MATHEMATIK II FÜR PHYSIKER
SOMMERSEMESTER 2015

12. TUTORIUMSBLATT

Aufgabe 1: *Selbstadjungierte Matrix*
Für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

bestimmen Sie

a) sämtliche Eigenwerte,
b) sämtliche Eigenräume,
c) falls möglich eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren und damit
d) eine Diagonaldarstellung.

Aufgabe 2: *Unitarität, Orthogonalität*
Sind die folgenden Matrizen unitär (falls über $\mathbb{C}$) bzw. orthogonal (falls über $\mathbb{R}$)?

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i}+1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), \qquad B = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 3: *Hauptachsentransformation*
Die kinetische Energie eines rotierenden starren Körpers ist eine quadratische Form seines Rotationsvektors, die durch den sogenannten *Trägheitstensor* induziert ist. Präziser: Sei $\Omega \in \mathbb{R}^3$ der Drehvektor eines aus $N \in \mathbb{N}$ Massenpunkten $x_i \in \mathbb{R}^3$ (gegeben in der Standardbasis) mit Massen $m_i > 0$ bestehenden starren Körpers, so existiert eine Abbildung

$$F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$F_A(\omega) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\|x_i\|^2 \omega - \langle x_i, \omega \rangle x_i \right).$$

a) Zeigen Sie, dass F_A $\mathbb{R}$-linear ist.
b) Die darstellende Matrix von F_A bezüglich der Standardbasis sei $A \in M_3(\mathbb{R})$. Die kinetische Energie des starren Körpers ist definiert als die durch A induzierte quadratische Form

$$T_A(\Omega) = \frac{1}{2} \langle \Omega, A\Omega \rangle.$$

Zeigen Sie, dass Sie eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$ finden können, in der $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A)$ diagonal ist, und bestimmen Sie $T_A(\Omega)$ in $\mathcal{B}$. Die Basisvektoren von $\mathcal{B}$ heißen *Hauptachsen* und die Diagonaleinträge von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A)$ *Trägheitsmomente* entlang der Hauptachsen.