

Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze

Bachelorarbeit
im Studiengang Mathematik

vorgelegt von
Tobias Severa

Betreuer: Herr Priv.-Doz. Dr. Dirk André Deckert
Co-Betreuerin: Frau Dr. Paula Reichert

Ablieferungstermin:

T.Severa@campus.lmu.de
Matrikelnr.: 12306268

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist es, dem Leser einen Überblick über Kurt Gödels Unvollständigkeitssätze zu geben. Dafür werden wir ausgewählte formale Systeme untersuchen. Bei diesen handelt es sich um rein syntaktische Beweisapparate, die es uns erlauben werden, das Beweisen von mathematischen Formeln zu formalisieren ohne dabei Bezug auf die inhaltliche Bedeutung der Formeln zu nehmen. Der erste Unvollständigkeitssatz besagt vereinfacht ausgedrückt, dass jedes nach festen Regeln axiomatisierte formale System, das hinreichend stark ist, um über ein gewisses Maß an Arithmetik zu sprechen, entweder widersprüchlich oder unvollständig ist. Das heißt, entweder finden wir eine Aussage, die beweisbar und widerlegbar ist, oder wir finden eine Aussage, die weder beweisbar noch widerlegbar ist. Der zweite Unvollständigkeitssatz besagt, dass ein solches formales System seine eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen kann. Wir werden den Beweis des ersten Unvollständigkeitssatzes präsentieren, wobei wir uns an Kurt Gödels historischem Argument orientieren. Für den zweiten Unvollständigkeitssatz werden wir lediglich eine mathematisch präzise Formulierung angeben, diesen aber nicht beweisen.

Abkürzungsverzeichnis

d.h.	das heißt
A	Sprache der Arithmetik
PL1	Prädikatenlogik erster Stufe
PL1=	Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit
PA	Peano-Arithmetik
RR	Robinson-Arithmetik
$X \Rightarrow Y$	Aus X folgt Y .
$X \Leftrightarrow Y$	Es gilt X genau dann, wenn Y gilt.
$\mathbb{N}$	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}_{\geq 1}$	$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Formale Systeme	4
2.1	Syntaktik	4
2.2	Semantik	7
2.3	Metaeigenschaften	9
3	Ein formales System der Arithmetik	10
3.1	Die Prädikatenlogik erster Stufe	10
3.1.1	Metatheoreme	11
3.1.2	Elementare Theoreme	13
3.1.3	Einführungs- und Eliminationsregeln	16
3.2	Die Peano-Arithmetik	19
4	Primitiv-rekursive Funktionen	22
4.1	Darstellbarkeit	24
4.1.1	Basisfälle	25
4.1.2	Komposition	27
4.1.3	Primitive-Rekursion	28
5	Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze	38
5.1	Arithmetisierung der Syntax	38
5.2	Der erste Unvollständigkeitssatz	40
5.3	Verschärfungen des ersten Unvollständigkeitssatzes	43
5.4	Der zweite Unvollständigkeitssatz	45
5.5	„Ignoramus et ignorabimus“ oder „Wir werden wissen“?	46
	Literatur	48
	Eigenständigkeitserklärung	49

1 Einleitung

Bei den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen handelt es sich wohl um eines der erstaunlichsten Resultate der mathematischen Logik. Es fällt in eine Zeit, in der man gerade erst damit begonnen hatte, die Mathematik auf einem präzise formulierten Fundament aufzubauen. So entstanden damals die ersten Werke, welche das Ziel verfolgten die gesamte Mathematik auf einigen wenigen Grundannahmen (Axiomen) aufzubauen. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts waren wohl die *Principia Mathematica* von Bertrand Russell und Alfred North Whitehead (Whitehead und Russell 1910–1913) sowie die *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I* (Zermelo 1908) von Ernst Zermelo und *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre* von Adolf Abraham Halevi Fraenkel (Fraenkel 1922) die einflussreichsten Arbeiten. Zentral für diese Werke ist eine Präzisierung des Beweisbegriffs. David Hilbert, einer der führenden Mathematiker jener Zeit, fasste diesen Begriff folgendermaßen:

„Der Grundgedanke meiner Beweistheorie ist folgender: Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so dass die eigentliche Mathematik oder die Mathematik im engeren Sinne zu einem Bestande an Formeln wird. Diese unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der Mathematik nur dadurch, dass außer den gewöhnlichen Zeichen noch die logischen Zeichen, insbesondere die für „folgt“ ($\rightarrow$) und für „nicht“ ($\neg$) darin vorkommen. Gewisse Formeln, die als Bausteine des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muss; er besteht aus Schlüssen vermöge des Schlusschemas

$$\frac{\mathfrak{G} \quad \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}_1$$

wo jedesmal die Prämissen, d.h. die betreffenden Formeln $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{T}$ jede entweder ein Axiom ist bzw. direkt durch Einsetzung aus einem Axiom entsteht oder mit der Endformel $\mathfrak{T}$ eines Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweise vorkommt, bzw. durch Einsetzung aus einer solchen Endformel entsteht. Eine Formel soll beweisbar heißen, wenn sie entweder ein Axiom ist bzw. durch Einsetzen aus einem Axiom entsteht oder die Endformel eines Beweises ist.“ (Hilbert 1922 S.151-152)

Unter der Führung David Hilberts waren viele Mathematiker der festen Überzeugung, man könne mit solchen Beweissystemen (formalen Systemen) jede mathematische Aussage eindeutig entscheiden. Das heißt für jede mathematische Aussage X könne man entweder X oder nicht X beweisen. Das zugrunde liegende System sollte

¹Wenn $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{T}$ gelten, können wir $\mathfrak{T}$ folgern.

1 Einleitung

natürlich widerspruchsfrei sein.² Ziel war es, ein solches formales System durch einen Widerspruchsfreiheitsbeweis abzusichern. Hilbert beschreibt dies wie folgt:

„Zu der eigentlichen so formalisierten Mathematik kommt eine gewissermaßen neue Mathematik, eine Metamathematik, die zur Sicherung jener notwendig ist, in der - im Gegensatz zu den rein formalen Schlussweisen der eigentlichen Mathematik - das inhaltliche Schließen zur Anwendung kommt, aber lediglich zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome. In dieser Metamathematik wird mit den Beweisen der eigentlichen Mathematik operiert und diese letzteren bilden selbst den Gegenstand der inhaltlichen Untersuchung.“(Hilbert 1922, S.153)

Den festen Glauben an dieses Vorhaben macht Hilbert in einer Radioansprache aus dem Jahr 1930 deutlich. In dieser bezieht er sich auf die wissenschaftsphilosophische Position des Physiologen und theoretischen Mediziners Emil du Bois-Reymond, welcher 1872 in seinem Vortrag auf der 45. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte folgendes sagte:

„In Bezug auf die Rätsel der Körperwelt ist der Naturforscher längst gewöhnt, mit männlicher Entsagung sein ‚Ignoramus‘³ auszusprechen. Im Rückblick auf die [durch]laufene siegreiche Bahn, trägt ihn dabei das stille Bewusstsein, dass, wo er jetzt nicht weiß, er wenigstens unter Umständen wissen könnte, und dereinst vielleicht wissen wird. In Bezug auf das Rätsel aber, was Materie und Kraft seien, und wie sie zu denken vermögen, muss er ein für alle mal zu dem viel schwerer abzugebenden Wahrspruch sich entschließen: ‚Ignorabimus!‘⁴“ (Bois-Reymond 1872)

Hilbert findet in seiner Ansprache deutliche Worte für diese Position:

„Wir dürfen nicht denen glauben, die heute mit philosophischer Miene und überlegenem Tone den Kulturuntergang prophezeien und sich in dem Ignorabimus gefallen. Für uns gibt es kein Ignorabimus, und meiner Meinung nach auch für die Naturwissenschaft überhaupt nicht. Statt des törichtigen Ignorabimus heiße im Gegenteil unsere Losung: Wir müssen wissen. Wir werden wissen.“(Hilbert 2014)

Der Traum von einem Beweissystem (formalen System), welches zugleich widerspruchsfrei und für welches jede mathematische Aussage entscheidbar ist, platzt jedoch schon ein Jahr später. Ein damals junger Logiker namens Kurt Gödel veröffentlichte nämlich seine Arbeit *"Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I"*. Sie beginnt mit den folgenden Worten:

„Die Entwicklung der Mathematik in der Richtung zu größerer Exaktheit hat bekanntlich dazu geführt, dass weite Gebiete von ihr formalisiert wurden, in der Art, dass das Beweisen nach einigen wenigen mechanischen Regeln vollzogen werden kann. Die umfassendsten derzeit aufgestellten formalen Systeme sind das System der Principia Mathematica (PM) einerseits, das Zermelo-Fraenkelsche (von J. v. Neumann

²In widersprüchlichen Systemen (in denen wir in gewohnter Weise über Mathematik sprechen können) ist jede Aussage beweisbar.

³Wir wissen nicht.

⁴Wir werden nicht wissen!

1 Einleitung

weiter ausgebildete) Axiomensystem der Mengenlehre andererseits. Diese beiden Systeme sind so weit, dass alle heute in der Mathematik angewendeten Beweismethoden in ihnen formalisiert, d.h. auf einige wenige Axiome und Schlussregeln zurückgeführt sind. Es liegt daher die Vermutung nahe, dass diese Axiome und Schlussregeln dazu ausreichen, alle mathematischen Fragen, die sich in den betreffenden Systemen überhaupt formal ausdrücken lassen, auch zu entscheiden. Im folgenden wird gezeigt, dass dies nicht der Fall ist, sondern dass es in den beiden angeführten Systemen sogar relativ einfache Probleme aus der Theorie der gewöhnlichen ganzen Zahlen gibt, die sich aus den Axiomen nicht entscheiden lassen. Dieser Umstand liegt nicht etwa an der speziellen Natur der aufgestellten Systeme, sondern gilt für eine sehr weite Klasse formaler Systeme, zu denen insbesondere alle gehören, die aus den beiden angeführten durch Hinzufügen endlich vieler Axiome entstehen, vorausgesetzt, dass durch die hinzugefügten Axiome keine falschen Sätze [...] beweisbar werden.“ (Gödel 1931 S.173-174)

2 Formale Systeme

Wir beginnen zunächst damit, den zuvor informell beschriebenen Begriff des formalen Systems zu präzisieren.

