, daß aus der Kohärenz von $\boldsymbol{B}$ die Kohärenz von $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ folgt.

Aufgabe 14. (a) Geben Sie zu der Algebra $\mathbf{P} := \mu_\xi(\xi, \xi \to \xi, \xi \to \xi)$ der (binären) positiven Zahlen mit Konstruktoren $1^{\mathbf{P}}$, $S_0^{\mathbf{P}\to\mathbf{P}}$, $S_1^{\mathbf{P}\to\mathbf{P}}$ das Informationssystem $\boldsymbol{C}_{\mathbf{P}}$ durch seine Bestandteile $C_{\mathbf{P}}$, $\mathrm{Con}_{\mathbf{P}}$ und $\vdash_{\mathbf{P}}$ an.
(b) Wie sind die approximierende Abbildung r_{S_i} und die Werte $|r_{S_i}|(z)$ der zugehörigen stetigen Funktion von $|\mathbf{P}|$ nach $|\mathbf{P}|$ definiert?
(c) Beweisen Sie, daß $|r_{S_i}|$ injektiv ist, und daß die Wertebereiche von $|r_{S_0}|$ und $|r_{S_1}|$ disjunkt sind.
(d) Geben Sie je ein flaches Informationssystem an, in dem (i) nicht alle Konstruktoren injektiv sind und (ii) die Konstruktoren keine disjunkten Wertebereiche haben. (Beipiel für ein flaches Informationssystem: die Informationsatome a von $\mathbf{P}_{\mathrm{flach}}$ sind alle $S_{i_0} S_{i_1} \dots S_{i_{n-1}} 1$, die konsistenten Mengen U alle Einermengen $\{a\}$ sowie die leere Menge $\emptyset$, und die Folgerungsrelation $U \vdash a$ ist definiert durch $a \in U$).

Aufgabe 15. Für Aussagenvariablen A,B sei

$$\begin{aligned} \mathrm{Peirce}_{A,B} &:= ((A \to B) \to A) \to A \\ \mathrm{Efq}_A &:= \bot \to A \\ \mathrm{Stab}_A &:= \neg\neg A \to A \end{aligned}$$

Zeigen Sie
(a) $\vdash \mathrm{Stab}_A \to \mathrm{Efq}_B \to \mathrm{Peirce}_{A,B}$
(b) $\vdash \mathrm{Peirce}_{A,\bot} \to \mathrm{Efq}_A \to \mathrm{Stab}_A$

Aufgabe 16. Formalisieren Sie die Herleitungen in Aufgabe 15 in Minlog und geben Sie die Herleitungsterme an. (Lösungen bitte als `.scm`-Dateien an Franziskus Wiesnet).

Abgabe. Mittwoch, 18. Mai 2016, in der Vorlesung.