

## Übungen zur Analysis 2

### 7.1 Numerische Beispiele zum Banachschen Fixpunktsatz:

- (a) **Approximation an  $\sqrt{2}$ .** Berechnen Sie mit Taschenrechnergenauigkeit die ersten drei Näherungen  $x_1, x_2, x_3$  an  $\sqrt{2}$  nach dem Heronverfahren mit der Startnäherung  $x_0 = 2$ . Berechnen Sie die a-priori-Schranke und die a-posteriori-Schranke für den Fehler  $|x_n - \sqrt{2}|$ ,  $n = 1, 2, 3$ , die sich aus dem Banachschen Fixpunktsatz mit der Kontraktionskonstante  $K = \frac{1}{2}$  ergibt. Vergleichen Sie (mit Taschenrechnergenauigkeit) diese Fehlerschranken mit dem tatsächlichen Wert des Fehlers  $|x_n - \sqrt{2}|$ .
- (b) **Approximation an  $i$  in  $\mathbb{Z}_5$ .** Berechnen Sie ein  $x \in \{0, 1, \dots, 124\}$  mit  $\hat{d}_5(x, i) \leq 1/125$ , indem Sie die Rekursion aus dem Banachschen Fixpunktsatz auf die Abbildung  $f : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$  aus Beispiel 1.139 mit dem Startwert  $x_0 = 2$  anwenden. Stellen Sie  $x$  und  $x^2 + 1$  in 5-adischer Darstellung  $\sum_{k=0}^n a_k 5^k$  mit  $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  dar. [10 Punkte]

### Solution

- (a) See Example 1.136. The point  $\sqrt{2}$  is a fix point of the following function  $f(x)$ .

$$f : [\sqrt{2}, \infty] \rightarrow [\sqrt{2}, \infty], \quad f(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{x} + x \right).$$

Starting with  $x_0 = 2$ , we have  $x_1 = f(x_0) = f(2) = \frac{3}{2}$ ,  $x_2 = f(x_1) = 1.416666$  and  $x_3 = f(x_2) = 1.4142156$ .

The “a-priori-Schranke” and the “a-posteriori-Schranke” for  $n = 1, 2, 3$ , using the inequalities (18) and (19), page 55 in the lecture with  $K = \frac{1}{2}$ , are  
“a-priori-Schranke”:

$$\begin{aligned} |x_1 - \sqrt{2}| &\leq \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} |x_1 - x_0| = \frac{1}{2}; \\ |x_2 - \sqrt{2}| &\leq \frac{\frac{1}{2^2}}{1 - \frac{1}{2}} |x_1 - x_0| = \frac{1}{4}; \\ |x_3 - \sqrt{2}| &\leq \frac{\frac{1}{2^3}}{1 - \frac{1}{2}} |x_1 - x_0| = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

“a-posteriori-Schranke”:

$$\begin{aligned} |x_1 - \sqrt{2}| &\leq \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} |x_1 - x_0| = \frac{1}{2}; \\ |x_2 - \sqrt{2}| &\leq |x_1 - x_2| = 0.08333; \\ |x_3 - \sqrt{2}| &\leq |x_3 - x_2| = 0.00245. \end{aligned}$$

The errors using a calculator are

$$\begin{aligned}|x_1 - \sqrt{2}| &= 0.0857864; \\ |x_2 - \sqrt{2}| &= 0.00245, \\ |x_3 - \sqrt{2}| &= 0.00000203.\end{aligned}$$

(b) The point  $i \in \overline{M}$  is a fix point of the function  $f$  below.

$$f : \overline{M} \rightarrow \overline{M}, \quad f(x) = x^2 + x + 1.$$

Starting with  $x_0 = 2$ , set  $x_1 = f(2) = 7$  and  $x_2 = f \circ f(2) = 57$ . We have

$$\hat{d}_5(x_2, i) = \hat{d}_5(57, i) \leq \frac{1}{25} \hat{d}_5(2, i), \quad (*)$$

since for every  $x, y \in \overline{M}$ ,  $\hat{d}_5(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{5} \hat{d}_5(x, y)$ . We now estimate  $\hat{d}_5(2, i)$ . Let  $x_n = f^{(n)}(2) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ times}}(2)$ . Thus

$$\hat{d}_5(x_n, i) = \hat{d}_5(f^{(n)}(2), f^{(n)}(i)) \leq \frac{1}{5^n} \hat{d}_5(2, i).$$