2.1 Syntaktik

Wir entnehmen nachfolgende Definition aus Mendelson 2015 S.53 Kapitel 2.2.

Definition 2.1 (Sprache). Eine Sprache $\mathcal{L}$ enthält die folgenden Symbole:

1. Die Junktoren $\neg$ und $\rightarrow$ sowie das Allquantorzeichen $\forall$
2. Satzzeichen: die linke Klammer „(“, die rechte Klammer „)“ sowie das Komma „“,
3. Abzählbar viele individuelle Variablen $x_1, x_2, \dots$
4. Eine endliche oder abzählbare, möglicherweise leere Menge von Funktionssymbolen
5. Eine endliche oder abzählbare, möglicherweise leere Menge von Konstantensymbolen
6. Eine nichtleere Menge von Relationssymbolen (Prädikatensymbolen)

Wir entnehmen die nachfolgenden Definitionen aus Batzoglou 2024 S. 3-9 Teil I Kapitel 1.

Definition 2.2 (Die Sprache der Arithmetik). Die Sprache der Arithmetik A enthält zusätzlich zu den Junktoren, Satzzeichen und Variablen folgende Symbole:

1. Das einstellige Funktionssymbol S , die zweistelligen Funktionssymbole $\dot{+}$ und $\dot{\times}$
2. Das Konstantensymbol $\bar{0}$
3. Das zweistellige Relationssymbol $\doteq$

Bemerkung 2.3. Wir nutzen die punktierte Notation, um zwischen Symbolen in A und der gewöhnlichen Addition/Multiplikation/Gleichheit besser unterscheiden zu können. Das einstellige Funktionssymbol S wird durch die gewöhnliche Nachfolgerfunktion (Englisch successor) motiviert.

Definition 2.4 (Term). Ein *Term* wird rekursiv als eines der folgenden Objekte definiert:

1. eine Konstante,

2 Formale Systeme

2. eine Variable,
3. $f(t_1, \dots, t_k)$, wobei f ein Funktionssymbol der Stelligkeit k ist und $t_1, \dots, t_k$ Terme sind.

Definition 2.5 (Formel). Eine *Formel* ist rekursiv definiert als eines der folgenden Objekte:

1. eine Grundformel $r(t_1, \dots, t_k)$, wobei r ein Relationssymbol der Stelligkeit k ist und $t_1, \dots, t_k$ Terme sind,
2. $\varphi \rightarrow \psi$, wobei φ und ψ *Formeln* sind,
3. $\neg\varphi$, wobei φ eine *Formel* ist,
4. $\forall x \varphi$, wobei x eine Variable ist und φ eine *Formel* ist.

Notation 2.6. Für Terme t_1, t_2 schreiben wir $t_1 \doteq t_2$ anstelle von $\doteq(t_1, t_2)$.

Notation 2.7. Klammern werden nach Bedarf verwendet, um die Reihenfolge der oben angegebenen rekursiven Schritte zur Bildung von Formeln zu verdeutlichen. Es gelten die üblichen Bindungsstärken welche wie folgt gegeben sind:

$$\neg, \rightarrow, \forall$$

Die Bindungsstärke soll als von links nach rechts abnehmend verstanden werden.

Beispiel 2.8. Folgende Ausdrücke sind Formeln in A :

$$\begin{aligned} &\neg\forall x (S(x) \doteq \bar{0}) \\ &\forall x \forall y (S(x) \doteq S(y) \rightarrow x \doteq y) \\ &\forall x (S(x) \doteq \bar{0}) \\ &S(S(S(\bar{0}))) \doteq \bar{0} \end{aligned}$$

Notation 2.9. Um die Übersichtlichkeit nachfolgender Beweise zu verbessern, definieren wir die üblichen logischen Symbole

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \psi &:= \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \\ \varphi \vee \psi &:= \neg\varphi \rightarrow \psi, \\ \varphi \leftrightarrow \psi &:= \neg((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)), \\ \exists x \varphi(x) &:= \neg\forall x \neg\varphi(x), \\ \exists!x \varphi(x) &:= \exists x (\varphi(x) \wedge \forall y (\varphi(y) \rightarrow y \doteq x)), \end{aligned}$$

sowie das Relationssymbol

$$x \dot{<} y := \exists z (S(x \dot{+} z) \doteq y),$$

und den beschränkten Quantor

$$\forall x \dot{<} t \varphi(x) := \forall x (x \dot{<} t \rightarrow \varphi(x)),$$

wobei φ und ψ Formeln, t ein Term und x eine Variable in A seien.

2 Formale Systeme

Definition 2.10 (freie/gebundene Variable). Eine Variable x kommt *frei* in einer Formel φ vor, wenn sie außerhalb des Geltungsbereichs eines Quantors $\forall x$ auftritt. Wir schreiben dann $\varphi(x)$. Sie ist *gebunden*, wenn sie innerhalb des Geltungsbereichs eines Quantors $\forall x$ auftritt. Eine Formel, die keine freien Variablen enthält, bezeichnen wir als geschlossen.

Definition 2.11 (Verallgemeinerung einer Formel). Gegeben sei eine Formel φ . Eine *Verallgemeinerung* von φ ist jede Formel der Form

$$\forall y_1 \cdots \forall y_n \varphi,$$

wobei $n \geq 0$ gilt und $y_1, \dots, y_n$ beliebige Variablen der Sprache sind.

Bemerkung 2.12. Im Falle $n = 0$ ist eine Formel φ eine Verallgemeinerung von sich selbst.

Definition 2.13 (Universelle Schließung). Gegeben sei eine Formel

$$\varphi(x_1, \dots, x_k)$$

mit freien Variablen $x_1, \dots, x_k$. Eine *universelle Schließung* von φ , auch *universelle Verallgemeinerung* von φ genannt, ist jede Verallgemeinerung von φ , in der $x_1, \dots, x_k$ gebunden sind.

Bemerkung 2.14. Im weiteren Verlauf bezeichnen wir mit *universelle Schließung* von $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ nur solche, die ausschließlich Quantoren verwenden, deren Wirkungsbereiche die $x_1, \dots, x_k$ sind.

Definition 2.15 (Variablensubstitution). Sei $\varphi(x)$ eine Formel mit der freien Variablen x und t ein Term. Dann bezeichnet

$$\varphi(t) := \varphi(x)[t/x]$$

die Formel, die aus φ entsteht, indem alle freien Vorkommen von x durch t ersetzt werden.

Definition 2.16 (Substituierbarkeit). Ein Term t ist in einer Formel φ für eine Variable x *substituierbar* (auch: *frei für x*), wenn keine Variable y , die in t auftritt, in φ durch einen Quantor innerhalb eines Bereichs gebunden wird, in dem x frei vorkommt.

Beispiel 2.17. Sei $\varphi := (x \doteq \bar{0}) \vee (y \doteq S(\bar{0})) \vee \exists y (x < y)$.

Dann ist $t := y$ nicht substituierbar für x . Hier tritt eine Variablenkollision auf: die Variable y erscheint in den ersten beiden Teiltermen frei, wird im dritten Teilterm jedoch durch den Existenzquantor gebunden.

Definition 2.18 (Formales System). Ein *formales System* S besteht aus den folgenden Bestandteilen:

1. einer *Sprache* $\mathcal{L}$, die die Symbole, die Terme und Formeln festlegt,
2. einer *Menge von Axiomen* d. h. ausgezeichnete Formeln der Sprache,

3. einer Menge von *Schlussregeln*, die angeben, wie aus gegebenen Formeln neue Formeln abgeleitet werden können.

Definition 2.19 (Beweis). Es sei L ein formales System. Ein *Beweis* einer Formel φ_k ist eine endliche Liste von Formeln

$$[\varphi_1, \dots, \varphi_k],$$

wobei jedes φ_i mit $1 \leq i \leq k$ entweder ein Axiom ist oder aus vorhergehenden Formeln der Liste mittels einer Schlussregel abgeleitet wird

Eine Formel φ heißt *Theorem* (oder *in L ableitbar*), falls es einen Beweis

$$[\varphi_1, \dots, \varphi_k = \varphi]$$

für φ gibt. In diesem Fall schreiben wir $L \vdash \varphi$. Falls φ kein Theorem von L ist schreiben wir auch $L \not\vdash \varphi$.

Notation 2.20. Wenn eindeutig ist über welches formale System gesprochen wird schreiben wir auch $\vdash \varphi$ anstelle von $L \vdash \varphi$.

2.2 Semantik

Der nun folgende Abschnitt dient hauptsächlich dazu, uns einen vollständigen Überblick über formale Systeme zu geben und wird prinzipiell nicht benötigt, um den ersten Unvollständigkeitssatz zu beweisen oder zu verstehen.

Bis jetzt haben wir formale Systeme auf einer rein syntaktischen Ebene betrachtet, d.h. wir haben Regeln für eine bloße Symbol- und Zeichenmanipulation beschrieben. Wenn wir aber über Mathematik sprechen wollen, müssen wir diesen Symbol- und Zeichenfolgen eine Bedeutung zuweisen.

Folgende Definitionen sind aus Ziegler 2010 S. 2-9 Kapitel I.1 und I.2 entnommen.

Definition 2.21 ($\mathcal{L}$ -Struktur). ¹ Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache. Eine $\mathcal{L}$ -Struktur ist ein Paar

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}, (Z^{\mathcal{A}})_{Z \in \mathcal{L}}),$$

wobei gilt, dass:

- $\mathcal{A} \neq \emptyset$ die *Grundmenge* von $\mathcal{A}$ ist,
- $Z^{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$, falls Z ein Konstantensymbol ist,
- $Z^{\mathcal{A}}: \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$, falls Z ein n -stelliges Funktionssymbol ist,
- $Z^{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}^n$, falls Z ein n -stelliges Relationssymbol ist.

