MATHEMATIK FÜR PHYSIKER II
SOMMERSEMESTER 2015

5. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: ***Kompositionen linearer Abbildungen, Matrixmultiplikation, Basiswechsel***
Sei V ein 4-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für zwei Basen $A = \{a_1, \ldots, a_4\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_4\}$ in V definieren wir die $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $P : V \to V$ durch

$$\begin{aligned} P(a_i) &= b_i, && i = 1, 2 \\ P(a_j) &= 0, && j = 3, 4. \end{aligned}$$

Desweiteren sei $I : V \to V$ ebenfalls $\mathbb{K}$-linear und $I(a_i) = b_i \, \forall i \in \{1, \ldots, 4\}$. Definiere nun noch $Q : V \to V$ als $Q = I - P$. Berechnen Sie die darstellenden Matrizen $M_B^A(P)$, $M_B^A(P \circ P)$, $M_B^A(Q)$, $M_B^A(Q \circ Q)$, $M_B^A(P \circ Q)$ für

a) $b_i = a_i \, \forall i \in \{1, \ldots, 4\}$,
b) $b_i = a_{4-i+1} \, \forall i \in \{1, \ldots, 4\}$ sowie
c) $b_i = \sum\limits_{j=1}^{i} a_j \, \forall i \in \{1, \ldots, 4\}$.

Verwenden Sie, was Sie über die Beziehung zwischen Kompositionen linearer Abbildungen und ihren darstellenden Matrizen wissen, wo angebracht.

Aufgabe 2: ***Zeilen- und Spaltenrang, Basiswechsel, Ähnlichkeit von Matrizen***
Für einen Körper $\mathbb{K}$ definieren wir $A = (a_1, a_2, a_3) \in M(1 \times 3, \mathbb{K})$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Rang} A^T A = \begin{cases} 1, & A \neq (0,0,0) \\ 0, & A = (0,0,0) \end{cases},$$

a) indem Sie direkt den Zeilen- oder Spaltenrang von $A^T A$ bestimmen,
b) indem Sie in eine geeignete Basis im $\mathbb{K}^3$ wechseln, in der die Aussage trivial ist.
c) Verallgemeinern Sie Ihre Argumentation auf ein $A \in M(1 \times n, \mathbb{K})$, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist.

Bonusaufgabe:
Lösen Sie Aufgabe 3 des vierten Tutoriumsblattes nochmals mittels direkter Matrizenmultiplikation, wie hier in Aufgabe 1.