By the triangle inequality, for every  $n \in \mathbb{N}$  we have

$$\hat{d}_5(2, i) \leq \hat{d}_5(2, f^{(n)}(2)) + \hat{d}_5(f^{(n)}(2), i) \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{5^n} \hat{d}_5(2, i).$$

Letting  $n$  go to infinity we get  $\hat{d}_5(2, i) \leq \frac{1}{5}$ . Replacing in  $(*)$  we obtain  $\hat{d}_5(57, i) \leq \frac{1}{125}$ . Finally, the  $p$ -adic representations of 57 and  $57^2 + 1$  are

$$\begin{aligned}57 &= 2 \times 5^2 + 5 + 2; \\ 1 + 57^2 &= 3250 = 5^5 + 5^3.\end{aligned}$$

**7.2 Fehlerabschätzung im Iterationsverfahren nach Picard-Lindelöf** Mit den Bezeichnungen von oben sei

$$(y^{(m)})_{m \in \mathbb{N}_0}$$

die wie im Banachschen Fixpunktsatz rekursiv definierte Folge mit der konstanten Startfunktion

$$y^{(0)}(x) = b \text{ für } x \in I$$

und dem Rekursionsschritt

$$y^{(m+1)} = \Phi(y^{(m)}) \text{ für } m \in \mathbb{N}_0.$$

Es sei  $C = \sup_{x \in I} \|f(x, b)\|$ . Zeigen Sie für alle  $x \in I$  und  $m \in \mathbb{N}_0$ :

$$\|y^{(m+1)}(x) - y^{(m)}(x)\| \leq CL^m \frac{|x - a|^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Folgern Sie für den Fixpunkt  $y$  von  $\Phi$ ,  $x \in I$  und  $m \in \mathbb{N}_0$  im Fall  $L > 0$ :

$$\begin{aligned}\|y(x) - y^{(m)}(x)\| &\leq C \sum_{k=m+1}^{\infty} L^{k-1} \frac{|x - a|^k}{k!} \\ &= \frac{C}{L} \left( e^{L|x-a|} - \sum_{k=0}^m \frac{(L|x-a|)^k}{k!} \right) = C \left| \int_a^x \frac{|L(x-t)|^m}{m!} e^{L|t-a|} dt \right|.\end{aligned}$$

*Hinweis:* Verwenden Sie die Lagrange-Darstellung des Taylor-Restglieds. [10 Punkte]

### Solution

We proceed by induction. For  $m = 0$ , we have

$$\|y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x)\| = \|b + \int_a^x f(t, b)dt - b\| \leq C|x - a|.$$

We assume for every  $n < m$  the inequality holds. We prove that the inequality also holds for  $m$ .

$$\begin{aligned} \|y^{(m+1)}(x) - y^{(m)}(x)\| &= \|b + \int_a^x f(t, y^{(m)})dt - b - \int_a^x f(t, y^{(m-1)})dt\| \\ &\leq \int_a^x \|f(t, y^{(m)}) - f(t, y^{(m-1)})\|dt \\ &\leq \int_a^x L\|y^{(m)}(t) - y^{(m-1)}(t)\|dt \\ &\leq L \int_a^x \left( CL^{m-1} \frac{|t-a|^m}{m!} \right) dt = CL^m \frac{|x-a|^{m+1}}{(m+1)!}. \end{aligned}$$

In the last inequality we use the induction assumption and for the second inequality we use the fact that for every  $y, z \in \mathbb{K}^n$  and every  $x \in I$ ,

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L\|y - z\|,$$

and we obtain the desired inequality.

We now prove that

$$\|y(x) - y^{(m)}(x)\| = C \sum_{k=m+1}^{\infty} L^{k-1} \frac{|x-a|^k}{k!} \quad (\star)$$

For every  $n > m$ ,

$$\begin{aligned} \|y^{(n)}(x) - y^{(m)}(x)\| &\leq \|y^{(n)}(x) - y^{(n-1)}(x)\| + \dots + \|y^{(m+1)}(x) - y^{(m)}(x)\| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n CL^{k-1} \frac{|x-a|^k}{k!}. \end{aligned}$$

Letting  $n$  goes to infinity we obtain  $(\star)$ .