¹In der Literatur wird eine $\mathcal{L}$ -Struktur auch häufig bezeichnet als 'Interpretation von $\mathcal{L}$ ' (vergleiche Mendelson 2015 S.54)

2 Formale Systeme

Beispiel 2.22 (A -Struktur). Die klassische A -Struktur (Interpretation von A) bezüglich der Sprache der Arithmetik A ist gegeben durch:

$$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, (Z^{\mathcal{N}})_{Z \in A}),$$

wobei gilt:

- $\bar{0}^{\mathcal{N}} = 0 \in \mathbb{N}$,
- $S^{\mathcal{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$ (Nachfolgerfunktion),
- $+$ ^{$\mathcal{N}$} : $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, (m, n) \mapsto m + n$ (übliche Addition),
- $\times$ ^{$\mathcal{N}$} : $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, (m, n) \mapsto m \times n$ (übliche Multiplikation),
- $\doteq^{\mathcal{N}} = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (übliche Gleichheitsrelation).

Definition 2.23 (Belegung). Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$ -Struktur. Eine *Belegung* ist eine Funktion

$$\beta: \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \longrightarrow A,$$

die jeder Variablen $x_1, x_2, x_3, \dots$ ein Element der Grundmenge A von $\mathcal{A}$ zuordnet.

Definition 2.24 (Auswertung von Termen). Seien $\mathcal{L}$ eine Sprache, $t, t_1, \dots, t_n$ Terme in $\mathcal{L}$ und c eine Konstante in $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$ -Struktur und β eine Belegung. Dann definieren wir die Auswertung $t^{\mathcal{A}}[\beta]$ rekursiv wie folgt:

$$\begin{aligned} x^{\mathcal{A}}[\beta] &= \beta(x), \\ c^{\mathcal{A}}[\beta] &= c^{\mathcal{A}}, \\ f(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{A}}[\beta] &= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[\beta], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[\beta]). \end{aligned}$$

Wir können nun den Wahrheitsbegriff für formale Systeme definieren.

Definition 2.25.² Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, welche die zweistellige Relation $\doteq$ enthält, und $\mathcal{A}$ eine Interpretation dieser mit Grundmenge $\mathcal{A}$. Außerdem seien β eine Belegung, φ, ψ, χ Formeln, R eine Relation und $t_1, \dots, t_n$ Terme in $\mathcal{L}$.

Wir definieren $\mathcal{A} \models \varphi[\beta]$ (lies „ φ trifft in $\mathcal{A}$ unter β zu“ oder „ φ ist in $\mathcal{A}$ unter der Belegung β wahr“³) wie folgt rekursiv:

²In Ziegler 2010 wird eine Sprache mit den nativen logischen Symbolen $\exists, \wedge, \neg$ definiert. Das ist ebenfalls möglich, da wir aus diesen alle üblichen logischen Symbole definieren können. Die Definition der Relation $\models$ wurde unserer Definition der Sprache entsprechend angepasst.

³Man beachte, dass dieser Wahrheitsbegriff stets relativ zu einer Struktur und zu einer Belegung zu verstehen ist. Es soll hier also kein absoluter Wahrheitsbegriff beschrieben werden. Der Wahrheitsbegriff selbst kann zudem (für die meisten formalen Systeme) nur auf der Metaebene (vergleiche Kapitel 2.3) definiert werden. Er ist für hinreichend starke formale Systeme innerhalb des Systems undefinierbar (vergleiche Batzoglou 2024 S.43 Teil I Kapitel 3.2 Theorem 3.3 Tarskis Undefinierbarkeitstheorem).

- (1) $\mathcal{A} \models (t_1 \doteq t_2)[\beta] \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{A}}[\beta] = t_2^{\mathcal{A}}[\beta]$,
- (2) $\mathcal{A} \models R(t_1, \dots, t_n)[\beta] \Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}[\beta], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[\beta]) \in R^{\mathcal{A}}$,
- (3) $\mathcal{A} \models \neg\psi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \psi[\beta]$,
- (4) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow \chi)[\beta] \Leftrightarrow (\mathcal{A} \models \psi[\beta] \Rightarrow \mathcal{A} \models \chi[\beta])$,
- (5) $\mathcal{A} \models \forall x \psi[\beta] \Leftrightarrow$ Für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt : $\mathcal{A} \models \psi[\beta_x^a]$.

Dabei ist die modifizierte Belegung $\beta_x^a: \{x_1, x_2, \dots\} \rightarrow \mathcal{A}$ definiert durch

$$\beta_x^a(y) = \begin{cases} \beta(y), & \text{falls } y \neq x, \\ a, & \text{falls } y = x. \end{cases}$$

2.3 Metaeigenschaften

Wir werden in dieser Arbeit einerseits innerhalb formaler Systeme argumentieren, indem wir Theoreme aus den Axiomen mittels der Schlussregeln herleiten. Andererseits können wir ein solches formales System auch von außen betrachten und mit klassischen uns bekannten Beweismethoden untersuchen. Wir wollen daher unterscheiden zwischen der formalen Ebene (innerhalb des formalen Systems) und der Metaebene (Betrachtung des formalen Systems von außen). Folgende Metaeigenschaften formaler Systeme wären wünschenswert:

Wir entnehmen die folgende Definition aus Hoffmann 2017 S.27 Kapitel 1.3 Definition 1.5.

Definition 2.26 (Metaeigenschaften formaler Systeme).

1. **Widerspruchsfreiheit** ($\not\vdash \varphi$ oder $\not\vdash \neg\varphi$).
Ein formales System heißt widerspruchsfrei, wenn eine Formel niemals gleichzeitig mit ihrer Negation aus den Axiomen abgeleitet werden kann.
2. **Negationsvollständigkeit** ($\vdash \varphi$ oder $\vdash \neg\varphi$).
Ein formales System heißt negationsvollständig, wenn für jede Formel die Formel selbst oder deren Negation aus den Axiomen abgeleitet werden kann.
3. **Korrektheit** (aus $\vdash \varphi$ folgt $\models \varphi$).
Ein formales System heißt korrekt, wenn jede Formel, die innerhalb des formalen Systems bewiesen werden kann, inhaltlich wahr ist.
4. **Vollständigkeit** (aus $\models \varphi$ folgt $\vdash \varphi$).
Ein formales System heißt vollständig, wenn jede inhaltlich wahre Formel auch innerhalb des formalen Systems bewiesen werden kann.

Von besonderem Interesse für diese Arbeit werden die Eigenschaft der Widerspruchsfreiheit und der Negationsvollständigkeit sein.

3 Ein formales System der Arithmetik

Wir wollen in diesem Kapitel ein formales System beschreiben und untersuchen mit dem wir auf sehr einfache Art und Weise über Arithmetik sprechen können. Wir beginnen mit dem logischen Gerüst.

3.1 Die Prädikatenlogik erster Stufe

Die Prädikatenlogik erster Stufe ist das logische Fundament einer sehr großen Klasse formaler Systeme. Insbesondere solcher, die man nutzen kann, um über Arithmetik zu sprechen.

Wir entnehmen nachfolgende Definition aus Batzoglou 2024 S.6-8 Teil I Kapitel 1.1.

Definition 3.1 (Prädikatenlogik erster Stufe). Die *Prädikatenlogik erster Stufe* PL1 besteht aus:

1. **Sprache:** Einer Sprache $\mathcal{L}$
2. **Axiome:** Für alle Formeln φ, ψ, χ in $\mathcal{L}$ ist jede Verallgemeinerung der folgenden Formeln ein Axiom:

(L1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$.

(L2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$.

(L3) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$.

(L4) $(\forall x (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$, wobei x eine beliebige Variable ist.

(L5) $\varphi \rightarrow \forall x \varphi$, wobei x in φ nicht frei vorkommt.

(L6) $(\forall x \varphi(x)) \rightarrow \varphi(t)$, wobei t ein Term ist, der für x in φ substituierbar ist.

3. **Schlussregel:** Als einzige Schlussregel dient der *Modus Ponens* (MP):

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} . 1$$

Nehmen wir zusätzlich folgende Axiome hinzu und fordern wir, dass die zugehörige Sprache das zweistellige Relationszeichen $\doteq$ beinhaltet, so bezeichnen wir das nach diesem Schema definierte formale System als *Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit* PL1 $_{=}$:

¹Wenn $\vdash \varphi$ und $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ gelten, so dürfen wir $\vdash \psi$ schließen.

4. **Axiome der Gleichheit:** Jede Verallgemeinerung der folgenden Formeln ist ein Axiom:

(E1) Reflexivität: $x \doteq x$ für jede Variable x .

(E2) Funktionssubstitution: $x \doteq y \rightarrow f(\dots, x, \dots) \doteq f(\dots, y, \dots)$, für beliebige Variablen x, y und jede Funktion f in $\mathcal{L}$.

(E3) Formelsubstitution: $x \doteq y \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi')$, wobei x, y Variablen sind, y in φ nicht vorkommt und φ' aus φ hervorgeht, indem man eine beliebige Anzahl von Vorkommen von x durch y ersetzt.

3.1.1 Metatheoreme

Da Beweise in PL1 sehr schnell beliebig komplex werden können, leiten wir zunächst zwei Metatheoreme her, welche unsere nachfolgende Arbeit erleichtern werden. Als Vorbereitung beweisen wir eine kleine Hilfsaussage.

Proposition 3.2. *Es gilt $\text{PL1} \vdash \varphi \rightarrow \varphi$.*

Der Beweis wird ohne Änderung aus Batzoglou 2024 S.10 Teil I Kapitel 1.2 Lemma 1.1 entnommen.

Beweis.1: $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ (Axiom (L1))

2: $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$ (Axiom (L2))

3: $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ (aus 1, 2 durch MP)

4: $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ (Axiom (L1))

5: $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ (aus 3, 4 durch MP)

□

Bemerkung 3.3. Wenn wir Beweise auf der Metaebene führen, schreiben wir die logischen Symbole mit deutschen Wörtern aus.

Notation 3.4. Für formale Systeme S und eine Menge von Formeln Φ bezeichnen wir mit $S \cup \Phi$ ein formales System, welches durch hinzunahme der Formeln in Φ als Axiome zu S entsteht. Abkürzend schreiben wir in Beweisen anstelle von $S \cup \Phi \vdash \varphi$ auch $\Phi \vdash \varphi$ oder für mehrere Formeln beziehungsweise Mengen von Formeln $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vdash \varphi$.

