MATHEMATIK FÜR PHYSIKER II
SOMMERSEMESTER 2015

7. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: ***Matrixinversion, Determinante***
Bestimmen Sie für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 6 & 6 & 9 \\ 3 & 5 & 12 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 48 \\ 2 & 4 & 15 \\ 9 & 18 & 56 \end{pmatrix}$$

a) die inversen Matrizen A^{-1}, B^{-1}, falls diese existieren,
b) die Determinanten $\det A$, $\det B$, indem Sie A und B auf Form von oberen Dreiecksmatrizen bringen,
c) die Determinanten $\det\left(A^{-1}\right)$, $\det\left(B^{-1}\right)$ der inversen Matrizen, falls diese existieren.

Aufgabe 2: ***Determinante als Volumenform, Spatprodukt***
Die Determinante mag Ihnen relativ abstrakt vorkommen, sie trägt jedoch geometrische Bedeutung. Beim Wechsel von Koordinatensystemen wird Ihnen die Jacobi-Determinante begegnen, die Sie möglicherweise schon als „Verzerrungselement“ kennen. Wir betrachten den Ursprung dieser Idee.

a) Zeigen Sie, dass zwei linear unabhängige und von null verschiedene Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ ein Parallelogramm in der Ebene aufspannen, dessen Flächeninhalt durch $\mathrm{vol}_2\,(a,b) = \left|\det \begin{pmatrix} a^T \\ b^T \end{pmatrix}\right|$ gegeben ist.
b) Ersetzen Sie formal(!) für zwei linear unabhängige und von null verschiedene Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ die Komponenten des Vektors E in $\det \begin{pmatrix} a^T \\ b^T \\ E^T \end{pmatrix}$ durch die drei Basisvektoren, also ersetzen Sie E_i durch e_i, $i = 1, 2, 3$. Was erhalten Sie dann als Ergebnis?
c) Zeigen Sie nun, dass drei linear unabhängige und von null verschiedene Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ ein Parallelepiped im Raum aufspannen, dessen Volumen durch $\mathrm{vol}_3\,(a,b,c) = \left|\det \begin{pmatrix} a^T \\ b^T \\ c^T \end{pmatrix}\right|$ gegeben ist, indem Sie sich überlegen, wie die Hinzunahme eines dritten Vektors c aus einem Parallelogramm ein Parallelepiped erzeugt und Sie folgende Eigenschaften der Volumenform zeigen:
   - Streckung von c mit $\lambda \in \mathbb{R}$ führt zum λ-fachen Volumen.
   - Liegt c in der von a und b aufgespannten Ebene, so verschwindet das Volumen.
   - Das Volumen des Einheitswürfels ist 1.