We rewrite the right hand-side of  $(\star)$  as

$$C \sum_{k=m+1}^{\infty} L^{k-1} \frac{|x-a|^k}{k!} = \frac{C}{L} \left( e^{L|x-a|} - \sum_{k=0}^m L^k \frac{|x-a|^k}{k!} \right). \quad (*)$$

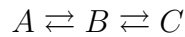
Recall that  $e^{L|x-a|} = \sum_{k=0}^{\infty} L^k \frac{|x-a|^k}{k!}$  and  $e^{L|x-a|} = \sum_{k=0}^m L^k \frac{|x-a|^k}{k!} + R_{a,m}e^{L|x-a|}$ , where  $R_{a,m}e^{L|x-a|}$  is the remainder of its Taylor series. We know from Analysis I (see Satz 6.4 Analysis I) that

$$R_{a,m}e^{L|x-a|} = \int_a^x \frac{L^{m+1}e^{L|t-a|}}{m!} (x-t)^m dt.$$

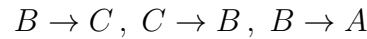
Hence, replacing  $(**)$  below in the equality  $(*)$  gives the desired result.

$$e^{L|x-a|} = \sum_{k=0}^m L^k \frac{|x-a|^k}{k!} + \int_a^x \frac{L^{m+1}e^{L|t-a|}}{m!} (x-t)^m dt. \quad (**)$$

**7.3** In einem Reaktionsgefäß befinden sich drei chemische Substanzen. Die Substanzen können sich nach folgenden Reaktionen ineinander umwandeln:



wobei die Rate, mit der  $A$  in  $B$  umgewandelt wird, proportional zur Konzentration von  $A$  ist mit Proportionalitätskonstanten  $k_{AB} > 0$ . Analoges gilt für die Reaktionen



mit Proportionalitätskonstanten  $k_{BC}, k_{CB}, k_{BA}$ .

- Beschreiben Sie die Dynamik der Konzentrationen  $a(t), b(t), c(t)$  von  $A, B, C$  zum Zeitpunkt  $t$  durch ein Differentialgleichungssystem.
- Lösen Sie dieses System mit der Anfangsbedingung  $a(0) = 1, b(0) = 0, c(0) = 0$  (d.h. anfangs ist nur  $A$  im Reaktionsgefäß vorhanden.)
- Berechnen Sie  $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t), \lim_{t \rightarrow \infty} b(t)$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$ . **[10 Punkte]**

### Lösung

- (a) Die gesuchten Gleichungen sind

$$a'(t) = -k_{AB}a(t) + k_{BA}b(t) \quad (1)$$

$$b'(t) = k_{AB}a(t) - (k_{BA} + k_{BC})b(t) + k_{CB}c(t) \quad (2)$$

$$c'(t) = k_{BC}b(t) - k_{CB}c(t) \quad (3)$$

Wegen  $c(t) = 1 - a(t) - b(t)$  folgt

$$\begin{aligned} b'(t) &= k_{AB}a(t) - (k_{BA} + k_{BC})b(t) + k_{CB}(1 - b(t) - a(t)) \\ &= (k_{AB} - k_{CB})a(t) - (k_{BA} + k_{BC} + k_{CB})b(t) + k_{CB}. \end{aligned} \quad (2')$$

Insbesondere folgen aus (1) und (2') schon (1), (2'), (3), z. B. durch Einsetzen. Also genügt es (1) und (2') zu lösen. Als Matrix erhalten wir für  $y(t) = (a(t), b(t))^t$

$$y'(t) = Ay(t) + g, \quad A := \begin{pmatrix} -k_{AB} & k_{BA} \\ k_{AB} - k_{CB} & -k_{BA} - k_{BC} - k_{CB} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ k_{CB} \end{pmatrix}.$$

- (b) Die Lösung des homogenen Gleichungssystems ist bekanntlich  $e^{tA}b$ . Wir berechnen  $e^{tA}$  aus der entsprechenden Normalform von  $A$ : Das charakteristische Polynom zu  $A$  ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (k_{AB} + \lambda)(k_{BA} + k_{BC} + k_{CB} + \lambda) + k_{BA}(k_{CB} - k_{AB}) \\ &= \lambda^2 + (k_{AB} + k_{BA} + k_{BC} + k_{CB})\lambda + k_{AB}k_{BC} + k_{AB}k_{CB} + k_{BA}k_{CB}. \end{aligned}$$