Bemerkung 3.5. Es sei S ein formales System und Φ eine Menge von Formeln. Dann gilt $S \vdash \varphi \Rightarrow S \cup \Phi \vdash \varphi$ für alle Formeln φ .

Satz 3.6 (Generalisierungstheorem). *Sei Φ eine (möglicherweise leere) Menge von Formeln, die keine freie Instanz der Variablen x enthält, und gelte $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \varphi$. Dann gilt*

$$\text{PL1} \cup \Phi \vdash \forall x \varphi.$$

3 Ein formales System der Arithmetik

Wir übernehmen den Beweis ohne wesentliche Änderung aus Batzoglou 2024 Kapitel 1.3 Theorem 1.1.

Beweis. Wir zeigen, dass für alle Beweise $[\varphi_1, \dots, \varphi_k = \varphi]$

$$\text{PL1} \cup \Phi \vdash \varphi \Rightarrow \text{PL1} \cup \Phi \vdash \forall x \varphi \text{ gilt.}$$

Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über die Beweislänge k .

Induktionsanfang: Es gelte $k = 1$. Dann ist φ entweder (i) *ein Axiom* oder (ii) $\varphi \in \Phi$.

(i) $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \forall x \varphi$ nach Definition der Axiome.

(ii) **1:** $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \varphi$ (Annahme: $\varphi \in \Phi$)

2: $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \varphi \rightarrow \forall x \varphi$ (Axiom (L5))

3: $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \forall x \varphi$ (aus 1,2 durch MP)

Induktionsschritt: Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Die Behauptung gelte nun für alle Formeln mit Beweisen der Länge $\leq k$. Sei also nun ein Beweis mit Länge $k + 1$ gegeben. Betrachte den Beweisschritt $k + 1$. Dann ist φ entweder (i) *ein Axiom oder* $\varphi \in \Phi$ oder (ii) φ *entsteht durch MP*

(i) analog zu Induktionsanfang.

(ii) Es existieren $i, j \leq n$ und Formeln φ_i, φ_j , so dass $\varphi_j = (\varphi_i \rightarrow \varphi)$, sowie $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \varphi_i$ und $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \varphi_j$ gelten. Es folgt:

1: $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \forall x \varphi_i$ (Induktionsannahme)

2: $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \forall x (\varphi_i \rightarrow \varphi)$ (Induktionsannahme)

3: $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \forall x (\varphi_i \rightarrow \varphi) \rightarrow (\forall x \varphi_i \rightarrow \forall x \varphi)$ (Axiom (L4))

4: $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \forall x \varphi_i \rightarrow \forall x \varphi$ (aus 2,3 durch MP)

5: $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \forall x \varphi$ (aus 1,4 durch MP)

□

Satz 3.7 (Deduktionstheorem). *Sei Φ eine (möglicherweise leere) Menge von Formeln und seien ψ, φ beliebige Formeln. Gilt*

$$\text{PL1} \cup \Phi \cup \{\psi\} \vdash \varphi,$$

so folgt

$$\text{PL1} \cup \Phi \vdash \psi \rightarrow \varphi.$$

Wir entnehmen den nachfolgenden Beweis ohne wesentliche Änderung aus Batzoglou 2024 Kapitel 1.3 Theorem 1.2.

3 Ein formales System der Arithmetik

Beweis. Wir zeigen, dass für alle Beweise $[\varphi_1, \dots, \varphi_k = \varphi]$

$$\text{PL1} \cup \Phi \cup \{\psi\} \vdash \varphi \Rightarrow \text{PL1} \cup \Phi \vdash \psi \rightarrow \varphi \text{ gilt.}$$

Wie in Satz 3.6 beweisen wir die Aussage durch vollständige Induktion über die Beweislänge k .

Induktionsanfang: Es gelte $k = 1$. Dann ist φ entweder (i) *ein Axiom oder* $\varphi \in \Phi$ oder es gilt (ii) $\varphi = \psi$.

- (i) **1:** $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \varphi$ (Annahme: $\varphi \in \Phi$ oder φ ist ein Axiom)
- 2:** $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ (Axiom (L1))
- 3:** $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \psi \rightarrow \varphi$ (aus 1,2 durch MP)
- (ii) **1:** $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \psi \rightarrow \varphi$ (Proposition 3.2 und Annahme $\varphi = \psi$)

Induktionsschritt: Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Die Behauptung gelte nun für alle Formeln mit Beweisen der Länge $\leq k$. Sei also ein Beweis mit Länge $k + 1$ gegeben. Betrachte den Beweisschritt $k + 1$. Dann ist φ entweder (i) *ein Axiom oder* $\varphi \in \Phi$ oder $\varphi = \psi$ oder (ii) φ *entsteht durch MP*.

- (i) Analog zu Induktionsanfang.
- (ii) Es existieren $i, j \leq n$ und Formeln φ_i, φ_j , so dass $\varphi_j = (\varphi_i \rightarrow \varphi)$, sowie $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \varphi_i$ und $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \varphi_j$ gelten. Es folgt:
 - 1:** $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \psi \rightarrow \varphi_i$ (Induktionsannahme)
 - 2:** $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \psi \rightarrow (\varphi_i \rightarrow \varphi)$ (Induktionsannahme)
 - 3:** $\text{PL1} \cup \Phi \vdash (\psi \rightarrow (\varphi_i \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\psi \rightarrow \varphi_i) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$ (Axiom (L2))
 - 4:** $\text{PL1} \cup \Phi \vdash (\psi \rightarrow \varphi_i) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ (aus 2,3 durch MP)
 - 5:** $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \psi \rightarrow \varphi$ (aus 1,4 durch MP)

□

3.1.2 Elementare Theoreme

Wir beweisen nun einige simple logische Aussagen in PL1 und in PL1₌. Die Herleitung dieser Resultate geschieht ausschließlich unter der Verwendung der Axiome und Regeln in PL1 und PL1₌, sowie der Anwendung des Deduktions- und Generalisierungstheorems.

Lemma 3.8 (Eigenschaften der Gleichheitsrelation). *Für alle Variablen x, y, z gilt:*

(ES) $\text{PL1}_= \vdash x \doteq y \rightarrow y \doteq x$.

(ET) $\text{PL1}_= \vdash x \doteq y \rightarrow (y \doteq z \rightarrow x \doteq z)$.

3 Ein formales System der Arithmetik

Wir entnehmen den Beweis für **(ES)** ohne Änderung aus Batzoglou 2024 Kapitel 1.1. Der Beweis für **(ET)** wurde eigenständig erarbeitet.

Beweis. Seien also Variablen x, y, z gegeben.

(ES)

$$\mathbf{1:} \vdash x \doteq y \rightarrow (x \doteq x \rightarrow y \doteq x) \quad (\text{Axiom (E3)})$$

$$\mathbf{2:} \vdash (x \doteq y \rightarrow (x \doteq x \rightarrow y \doteq x)) \rightarrow ((x \doteq y \rightarrow x \doteq x) \rightarrow (x \doteq y \rightarrow y \doteq x)) \quad (\text{Axiom (L2)})$$

$$\mathbf{3:} \vdash (x \doteq y \rightarrow x \doteq x) \rightarrow (x \doteq y \rightarrow y \doteq x) \quad (\text{aus 1,2 durch MP})$$

$$\mathbf{4:} \vdash x \doteq x \rightarrow (x \doteq y \rightarrow x \doteq x) \quad (\text{Axiom (L1)})$$

$$\mathbf{5:} \vdash x \doteq x \quad (\text{Axiom (E1)})$$

$$\mathbf{6:} \vdash x \doteq y \rightarrow x \doteq x \quad (\text{aus 4,5 durch MP})$$

$$\mathbf{7:} \vdash x \doteq y \rightarrow y \doteq x \quad (\text{aus 3,6 durch MP})$$

(ET)

$$\mathbf{1:} x \doteq y \vdash x \doteq y \quad (\text{Annahme})$$

$$\mathbf{2:} x \doteq y \vdash x \doteq y \rightarrow y \doteq x \quad (\text{ES})$$

$$\mathbf{3:} x \doteq y \vdash y \doteq x \quad (\text{aus 1, 2 durch MP})$$

$$\mathbf{4:} x \doteq y \vdash y \doteq x \rightarrow ((y \doteq z) \rightarrow (x \doteq z)) \quad (\text{Axiom (E3)})$$

$$\mathbf{5:} x \doteq y \vdash (y \doteq z) \rightarrow (x \doteq z) \quad (\text{aus 3, 4 durch MP})$$

$$\mathbf{6:} \vdash x \doteq y \rightarrow (y \doteq z \rightarrow x \doteq z) \quad (\text{Deduktionstheorem})$$

□

Für alle nachfolgenden Beweise in Kapitel 3.1 seien Formeln φ, ψ, χ einer beliebigen Sprache $\mathcal{L}$ gegeben.

Lemma 3.9 (Transitivität der Implikation). *Es gelte $\text{PL1} \vdash \varphi \rightarrow \chi$ und $\text{PL1} \vdash \chi \rightarrow \psi$. Dann folgt*

$$\text{PL1} \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

Der Beweis wird ohne Änderung aus Batzoglou 2024 S.10 Teil I Kapitel 1.2 Lemma 1.2 entnommen.

$$\text{Beweis.} \mathbf{1:} \vdash \varphi \rightarrow \chi \quad (\text{Annahme})$$

$$\mathbf{2:} \vdash \chi \rightarrow \psi \quad (\text{Annahme})$$

$$\mathbf{3:} \vdash (\chi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \quad (\text{Axiom (L1)})$$

$$\mathbf{4:} \vdash \varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi) \quad (\text{aus 2, 3 durch MP})$$

3 Ein formales System der Arithmetik

5: $\vdash (\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$ (Axiom (L2))

6: $\vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (aus 4, 5 durch MP)

7: $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ (aus 1, 6 durch MP)

□

Proposition 3.10. *Es gelten folgende Aussagen:*

(i) PL1 $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

(ii) PL1 $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

(iii) PL1 $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

Der Beweis für (i) wird ohne Änderung und der Beweis für (ii) mit Änderungen ab Schritt 5 aus Batzoglou 2024 Kapitel 1.2 Lemma 1.1 entnommen. Der Beweis für (iii) wurde eigenständig erarbeitet.

