MATHEMATIK II FÜR PHYSIKER
SOMMERSEMESTER 2015

11. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1: ***Parallelogrammgleichung***
Die Parallelogrammgleichung schlägt die Brücke zwischen Norm und Skalarprodukt - jede Norm, die die Parallelogrammgleichung erfüllt, induziert per Polarisationsidentität ein Skalarprodukt. Diese Aussage finden Sie in der Vorlesung (*Bonusaufgabe:* Beweisen Sie sie!). Hier soll es aber darum gehen, zu erklären, wieso die Parallelogrammgleichung ihren Namen trägt.

a) Zeigen Sie hierzu durch explizites Ausrechnen für alle Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$, dass die durch das Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erzeugte quadratische Form $q_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q_{\mathbb{R}^2}(x) = \langle x, x \rangle_{\mathbb{R}^2}$ (die insbesondere das Quadrat der euklidischen Norm $\|x\|_{\mathbb{R}^2} := \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathbb{R}^2}} = \sqrt{q_{\mathbb{R}^2}(x)}$, $x \in \mathbb{R}^2$ ist[1]) die Parallelogrammgleichung erfüllt.
b) Überlegen Sie sich den geometrischen Hintergrund der Parallelogrammgleichung, indem Sie mit der Norm eines Vektors seine Länge identifizieren und die Parallelogrammgleichung für zwei von Null verschiedene linear unabhängige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ geometrisch verifizieren.

Aufgabe 2: ***Orthonormierung***
Gegeben die beiden linear unabhänigen Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$,

a) bestimmen Sie zunächst einen dritten Vektor w, der (u, v) zu einer Basis $B = (u, v, w)$ des $\mathbb{R}^3$ ergänzt, und
b) wenden Sie dann das (Gram-)Schmidt'sche Orthonormierungsverfahren (bezüglich des Standardskalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der dadurch induzierten Standardnorm $\|\cdot\|$) auf B an, um eine Orthonormalbasis $O = (o_1, o_2, o_3)$ des $\mathbb{R}^3$ zu konstruieren, deren erster Basisvektor o_1 durch $u / \|u\|$ gegeben ist.
c) Was ist die geometrische Bedeutung des Schmidt'schen Orthonormierungsverfahrens?

Aufgabe 3: ***Exponential von Jordanblöckchen***
Für folgende Matrix $M \in M_3(\mathbb{R})$, berechnen Sie e^M nach der in Aufgabe 38 auf Übungsblatt 10 angegebenen Definition.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

---

[1] In Zukunft lassen wir die Indizes $\mathbb{R}^n$ weg, wenn klar ist, dass Standardskalarprodukt usw. gemeint sind.