Für die Diskriminante gilt

$$\begin{aligned} D_A &= (k_{AB} + k_{BA} + k_{BC} + k_{CB})^2 - 4(k_{AB}k_{BC} + k_{AB}k_{CB} + k_{BA}k_{CB}) \\ &= (-k_{AB} - k_{BA} + k_{BC} + k_{CB})^2 + 4k_{BA}k_{BC} > 0, \end{aligned}$$

d. h.  $A$  hat 2 verschiedene (und damit nur verschiedene) Eigenwert. Somit ist  $A$  diagonalisierbar. Seien  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  die beiden Eigenwerte. Wir bestimmen die Transformationsmatrix aus den Eigenvektoren

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} k_{BA} \\ k_{AB} + \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: v_i} = \begin{pmatrix} \frac{-k_{AB}k_{BA} + k_{BA}(k_{AB} + \lambda_i)}{k_{AB} + \lambda_i} \\ \frac{(k_{AB} - k_{CB})k_{BA}}{k_{AB} + \lambda_i} - (k_{BA} + k_{BC} + k_{CB}) \\ (k_{AB} + \lambda_i) \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} k_{BA} \\ k_{AB} + \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei wir

$$\begin{aligned} & \frac{(k_{AB} - k_{CB})k_{BA}}{k_{AB} + \lambda_i} - (k_{BA} + k_{BC} + k_{CB}) \\ &= \frac{(k_{AB} - k_{CB})k_{BA} - (k_{BA} + k_{BC} + k_{CB})(k_{AB} + \lambda_i)}{k_{AB} + \lambda_i} \\ &= \frac{-k_{CB}k_{BA} - k_{BC}k_{AB} - k_{CB}k_{AB} - \lambda_i(k_{BA} + k_{BC} + k_{CB})}{k_{AB} + \lambda_i} \\ &= \frac{\overbrace{\det(A - \lambda_i E)}^{=0} - k_{CB}k_{BA} - k_{BC}k_{AB} - k_{CB}k_{AB} - \lambda_i(k_{BA} + k_{BC} + k_{CB})}{k_{AB} + \lambda_i} \\ &= \frac{\lambda_i^2 + k_{AB}\lambda_i}{k_{AB} + \lambda_i} = \lambda_i. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Transformationsmatrix  $P = (v_1, v_2)$ . Allgemein gilt für ein  $2 \times 2$ -Matrix  $Q := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  und ihre Inverse  $Q^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} Q \operatorname{diag}(e^z, e^{-z}) Q^{-1} &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ade^z - bce^{-z} & -ab(e^z - e^{-z}) \\ cd(e^z - e^{-z}) & ade^{-z} - bce^z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} \cosh(z) + \frac{ad+bc}{ad-bc} \sinh(z) & -\frac{2ab}{ad-bc} \sinh(z) \\ \frac{2cd}{ad-bc} \sinh(z) & \frac{ad-bc}{ad-bc} \cosh(z) - \frac{ad+bc}{ad-bc} \sinh(z) \end{pmatrix} \\ &= \cosh(z) + \frac{\sinh(z)}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -(ad+bc) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sei  $y := \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$  und damit  $z := \frac{-\sqrt{D_A}}{2}$  und  $P \cdot \operatorname{diag}(k_{AB} + \lambda_1, k_{AB} + \lambda_2) =: Q$ , dann ist

$$e^{tA}b = e^{yt} \left( \cosh(tz) + \frac{\sinh(tz)}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -(ad+bc) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

eine Lösung der homogenen Gleichung. Wegen  $k_{BA} + k_{BC} + k_{CB} + \lambda_1 = -\lambda_2 - k_{AB}$ , folgt aus der  $\det(A - \lambda_1 E) = 0$  schon  $(k_{AB} + \lambda_1)(k_{AB} + \lambda_2) = k_{BA}(k_{CB} - k_{AB})$ . Weiter ist  $\sqrt{D_A} = \lambda_2 - \lambda_1$ . Es gilt somit

$$\begin{aligned} ad - bc &= k_{BA}\sqrt{D_A}, \quad ad + bc = (k_{AB} - k_{BA} - k_{CB} - k_{BC})k_{BA}, \\ cd &= k_{BA}(k_{CB} - k_{AB}), \quad ab = k_{BA}^2. \end{aligned}$$