Beweis. (i) **1:** $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ (Axiom (L1))

2: $\vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (Axiom (L3))

3: $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (aus 1,2 durch Lemma 3.9)

(ii) **1:** $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$ (aus (i))

2: $\vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi)$ (Axiom (L3))

3: $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi)$ (aus 1, 2 durch Lemma 3.9)

4: $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ (Proposition 3.2)

5: $\vdash (\neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi))$ (Axiom (L2))

6: $\vdash (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi)$ (aus 3,5 durch MP)

7: $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ (aus 4,6 durch MP)

(iii) **1:** $\vdash \neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$ (aus (ii))

2: $\vdash (\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi)$ (Axiom (L3))

3: $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi$ (aus 1,2 durch MP)

□

Lemma 3.11 (Kontraposition). *Es gilt PL1 $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$.*

Der folgende Beweis wurde eigenständig erarbeitet.

Beweis. **1:** $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ (Proposition 3.10 (ii))

2: $\varphi \rightarrow \psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (Deduktionsannahme)

3: $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \psi$ (aus 1,2 durch Lemma 3.9)

3 Ein formales System der Arithmetik

- 4: $\varphi \rightarrow \psi \vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi$ (Proposition 3.10 (iii))
 5: $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$ (aus 3,4 durch Lemma 3.9)
 6: $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ (Axiom (L3))
 7: $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ (aus 5,6 durch MP)
 8: $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ (Deduktionstheorem 3.7)
 $\square$

3.1.3 Einführungs- und Eliminationsregeln

Zuletzt leiten wir noch neue Schlussregeln für die Konjunktion $\wedge$ sowie für den Existenzquantor $\exists$ her. Eine Einführungsregel beschreibt, welche Voraussetzungen notwendig sind, um aus gegebenen Formeln eine neue Formel zu gewinnen, die dann das logische Symbol $\wedge$ oder $\exists$ beinhaltet. Eine Eliminationsregel beschreibt, wie wir aus Formeln der Gestalt $\varphi \wedge \psi$ oder $\exists x \varphi$ Schlussfolgerungen ziehen können.

Lemma 3.12 ($\wedge$ -Elimination). *Es gelte $\text{PL1} \vdash \varphi \wedge \psi$. Dann folgt*

(i) $\text{PL1} \vdash \varphi$ und (ii) $\text{PL1} \vdash \psi$.

Der folgende Beweis wurde eigenständig erarbeitet.

- Beweis.* (i) 1: $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (Proposition 3.10 (i))
 2: $\vdash (\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)) \rightarrow (\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\neg\varphi)$ (Kontraposition 3.11)
 3: $\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\neg\varphi$ (aus 1,2 durch MP)
 4: $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ (Proposition 3.10 (ii))
 5: $\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$ (aus 3,4 durch Lemma 3.9)
 6: $\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (Annahme)
 7: $\vdash \varphi$ (aus 5,6 durch MP)
 (ii) 1: $\vdash \neg\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (Axiom (L1))
 Alle weiteren Schritte analog zu (i).
 $\square$

Lemma 3.13 ($\wedge$ -Einführung). *Es gelte $\text{PL1} \vdash \varphi$ und $\text{PL1} \vdash \psi$. Dann folgt*

$\text{PL1} \vdash \varphi \wedge \psi$.

Der folgende Beweis wurde eigenständig erarbeitet.

- Beweis.* 1: $\vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (Proposition 3.10(ii))
 2: $\neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (Deduktionsannahme)
 3: $\neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \vdash \varphi \rightarrow \neg\psi$ (aus 2,1 durch MP)

3 Ein formales System der Arithmetik

- 4: $\neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \varphi \vdash \varphi$ (Deduktionsannahme)
5: $\neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \varphi \vdash \neg\psi$ (aus 4,3 durch MP)
6: $\varphi \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\psi$ (Deduktionstheorem 3.7)
7: $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\psi)$ (Deduktionstheorem 3.7)
8: $\vdash (\neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi))$ (Axiom (L3))
9: $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi))$ (aus 7,8 durch Lemma 3.9)
10: $\vdash \varphi$ (Annahme)
11: $\vdash \psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (aus 10,9 durch MP)
12: $\vdash \psi$ (Annahme)
13: $\vdash \varphi \wedge \psi$ (aus 12,11 durch MP) $\square$

Proposition 3.14. *Es seien $\psi(x), \varphi$ Formeln und x eine Variable einer beliebigen Sprache $\mathcal{L}$. Außerdem komme x in φ nicht frei vor. Dann gilt*

$$\text{PL1} \vdash \forall x (\varphi \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x \psi(x)).$$

Der folgende Beweis wurde eigenständig erarbeitet.

- Beweis.1:* $\vdash \varphi \rightarrow \forall x \varphi$ (Axiom (L5))
2: $\vdash \forall x (\varphi \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi(x))$ (Axiom (L4))
3: $\forall x (\varphi \rightarrow \psi(x)) \vdash \forall x (\varphi \rightarrow \psi(x))$ (Deduktionsannahme)
4: $\forall x (\varphi \rightarrow \psi(x)) \vdash \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi(x)$ (aus 3,2 durch MP)
5: $\forall x (\varphi \rightarrow \psi(x)), \varphi \vdash \varphi$ (Deduktionsannahme)
6: $\forall x (\varphi \rightarrow \psi(x)), \varphi \vdash \forall x \varphi$ (aus 5,1 durch MP)
7: $\forall x (\varphi \rightarrow \psi(x)), \varphi \vdash \forall x \psi(x)$ (aus 6,4 durch MP)
8: $\forall x (\varphi \rightarrow \psi(x)) \vdash \varphi \rightarrow \forall x \psi(x)$ (Deduktionstheorem 3.7)
9: $\vdash \forall x (\varphi \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x \psi(x))$ (Deduktionstheorem 3.7) $\square$

Lemma 3.15 ($\exists$ -Elimination). *Es sei Φ eine (möglicherweise leere) Menge von Formeln, $\psi, \varphi(x)$ Formeln und x eine Variable einer beliebigen Sprache $\mathcal{L}$. Außerdem komme x weder in Φ noch in ψ frei vor. Des Weiteren gelte $\text{PL1} \cup \Phi \cup \varphi(x) \vdash \psi$ sowie $\text{PL1} \cup \Phi \vdash \exists x \varphi(x)$. Dann folgt*

$$\text{PL1} \cup \Phi \vdash \psi.$$

3 Ein formales System der Arithmetik

Der folgende Beweis wurde eigenständig erarbeitet.

- Beweis.1:** $\varphi(x) \vdash \psi$ (Annahme)
- 2:** $\vdash \varphi(x) \rightarrow \psi$ (Deduktionstheorem 3.7)
- 3:** $\vdash (\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi(x))$ (Kontraposition 3.11)
- 4:** $\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi(x)$ (aus 2,3 durch MP)
- 5:** $\vdash \forall x (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi(x))$ (aus 4 durch Generalisierungstheorem 3.6)
- 6:** $\vdash \forall x (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi(x)) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \forall x \neg\varphi(x))$ (Proposition 3.14)
- 7:** $\vdash \neg\psi \rightarrow \forall x \neg\varphi(x)$ (aus 5,6 durch MP)
- 8:** $\vdash (\neg\psi \rightarrow \forall x \neg\varphi(x)) \rightarrow (\exists x \varphi(x) \rightarrow \neg\neg\psi)$ (Kontraposition 3.11)
- 9:** $\vdash \exists x \varphi(x) \rightarrow \neg\neg\psi$ (aus 7,8 durch MP)
- 10:** $\vdash \neg\neg\psi \rightarrow \psi$ (Proposition 3.10 (ii))
- 11:** $\vdash \exists x \varphi(x) \rightarrow \psi$ (aus 9,10 durch Lemma 3.9)
- 12:** $\vdash \exists x \varphi(x)$ (Annahme)
- 13:** $\vdash \psi$ (aus 12,11 durch MP)

□

Lemma 3.16 ($\exists$ -Einführung). *Es sei t ein für x in $\varphi(x)$ substituierbarer Term bezüglich einer beliebigen Sprache $\mathcal{L}$ und es gelte $\text{PL1} \vdash \varphi(t)$. Dann folgt*

$$\text{PL1} \vdash \exists x \varphi(x).$$

Der folgende Beweis wurde eigenständig erarbeitet.

- Beweis.1:** $\vdash \forall x \neg\varphi(x) \rightarrow \neg\varphi(t)$ (Axiom (L6))
- 2:** $\vdash (\forall x \neg\varphi(x) \rightarrow \neg\varphi(t)) \rightarrow (\neg\neg\varphi(t) \rightarrow \exists x \varphi(x))$ (Kontraposition 3.11)
- 3:** $\vdash \neg\neg\varphi(t) \rightarrow \exists x \varphi(x)$ (aus 1,2 durch MP)
- 4:** $\vdash \varphi(t) \rightarrow \neg\neg\varphi(t)$ (Proposition 3.10(iii))
- 5:** $\vdash \varphi(t) \rightarrow \exists x \varphi(x)$ (aus 4,3 durch Lemma 3.9)
- 6:** $\vdash \varphi(t)$ (Annahme)
- 7:** $\vdash \exists x \varphi(x)$ (aus 6,5 durch MP)

□

3.2 Die Peano-Arithmetik

Wir wollen in diesem Abschnitt das formale System PA einführen, mit dem wir über Arithmetik sprechen werden. An dieser Stelle sei bereits angemerkt, dass es sich hierbei um das schwächste formale System handelt, für das wir den ersten Unvollständigkeitssatz beweisen werden. Schwach soll heißen, dass alle weiteren formalen Systeme, für die dieser Satz gelten wird, die Axiome von PA beweisen können.

Wir übernehmen folgende Definition aus Batzoglou 2024 S. 20-21 Teil I Kapitel 2.2 .

Definition 3.17 (Die Peano-Arithmetik). Das *formale System* PA besteht aus:

1. der *Sprache der Arithmetik* A
2. den *Axiomen und der Schlussregel der Prädikatenlogik erster Stufe mit Gleichheit*
3. den folgenden *Axiomenschemata* über A . Als Axiome gelten jeweils *alle universellen Verallgemeinerungen*. Hier bezeichnen x, y beliebige Variablen in A und $\varphi(x)$ eine Formel in A .