Man beachte, dass wir mit  $\det(A - \lambda E)|_{\lambda=0} = k_{AB}k_{BC} + k_{AB}k_{CB} + k_{BA}k_{CB} > 0$  gezeigt haben, dass  $A$  invertierbar ist. Es gilt

$$A^{-1} = \frac{-1}{k_{AB}k_{BC} + k_{AB}k_{CB} + k_{BA}k_{CB}} \begin{pmatrix} k_{BA} + k_{BC} + k_{CB} & k_{BA} \\ k_{AB} - k_{CB} & k_{AB} \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems ist gegeben durch  $e^{tA}b + A^{-1}(e^{tA} - 1)g$ :

$$\frac{d}{dt} (e^{tA}b + A^{-1}(e^{tA} - 1)g) = Ae^{tA}b + e^{tA}g = A(e^{tA}b + A^{-1}(e^{tA} - 1)g) + g.^1$$

Als Lösung für  $b_1 = 1, b_2 = 0$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu(t) = & e^{\frac{-(k_{AB}+k_{BA}+k_{CB}+k_{BC})t}{2}} \left( \cosh\left(t\frac{\sqrt{D_A}}{2}\right) - \frac{\sinh\left(t\frac{\sqrt{D_A}}{2}\right)}{\sqrt{D_A}} \right. \\ & \cdot \begin{pmatrix} k_{AB} - k_{BA} - k_{CB} - k_{BC} & -2k_{BA} \\ 2(k_{CB} - k_{AB}) & -k_{AB} + k_{BA} + k_{CB} + k_{BC} \end{pmatrix} \Bigg) \\ & \cdot \begin{pmatrix} \frac{k_{AB}(k_{BC}+k_{CB})}{k_{AB}k_{BC}+k_{AB}k_{CB}+k_{BA}k_{CB} - k_{AB}k_{CB}} \\ \frac{-k_{AB}k_{CB}}{k_{AB}k_{BC}+k_{AB}k_{CB}+k_{BA}k_{CB}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{k_{BA}k_{CB}}{k_{AB}k_{BC}+k_{AB}k_{CB}+k_{BA}k_{CB}} \\ \frac{k_{AB}k_{CB}}{k_{AB}k_{BC}+k_{AB}k_{CB}+k_{BA}k_{CB}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*Bemerkung:* Aus der linearen Algebra wissen wir wie inhomogene Gleichungssysteme zu lösen sind. Der Lösungsraum  $\text{Lös}_g$  ist ein affiner Raum der sich aus dem Lösungsraum der homogenen Gleichung  $\text{Lös}_0$  und einer speziellen Lösung des inhomogenen Problems ergibt: Für  $\mu_g \in \text{Lös}_g, \mu_0 \in \text{Lös}_0$  folgt

$$(\mu_g + \mu_0)' = \mu_g' + \mu_0' = A\mu_g + A\mu_0 + g = A(\mu_g + \mu_0) + g \Rightarrow \mu_g + \mu_0 \in \text{Lös}_g$$

und umgekehrt ergibt sich für  $\mu_g, \nu_g \in \text{Lös}_g$  schon

$$\begin{aligned} (\mu_g - \nu_g)' &= A\mu_g - A\nu_g + g - g = A(\mu_g - \nu_g) \Rightarrow \mu_g - \nu_g \in \text{Lös}_0 \\ &\Rightarrow \text{Lös}_g = \mu_g + \text{Lös}_0, \forall \mu_g \in \text{Lös}_g. \end{aligned}$$

(c) Wegen  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  folgt unabhängig von den Anfangswerten aus  $e^{tA}b + A^{-1}(e^{tA} - 1)g$

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{k_{BA}k_{CB}}{k_{AB}k_{BC}+k_{AB}k_{CB}+k_{BA}k_{CB}} \\ \frac{k_{AB}k_{CB}}{k_{AB}k_{BC}+k_{AB}k_{CB}+k_{BA}k_{CB}} \\ \frac{k_{AB}k_{BC}}{k_{AB}k_{BC}+k_{AB}k_{CB}+k_{BA}k_{CB}} \end{pmatrix}.$$

Entsprechend erhält man im Gleichgewicht  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{b(t)} = \frac{k_{BA}}{k_{AB}}$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b(t)}{c(t)} = \frac{k_{CB}}{k_{BC}}$  - das Massenwirkungsgesetz.

*Bemerkung:* Die Aufgabe kann natürlich auch mit der zu den Gleichungen (1), (2) und (3) gehörenden  $3 \times 3$ -Matrix gelöst werden. Entsprechend findet man einen zusätzlichen Eigenwert 0. Die Bestimmung der Transformationsmatrizen und des Matrixexponentials verläuft dann analog.

---

<sup>1</sup>Auch wenn  $A$  nicht invertierbar ist, gilt die Lösungsformel mit  $e^{tA} - 1 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}t^k}{k!}$ .

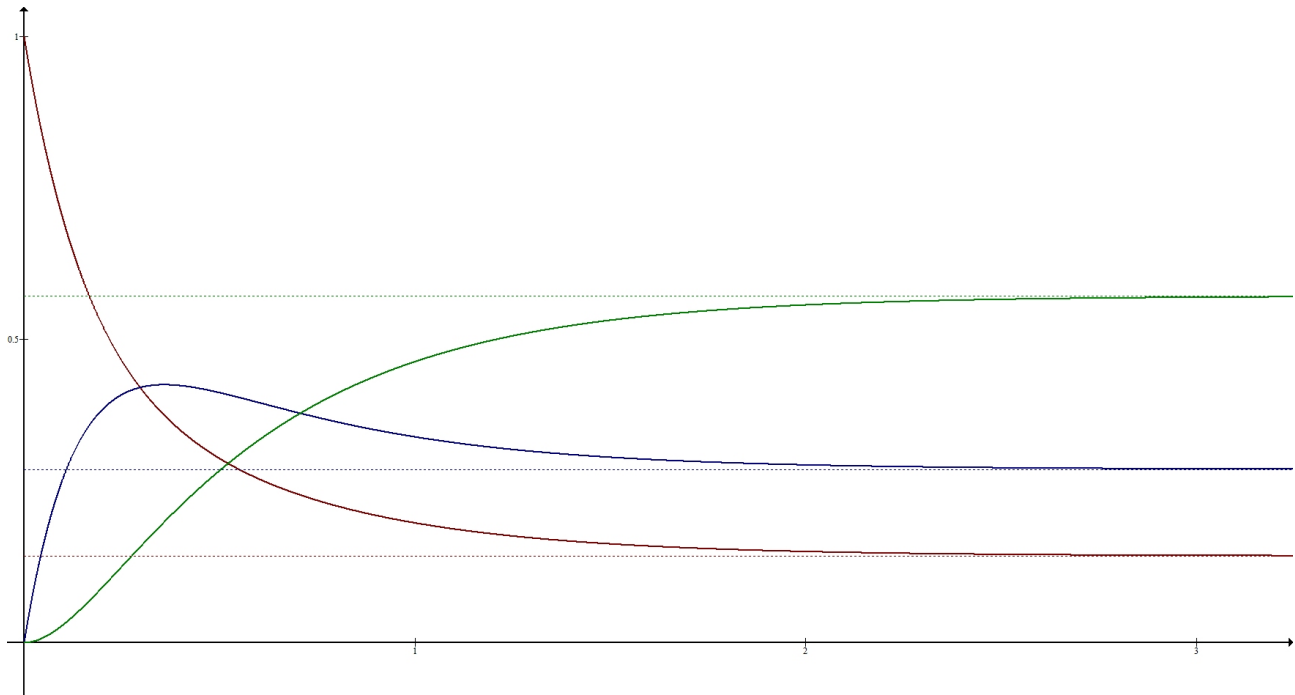


Abbildung 1: Lösungskurven für  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = b_3 = 0$  und  $k_{AB} = 4$ ,  $k_{BA} = k_{BC} = 2$ ,  $k_{CB} = 1$ .  $a(t)$  (rot) konvergiert gegen  $1/7$ ,  $b(t)$  (blau) konvergiert gegen  $2/7$ ,  $c(t)$  (grün) konvergiert gegen  $4/7$ .