PA1 (Nachfolger).

- (i) $\neg (S(x) \doteq \bar{0})$,
- (ii) $S(x) \doteq S(y) \rightarrow x \doteq y^2$.

PA2 (Addition).

- (i) $x \dot{+} \bar{0} \doteq x$,
- (ii) $x \dot{+} S(y) \doteq S(x \dot{+} y)$.

PA3 (Multiplikation).

- (i) $x \dot{\times} \bar{0} \doteq \bar{0}$,
- (ii) $x \dot{\times} S(y) \doteq (x \dot{\times} y) \dot{+} x$.

PA4 (Induktion).

- (i) $\left(\varphi(\bar{0}) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x))) \right) \rightarrow \forall x \varphi(x)$

Wir geben zunächst noch etwas neue Notation an, um die Übersichtlichkeit in den nachfolgenden Beweisen zu wahren.

Notation 3.18. Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv

$$\bar{1} := S(\bar{0}), \quad \overline{n+1} := S(\bar{n}).$$

Analog definieren wir für $m := (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$

$$\overline{m} := (\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k).$$

²Batzoglou definiert das Axiom PA1 (ii) folgendermaßen: $S(x) \doteq S(y) \leftrightarrow x \doteq y$. Es genügt aber bereits die von uns angegebene Variante des Axioms, da $x \doteq y \rightarrow S(x) \doteq S(y)$ aus Axiom (E2) folgt.

3 Ein formales System der Arithmetik

Notation 3.19. Für Terme t in PA und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv:

$$S^0(t) := t, \quad S^{k+1}(t) := S(S^k(t))$$

Notation 3.20. Für Variablen x , Terme t und Formeln ϕ nutzen wir folgende Notation:

Falls t für x in $\phi(x)$ substituierbar ist und x in keinen vorherigen Annahmen frei vorkommt folgern wir aus $\vdash \phi(x)$ direkt $\vdash \phi(t)$. Dies geschieht abkürzend für die Anwendung des Generalisierungstheorems mit Axiom (L6) und Modus Ponens.

Bemerkung 3.21. Wir verwenden Notation 3.20 implizit und weisen im weiteren Verlauf der Arbeit nicht mehr darauf hin. So schreiben wir z.B. direkt $\text{PA} \vdash \bar{0} \doteq \bar{0}$ und begründen die Herleitung lediglich mit Axiom (E1).

Notation 3.22. Für Formeln ϕ schreiben wir in nachfolgenden Beweisen anstelle von

1: $\phi \vdash \dots$

2: $\phi \vdash \dots$

3: $\phi \vdash \dots$

$\vdots$

die abkürzende Notation

1: $\phi \vdash \dots$

2: $\text{''} \vdash \dots$

3: $\text{''} \vdash \dots$

$\vdots$

Wir begnügen uns damit, in diesem Abschnitt noch zwei kleine Metatheoreme über PA zu beweisen.

Proposition 3.23. Für alle $n, d \in \mathbb{N}$ gilt $\text{PA} \vdash S^n(\bar{0}) \doteq S^{n+d}(\bar{0}) \rightarrow S^d(\bar{0}) \doteq \bar{0}$.

Der folgende Beweis wurde eigenständig erarbeitet.

Beweis. Sei $d \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir zeigen die Aussage durch vollständige Induktion über n .

Induktionsanfang: Es gelte $n = 0$. Mit Lemma 3.8 (ES) folgt direkt

$$\vdash \bar{0} \doteq S^d(\bar{0}) \rightarrow S^d(\bar{0}) \doteq \bar{0}.$$

Induktionsschritt: Gelte die Behauptung also für ein $n \in \mathbb{N}$.

1: $S^{n+1}(\bar{0}) \doteq S^{n+1+d}(\bar{0}) \vdash S^{n+1}(\bar{0}) \doteq S^{n+1+d}(\bar{0})$ (Deduktionsannahme)

2: $\text{''} \vdash S^{n+1}(\bar{0}) \doteq S^{n+1+d}(\bar{0}) \rightarrow S^n(\bar{0}) \doteq S^{n+d}(\bar{0})$ (Axiom PA1 (ii))

3 Ein formales System der Arithmetik

- 3:** $\vdash S^n(\bar{0}) \doteq S^{n+d}(\bar{0})$ (aus 1,2 durch MP)
4: $\vdash S^n(\bar{0}) \doteq S^{n+d}(\bar{0}) \rightarrow S^d(\bar{0}) \doteq \bar{0}$ (Induktionsannahme)
5: $\vdash S^d(\bar{0}) \doteq \bar{0}$ (aus 3,4 durch MP)
6: $\vdash S^{n+1}(\bar{0}) \doteq S^{n+1+d}(\bar{0}) \rightarrow S^d(\bar{0}) \doteq \bar{0}$ (Deduktionstheorem)

□

Proposition 3.24. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt

$$\text{PA} \vdash \neg(\bar{n} \doteq \bar{m}).$$

Der Beweis wurde eigenständig erarbeitet. Die wesentliche Beweisidee entstand beim bearbeiten von Aufgabe 2.4 aus Batzoglou 2024 S.24 Teil I Kapitel 2.2.

Beweis. Seien also $n, m \in \mathbb{N}$ gegeben und gelte $n \neq m$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $n < m$. Wir finden also ein $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so dass $m = n + d$ gilt. Es folgt:

- 1:** $\vdash \neg(S(S^{d-1}(\bar{0})) \doteq \bar{0})$ (Axiom PA1 (i))
2: $\vdash S^n(\bar{0}) \doteq S^{n+d}(\bar{0}) \rightarrow S^d(\bar{0}) \doteq \bar{0}$ (Proposition 3.23)
3: $\vdash (S^n(\bar{0}) \doteq S^{n+d}(\bar{0}) \rightarrow S^d(\bar{0}) \doteq \bar{0}) \rightarrow (\neg(S^d(\bar{0}) \doteq \bar{0}) \rightarrow \neg(S^n(\bar{0}) \doteq S^{n+d}(\bar{0})))$
 (Kontraposition)
4: $\vdash \neg(S^d(\bar{0}) \doteq \bar{0}) \rightarrow \neg(S^n(\bar{0}) \doteq S^{n+d}(\bar{0}))$ (aus 2,3 durch MP)
5: $\vdash \neg(S^n(\bar{0}) \doteq S^m(\bar{0}))$ (aus 1,4 durch MP)
 $\neg(S^n(\bar{0}) \doteq S^m(\bar{0}))$ ist nach Definition $\neg(\bar{n} \doteq \bar{m})$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

□

4 Primitiv-rekursive Funktionen

„Wir schalten nun eine Zwischenbetrachtung ein, die mit dem formalen System P vorderhand nichts zu tun hat [...]“ (Gödel 1931, S. 179)

Wie Gödel in seiner historischen Arbeit aus dem Jahr 1931 werden auch wir nun eine solche Zwischenbetrachtung beginnen, die vorderhand mit dem formalen System PA nichts zu tun hat und geben zunächst folgende Definition¹:

Nachfolgende Definition entnehmen wir aus Batzoglou 2024 S.16-17 Teil I Kapitel 2.1.

Definition 4.1 (Primitiv-rekursive Funktionen). Die *primitiv-rekursiven Funktionen* sind Funktionen $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$, die induktiv definiert werden, ausgehend von einer Menge *Basisfunktionen*, welche durch bestimmte Kompositionsregeln kombiniert werden können.

Basisfunktionen:

- Die *Nullfunktion* $0_k : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$:

$$0_k(x_1, \dots, x_k) = 0.$$

- Die *Nachfolgerfunktion* $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$S(x) = x + 1.$$

- Die *Projektionsfunktionen* $\pi_i : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq k$:

$$\pi_i(x_1, \dots, x_k) = x_i.$$

Konstruktionsregeln: Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ heißt *primitiv-rekursiv*, wenn sie aus den Basisfunktionen durch endlich viele Anwendungen der folgenden Regeln hervorgeht:

- *Komposition:*

$$f(x_1, \dots, x_k) = g(h_1(x_1, \dots, x_k), \dots, h_\ell(x_1, \dots, x_k)),$$

wobei $g : \mathbb{N}^\ell \rightarrow \mathbb{N}$ und $h_i : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ (für $1 \leq i \leq \ell$) bereits primitiv-rekursiv sind.

¹Wir könnten an dieser Stelle auch Gödels Definition rekursiver Funktionen (vergleiche Gödel 1931 S.179) verwenden. In moderner Literatur ist die von uns angegebene Definition aber üblich.

4 Primitiv-rekursive Funktionen

- *Primitive Rekursion:*

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) &= h(x_1, \dots, x_{k-1}), \\ f(x_1, \dots, x_{k-1}, n+1) &= g(x_1, \dots, x_{k-1}, n, f(x_1, \dots, x_{k-1}, n)), \end{aligned}$$

wobei $g : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k-1} \rightarrow \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv sind.

Nachfolgende Definition entnehmen wir aus Hoffmann 2017 S. 220 Kapitel 5.1 Definition 5.3.

Definition 4.2 (Primitiv-rekursive Relation). Sei $R \subseteq \mathbb{N}^k$ eine k -stellige Relation. Die Relation R heißt *primitiv-rekursiv*, wenn eine primitiv-rekursive Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$R(x_1, \dots, x_k) \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_k) = 0$$

existiert. Die Funktion f heißt die *charakteristische Funktion* von R .

Nachfolgende Definition entnehmen wir aus Hoffmann 2017 S. 221 Kapitel 5.1 Definition 5.4.

Definition 4.3 (Primitiv-rekursive Menge). Eine Menge M heißt *primitiv-rekursiv*, wenn eine primitiv-rekursive Funktion f mit der Eigenschaft

$$x \in M \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ existiert.}$$

Bemerkung 4.4. Jede aus primitiv-rekursiven Relationen durch Einsetzung primitiv-rekursiver Funktionen an Stelle der Variablen entstehende Relation ist primitiv-rekursiv.

Wir beweisen noch eine Abschlusseigenschaft primitiv-rekursiver Relationen. Die Beweisidee stammt aus der Gödelschen Originalarbeit.

Lemma 4.5 (Abgeschlossenheit primitiv-rekursiver Relationen unter Komplementbildung). *Es sei $R \subset \mathbb{N}^k$ eine primitiv-rekursive Relation. Dann ist auch $\mathbb{N}^k \setminus R$ primitiv-rekursiv.*

Wir entnehmen den Beweis aus Gödel 1931 S.180-182 Satz II und führen diesen aus.

Beweis. Als Komposition von Null- und Nachfolgerfunktion ist die konstante Eins-Funktion $1_1(x_1) := S(0_1(x_1))$ primitiv-rekursiv. Die Funktion

$$\alpha : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \quad \alpha(x, 0) := 1_1(x), \quad \alpha(x, n+1) := 0_3(x, n, \alpha(x, n))$$

entsteht aus primitiv-rekursiven Funktionen durch das Schema der Primitiven-Rekursion. Daher ist α selbst primitiv-rekursiv. Da R primitiv-rekursiv ist finden wir eine primitiv-rekursive Funktion f , so dass $R(x_1, \dots, x_k) \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_k) = 0$ gilt. Setzen wir

$$\alpha'(x) := \alpha(0, x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{falls } x \neq 0, \end{cases}$$

so folgern wir $\mathbb{N}^k \setminus R(x_1, \dots, x_k) \Leftrightarrow \alpha'(f(x_1, \dots, x_k)) = 0$. Da α' und f primitiv rekursiv sind ist die Komposition dieser beiden Funktionen ebenfalls primitiv-rekursiv. $\square$

4.1 Darstellbarkeit

Wir geben an dieser Stelle zwei besonders wichtige Definitionen an.

Nachfolgende Definition entnehmen wir aus Hoffmann 2017 S.278 Kapitel 5.4 Definition 5.8.

Definition 4.6 (Darstellung von Relationen). Es seien L ein formales System, $R \subseteq \mathbb{N}^k$ eine Relation und φ eine Formel mit k freien Variablen. Die Relation R wird durch φ *dargestellt* (oder auch *repräsentiert*), falls für alle $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(D1) \quad (n_1, \dots, n_k) \in R \Rightarrow L \vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}),$$

$$(D2) \quad (n_1, \dots, n_k) \notin R \Rightarrow L \vdash \neg \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}).$$

Nachfolgende Definition entnehmen wir aus Batzoglou 2024 S.28 Teil I Kapitel 2.3.2.

Definition 4.7 (Darstellung von Funktionen). Es sei L ein formales System. Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ heißt in L *darstellbar* (oder auch *repräsentierbar*) durch eine Formel φ mit $(k+1)$ freien Variablen,

falls für alle $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(D1) \quad L \vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{f(n_1, \dots, n_k)}),$$

$$(D2) \quad L \vdash \neg \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{m}) \text{ für alle } m \neq f(n_1, \dots, n_k),$$

$$(D3) \quad L \vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, x) \wedge \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, y) \rightarrow x \doteq y, \text{ für alle Variablen } x, y.$$

Der Begriff der Darstellbarkeit schafft also eine Verknüpfung zwischen Metamathematik und formalen Systemen. Die Bedingungen (D2) und (D3) für die Darstellbarkeit von Funktionen lassen sich jedoch noch etwas kompakter für PA formulieren. Wir führen zunächst wieder etwas neue Notation ein, um die Übersichtlichkeit in den folgenden Beweisen zu erhalten.

Notation 4.8 ($\doteq$ -Transitivität). Für Terme s, t, u mit $PA \vdash s \doteq t$ und $PA \vdash t \doteq u$ folgern wir direkt $PA \vdash s \doteq u$ und bezeichnen diesen Vorgang als $\doteq$ -*Transitivität*. Dies geschieht abkürzend für die Anwendung von Lemma 3.8 (ET) mit 2-fachem Modus Ponens.

Lemma 4.9. Es sei $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ und $\varphi(x_1, \dots, x_k, z)$ eine Formel mit freien Variablen $x_1, \dots, x_k, z$. Es gelte $PA \vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, z) \rightarrow z \doteq f(n_1, \dots, n_k)$. Dann schließen wir:

$$(D2) \quad PA \vdash \neg \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{m}) \text{ für alle } m \neq f(n_1, \dots, n_k)$$

$$(D3) \quad PA \vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, x) \wedge \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, y) \rightarrow x \doteq y, \text{ für alle Variablen } x, y.$$

Folgender Beweis wurde eigenständig erarbeitet.

Beweis. (D2) Wir setzen $r := f(n_1, \dots, n_k)$ und geben uns ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \neq r$ vor.

$$1: \vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{m}) \rightarrow \overline{m} \doteq \overline{r} \quad (\text{Annahme})$$

- 2: $\vdash (\varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{m}) \rightarrow \overline{m} \doteq \overline{r}) \rightarrow (\neg(\overline{m} \doteq \overline{r}) \rightarrow \neg\varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{m}))$ (Kontraposition)
- 3: $\vdash \neg(\overline{m} \doteq \overline{r}) \rightarrow \neg\varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{m})$ (aus 1,2 durch MP)
- 4: $\vdash \neg(\overline{m} \doteq \overline{r})$ (Proposition 3.24)
- 5: $\vdash \neg\varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{m})$ (aus 4,3 durch MP)

(D3) Es seien x, y freie Variablen in φ .

- 1: $\varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, x) \wedge \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, y) \vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, x) \wedge \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, y)$ (Deduktionsannahme)
- 2: $\vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, x)$ (aus 1 durch $\wedge$ -Elimination)
- 3: $\vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, y)$ (aus 1 durch $\wedge$ -Elimination)
- 4: $\vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, x) \rightarrow x \doteq \overline{r}$ (Annahme)
- 5: $\vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, y) \rightarrow y \doteq \overline{r}$ (Annahme)
- 6: $\vdash x \doteq \overline{r}$ (aus 2,4 durch MP)
- 7: $\vdash y \doteq \overline{r}$ (aus 3,5 durch MP)
- 8: $\vdash (y \doteq \overline{r}) \rightarrow (\overline{r} \doteq y)$ (Lemma 3.8 (ES))
- 9: $\vdash \overline{r} \doteq y$ (aus 7,8 durch MP)
- 10: $\vdash x \doteq y$ (aus 6,9 durch $\doteq$ -Transitivität)
- 11: $\vdash \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, x) \wedge \varphi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, y) \rightarrow x \doteq y$ (Deduktionstheorem)

□

4.1.1 Basisfälle

Ein wesentlicher Schritt im Beweis des ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes besteht im Nachweis, dass sich primitiv-rekursive Funktionen (Relationen) in PA darstellen lassen. Diese Repräsentierbarkeit bildet die entscheidende Brücke zwischen Metamathematik und formaler Arithmetik: Sie wird uns erlauben, Aussagen über Beweise innerhalb von PA selbst zu formulieren. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, diese Aussage durch strukturelle Induktion über die Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen zu beweisen². Der Übersichtlichkeit geschuldet, werden wir den Beweis auf mehrere Lemmata aufteilen. Wir kümmern uns zunächst um die drei Basisfälle.

Notation 4.10. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und Formeln $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ definieren wir rekursiv:

$$\bigwedge_{k < 1} \varphi_k := \varphi_0, \quad \bigwedge_{k < n+1} \varphi_k := \left(\bigwedge_{k < n} \varphi_k \right) \wedge \varphi_n$$

²Die analoge Aussage für primitiv-rekursive Relationen folgt dann leicht.

4 Primitiv-rekursive Funktionen

Lemma 4.11 (Darstellbarkeit der Basisfälle in PA). *Die primitiv-rekursiven Basisfunktionen sind in PA darstellbar.*

Wir folgen der Beweisskizze aus Batzoglou 2024 S.29 Teil I Kapitel 2.3.2 Theorem 2.3:

Beweis. Es seien $x_1, \dots, x_k, y$ Variablen.

1. Die **Nullfunktion** $0_k : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$, $0_k(x_1, \dots, x_k) = 0$ wird durch

$$\left(\bigwedge_{j < k+1} x_j \doteq x_j \right) \wedge y \doteq \bar{0} \text{ dargestellt.}$$

2. Die **Nachfolgerfunktion** $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $S(x) = x + 1$ wird durch $y \doteq S(x)$ dargestellt.

3. Die **Projektionsfunktion** $\pi_i : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq k$, $\pi_i(x_1, \dots, x_k) = x_i$ wird durch

$$\left(\bigwedge_{j < k+1} x_j \doteq x_j \right) \wedge y \doteq x_i \text{ dargestellt.}$$

Nullfunktion:

(D1) Seien $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ gegeben. Mit Axiom (E1) folgt für alle $1 \leq j \leq k$ $\vdash \overline{n_j} \doteq \overline{n_j}$ und $\vdash \bar{0} \doteq \bar{0}$. Mit k -facher $\wedge$ -Einführung erhalten wir dann

$$\vdash \left(\bigwedge_{j < k+1} \overline{n_j} \doteq \overline{n_j} \right) \wedge \bar{0} \doteq \bar{0}.$$

Für den Nachweis von (D2) und (D3) genügt es nach Lemma 4.9

$$\vdash \left(\left(\bigwedge_{j < k+1} \overline{n_j} \doteq \overline{n_j} \right) \wedge y \doteq \bar{0} \right) \rightarrow (y \doteq \bar{0}) \text{ zu beweisen.}$$

- 1: $\left(\bigwedge_{j < k+1} \overline{n_j} \doteq \overline{n_j} \right) \wedge y \doteq \bar{0} \vdash \left(\bigwedge_{j < k+1} \overline{n_j} \doteq \overline{n_j} \right) \wedge y \doteq \bar{0}$ (Deduktionsannahme)
- 2: $\vdash y \doteq \bar{0}$ (aus 1 durch $\wedge$ -Elimination)
- 3: $\vdash \left(\left(\bigwedge_{j < k+1} \overline{n_j} \doteq \overline{n_j} \right) \wedge y \doteq \bar{0} \right) \rightarrow (y \doteq \bar{0})$ (Deduktionstheorem)

Nachfolgerfunktion:

(D1) Es sei $l \in \mathbb{N}$ gegeben. Mit Axiom (E1) folgt $\vdash \overline{l+1} \doteq S(\bar{l})$.