- 7.4** Eine punktförmige Masse hängt an einer Feder (Federkonstante 1). Zusätzlich zur Federkraft, die die Masse zur Gleichgewichtslage zurücktreibt, wirkt noch eine bremsende Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit. Wir beschreiben dieses Modell durch die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y_1''(t) = -y_1(t) - \mu y_1'(t)$$

oder äquivalent durch das System

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &= -y_1(t) - \mu y_2(t) \end{aligned}$$

mit einem “Reibungskoeffizienten”  $\mu \geq 0$ . Berechnen Sie die Lösung dieses Differentialgleichungssystems für gegebene Anfangsbedingung  $y_1(0) = b_1$ ,  $y_2(0) = b_2$ . Für welche Werte von  $\mu$  ist die zum Differentialgleichungssystem gehörende Matrix diagonalisierbar? Für welchen Wert von  $\mu$  braucht man ein  $2 \times 2$ -Jordankästchen? **[10 Punkte]**

7.4. Zunächst sehen wir wie wir  
schon die Äquivalenz zwische  
ner Diffgl. 2. Ordnung:

$$y'' = -y - \mu y' \quad y(0) = b_1, y'(0) = b_2$$

und dem System 1. Ordnung:

$$(*) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 & y_1(0) &= b_1 \\ y_2' &= -y_1 - \mu y_2 & y_2(0) &= b_2 \end{aligned}$$

(Das  $y_1$  im System entspricht  
dem gewählten  $y$ . Dieses Ver-  
fahren geht immer bei  
linearen Diffgl.)

(\*) im Matrixschreibweise:

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix} y \quad y(0) = b$$

$$(y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.)$$

Lösung:

$$e^{A^t} \cdot b \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

↑  
Matrixprod.

Um  $e^{A^t}$  zu bestimmen, versuche  
unr,  $A$  zu diagonalisieren:

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\mu + \lambda) + 1$$

$$d_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$$

Sei  $\mu \neq 2$ . Der Eigenraum zu Eigenwert  $d$

$$ER(d) = \ker(A - d \cdot \text{id})$$

$$= \ker \begin{pmatrix} -d & 1 \\ -1 & -\mu - d \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & \mu + d \\ 0 & 1 + d(\mu + d) \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & \mu + d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \mu + d \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \mu + d_1 & \mu + d_2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}}_B \cdot C^{-1} = A$$

$$\left( \Rightarrow \text{gilt } C^{-1} = \frac{1}{d_2 - d_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \mu + d_2 & \mu + d_1 \end{pmatrix}, \right)$$

$$\text{Also: } e^{At} = e^{C B t C^{-1}} = C e^{B t} C^{-1}$$

$$= C \begin{pmatrix} e^{d_1 t} & 0 \\ 0 & e^{d_2 t} \end{pmatrix} C^{-1} = C \frac{1}{d_2 - d_1} \begin{pmatrix} -e^{d_1 t} & e^{d_1 t} \\ -(\mu + d_2) e^{d_2 t} & (\mu + d_1) e^{d_2 t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{d_2 - d_1} \begin{pmatrix} -(\mu + d_1) e^{d_1 t} + (\mu + d_2) e^{d_2 t} \\ -(\mu + d_1) e^{d_1 t} + (\mu + d_2) e^{d_2 t} \end{pmatrix}$$

$e^{At} b$  ist noch blöder und  $y_1$  die obere Zeile davon:

$$y_1(t) = \frac{1}{d_1 d_2} \left( -b_1 \left[ (\mu + d_1) e^{d_1 t} + (\mu + d_2) e^{d_2 t} \right] + b_2 \left[ (\mu + d_1) e^{d_1 t} + (\mu + d_1)(\mu + d_2) e^{d_2 t} \right] \right)$$

Je nachdem, ob  $d < 2$  oder  $d \geq 2$  haben wir komplexe oder reelle

$e$ -Funktion, also  $\sin / \cos$   
im Spiel bzw. nicht.

Wir hatten das mal auf dem  
Übungsblatt: Das eine ist  
~~starke~~ schwache Dämpfung,  
das andere starke.

Sei  $\mu = 2$ . Hier haben wir nur den  
Eigenwert  $\lambda = -\frac{\mu}{2} = -1$ .

$$E_{\mathbb{R}}(\lambda) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Der Eigenraum ist also nur 1-dimensional,  
und wir müssen auf eine  
Basis des dazugehörigen Haupttraumes  
( $= \mathbb{R}^2$ ) ergänzen, z.B. mit  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Dann ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_C \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_B C^{-1} = A$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt brauchen wir  $e^A$ .

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^4 = \begin{pmatrix} (-1)^4 & (-1)^4 - 1 \\ 0 & (-1)^4 \end{pmatrix}$$

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^t & \cos t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}. \quad \text{Weiter wie im}$$

anderen Fall.

- 7.5 Beispiel einer abgeschlossenen und beschränkten, aber nicht kompakten Menge.** Es sei  $K = \{f \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid \|f\|_2 \leq 1\}$  der abgeschlossene Einheitsball in  $\ell^2(\mathbb{N})$ . Zeigen Sie, dass  $K$  nicht kompakt ist. Zeigen Sie dazu, dass die offene Überdeckung  $(U_{1/\sqrt{2}}(x))_{x \in K}$  von  $K$  mit den offenen Kugeln  $U_{1/\sqrt{2}}(x) = \{y \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \|y - x\|_2 < 1/\sqrt{2}\}$  keine endliche Teilüberdeckung besitzt, indem Sie zeigen, dass keine der Mengen  $U_{1/\sqrt{2}}(x)$  mindestens zwei "kanonische Einheitsvektoren"  $e_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , enthält, wobei  $e_n(j) = \delta_{n,j}$  (Kronecker-Delta). [10 Punkte]

#### Lösung

Angenommen,  $e_n, e_m \in U_{1/\sqrt{2}}(x) \cap K$  für ein  $x \in K$ , dann gilt nach der Dreiecksungleichung  $\|e_n - e_m\|_2 < \sqrt{2}$ . Da für  $n \neq m$  aber  $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$  ist, folgt  $n = m$ . Jede  $K$  überdeckende Teilüberdeckung von  $U_{1/\sqrt{2}}(x)$  hat somit mindestens die Mächtigkeit von  $\mathbb{N}$ , d. h. ist insbesondere nicht endlich. Somit ist  $K$  nicht kompakt.

- 7.6** Zeigen Sie, dass eine Teilmenge  $N \subseteq M$  eines halbmétrischen Raums  $(M, d)$  genau dann totalbeschränkt ist, wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  eine endliche Teilmenge  $E \subseteq N$  gibt, so dass gilt:

$$N \subseteq \bigcup_{x \in E} U_\epsilon^d(x).$$

*Hinweis:* Anders als in der Definition der Totalbeschränktheit wird hier  $E \subseteq N$  statt  $E \subseteq M$  gefordert. [10 Punkte]

#### Lösung

„ $\Leftarrow$ “ ist klar. Für „ $\Rightarrow$ “ fixiere  $\epsilon > 0$ . Sei  $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ ,  $N_{\epsilon'} := \{m \in M \mid \exists n \in N : d(n, m) < \epsilon'\}$ ,  $E$  eine zu  $\epsilon'$  gehörende endliche Menge und  $E' := E \cap N_{\epsilon'}$ ,  $E'' := E' \setminus (E \cap N)$ . Es gilt  $N \subseteq \bigcup_{x \in E'} U_{\epsilon'}^d(x)$ . Wähle für alle  $x \in E''$  ein  $y_x \in U_{\epsilon'}(x) \cap N \neq \emptyset$ . Sei  $E''' := (E \cap N) \cup \{y_x : x \in E''\} \subset N$ . Wir sehen, dass für  $n \in N$  entweder  $n \in \bigcup_{x \in E \cap N} U_{\epsilon'}^d(x)$  oder  $n \in U_{\epsilon'}^d(x)$ ,  $x \in E''$ . Im zweiten Fall folgt aus der Dreiecksungleichung  $n \in U_\epsilon^d(y_x)$ . Zusammen erhalten wir für  $n \in N$  beliebig:  $n \in \bigcup_{z \in E'''} U_\epsilon^d(z)$ .