Nach Proposition 3.2 gilt $\vdash y \doteq S(\bar{l}) \rightarrow y \doteq S(\bar{l})$. Mit Lemma 4.9 folgen (D2) und (D3).

Projektionsfunktion:

Der Beweis unterscheidet sich nicht wesentlich vom Nachweis der Darstellbarkeit für die Nullfunktion und folgt aus demselben Argument. Wir verzichten daher auf eine erneute Ausführung. $\square$

4.1.2 Komposition

Der Nachweis der Abgeschlossenheit der Darstellbarkeit unter Komposition ist etwas aufwändiger, bereitet aber keine wesentlichen Schwierigkeiten.

Notation 4.12 ($\doteq$ -Substitution). Für Variablen x, y und Formeln ϕ , in denen y nicht auftritt, nutzen wir folgende Notation:

Falls $\vdash x \doteq y$ und $\vdash \phi(x)$ gilt, folgern wir direkt $\vdash \phi(y)$ und bezeichnen diesen Vorgang mit $\doteq$ -Substitution. Dies geschieht abkürzend für die Anwendung der Formelsubstitution (E3) mit 2-fachem Modus Ponens.

Lemma 4.13 (Abgeschlossenheit der Darstellbarkeit unter Komposition in PA). Seien $k, l \geq 1$, sowie $g : \mathbb{N}^l \rightarrow \mathbb{N}$ und $h_i : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ in PA darstellbare Funktionen für $1 \leq i \leq l$ und $f(\vec{x}) := g(h_1(\vec{x}), \dots, h_l(\vec{x}))$ mit $\vec{x} := (x_1, \dots, x_k)$.

Es seien $\vec{X} := (X_1, \dots, X_k)$ und $\vec{Y} := (Y_1, \dots, Y_l)$ Tupel von Variablen, sowie Z eine Variable. Angenommen, für $1 \leq i \leq l$ repräsentiert die Formel $\psi_i(\vec{X}, Y_i)$ die Funktion h_i , und die Formel $\chi(\vec{Y}, Z)$ repräsentiert g . Dann repräsentiert

$$\varphi(\vec{X}, Z) := \exists A_1 \cdots \exists A_l \left(\psi_1(\vec{X}, A_1) \wedge \cdots \wedge \psi_l(\vec{X}, A_l) \wedge \chi(A_1, \dots, A_l, Z) \right)$$

die Funktion f in PA.

Wir folgen der Beweisskizze aus Batzoglu 2024 S.29 Teil I Kapitel 2.3.2 Theorem 2.3:

Beweis. Es sei $\vec{n} := (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ gegeben. Ferner setzen wir für $1 \leq i \leq l$:

$$a_i := h_i(\vec{n}), \quad \vec{a} := (a_1, \dots, a_l), \quad m := f(\vec{n}) = g(\vec{a}).$$

(D1) Für alle $1 \leq i \leq l$ gilt:

- 1: $\vdash \psi_i(\vec{n}, \bar{a}_i)$ (ψ_i repräsentiert h_i)
- 2: $\vdash \chi(\vec{a}, \bar{m})$ (χ repräsentiert g)
- 3: $\vdash \psi_1(\vec{n}, \bar{a}_1) \wedge \cdots \wedge \psi_l(\vec{n}, \bar{a}_l) \wedge \chi(\vec{a}, \bar{m})$ (aus 1,2 durch l-fache $\wedge$ -Einführung)
- 4: $\vdash \exists A_1 \cdots \exists A_l \left(\psi_1(\vec{n}, A_1) \wedge \cdots \wedge \psi_l(\vec{n}, A_l) \wedge \chi(A_1, \dots, A_l, \bar{m}) \right)$ (aus 3 durch l-fache $\exists$ -Einführung)

Für den Nachweis von (D2) und (D3) definieren wir

$$\omega(\vec{X}, Y_1, \dots, Y_l, Z) := \psi_1(\vec{X}, Y_1) \wedge \cdots \wedge \psi_l(\vec{X}, Y_l) \wedge \chi(Y_1, \dots, Y_l, Z),$$

außerdem seien für $Y_1, \dots, Y_l$ in der Formel ω substituierbare Terme $t_1, \dots, t_l$ gegeben. Mit Lemma 4.9 genügt es

$$\vdash \varphi(\vec{n}, Z) \rightarrow Z = \bar{m} \text{ zu zeigen.}$$

Für alle $1 \leq i \leq l$ gilt:

4 Primitiv-rekursive Funktionen

- 1: $\omega(\vec{n}, t_1, \dots, t_l, Z) \vdash \omega(\vec{n}, t_1, \dots, t_l, Z)$ (Deduktionsannahme)
 - 2: $\text{"} \vdash \psi_i(\vec{n}, t_i)$ (aus 1 durch $\wedge$ -Elimination)
 - 3: $\text{"} \vdash \psi_i(\vec{n}, \overline{a_i})$ (ψ_i repräsentiert h_i)
 - 4: $\text{"} \vdash \psi_i(\vec{n}, t_i) \wedge \psi_i(\vec{n}, \overline{a_i})$ (aus 2,3 durch $\wedge$ -Einführung)
 - 5: $\text{"} \vdash \psi_i(\vec{n}, t_i) \wedge \psi_i(\vec{n}, \overline{a_i}) \rightarrow t_i \doteq \overline{a_i}$ (ψ_i repräsentiert h_i)
 - 6: $\text{"} \vdash t_i \doteq \overline{a_i}$ (aus 4,5 durch MP)
 - 7: $\text{"} \vdash \chi(t_1, \dots, t_l, Z)$ (aus 1 durch $\wedge$ -Elimination)
 - 8: $\text{"} \vdash \chi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_l}, Z)$ (aus 6,7 durch l-fache $\doteq$ -Substitution)
 - 9: $\text{"} \vdash \chi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_l}, \overline{m})$ (χ wird durch g repräsentiert)
 - 10: $\text{"} \vdash \chi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_l}, Z) \wedge \chi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_l}, \overline{m})$ (aus 8,9 durch $\wedge$ -Einführung)
 - 11: $\text{"} \vdash \chi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_l}, Z) \wedge \chi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_l}, \overline{m}) \rightarrow Z \doteq \overline{m}$ (χ wird durch g repräsentiert)
 - 12: $\text{"} \vdash Z \doteq \overline{m}$ (aus 10,11 durch MP)
 - 13: $\vdash \omega(\vec{n}, t_1, \dots, t_l, Z) \rightarrow Z \doteq \overline{m}$ (Deduktiontheorem)
 - 14: $\vdash \varphi(\vec{n}, Z) \rightarrow Z \doteq \overline{m}$ (aus 13 durch l-fache $\exists$ -Einführung)
-

4.1.3 Primitive-Rekursion

Wir folgen in diesem Abschnitt Batzoglou 2024 Teil I S.30-32 Kapitel 2.3.2 und Kleene 1974 S.243-244 Kapitel IX und ergänzen teils mit eigenen Ausführungen.

Für den Nachweis der Abgeschlossenheit der Darstellbarkeit unter primitiver Rekursion benötigen wir zunächst eine Formel, die dieses Schema darstellen kann. Es seien also $g : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k-1} \rightarrow \mathbb{N}$ in PA darstellbar und f entstehe aus g und h durch primitive Rekursion. Eine erste Skizze, wie denn nun eine solche Formel, die f repräsentiert, ausschauen sollte, könnte in etwa folgendes Ergebnis liefern:

$$y = f(\vec{x}, n) \Leftrightarrow \exists y_0 \dots \exists y_n \left(y_0 = h(\vec{x}) \wedge y_1 = g(\vec{x}, 0, y_0) \wedge \dots \wedge y_n = g(\vec{x}, n-1, y_{n-1}) \wedge y = y_n \right)$$

Das ist natürlich keine PA-Formel. Vielmehr wird aber deutlich, dass wir ein Werkzeug benötigen, welches eine endliche Folge von Werten innerhalb einer Formel ausgibt und diese Werte in Beziehung zueinander setzen kann (vergleiche Batzoglou 2024 S.30). In unserem Fall handelt es sich bei dieser Folge um die Berechnungshistorie der Funktion $f(\vec{x}, n)$:

$$\left[h(\vec{x}), g(\vec{x}, 0, h(\vec{x})), g(\vec{x}, 1, f(\vec{x}, 1)), \dots, g(\vec{x}, n-1, f(\vec{x}, n-1)) \right] \quad (*)$$

4 Primitiv-rekursive Funktionen

Wir wollen nun zunächst zeigen, dass sich endliche Folgen natürlicher Zahlen durch ein Tupel (s, t) zweier natürlicher Zahlen codieren lassen. Hierfür benötigen wir allerdings noch etwas an Vorbereitung und starten mit einem berühmten Resultat aus der Zahlentheorie.

Bemerkung 4.14. Für alle $a \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $b \in \mathbb{N}$ definieren wir für die nachfolgenden Beweise

$$a \mid b := \text{Es existiert ein } c \in \mathbb{N}, \text{ so dass } b = ac \text{ gilt.}$$

Satz 4.15 (Chinesischer Restsatz). *Seien $m_0, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ paarweise teilerfremd und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ mit $a_i < m_i$ für alle $i \leq n$. Dann besitzt das System simultaner Kongruenzen*

$$\begin{aligned} x &\equiv a_0 \pmod{m_0}, \\ x &\equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

genau eine Lösung modulo $M := m_0 \cdot m_1 \cdots m_n$.

Wir übernehmen den Beweis aus Hoffmann 2017 S. 314-315 Kapitel 6.2 Satz 6.12 ohne wesentliche Änderung.

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$\pi : \{0, \dots, (m_0 \cdot \dots \cdot m_n) - 1\} \longrightarrow \{0, \dots, m_0 - 1\} \times \dots \times \{0, \dots, m_n - 1\},$$

definiert durch

$$\pi(x) := (x \bmod m_0, \dots, x \bmod m_n).$$

Der chinesische Restsatz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass π bijektiv ist.

Injektivität. Seien $x, y \in \{0, \dots, (m_0 \cdot \dots \cdot m_n) - 1\}$ mit $y > x$ und $\pi(x) = \pi(y)$. Dann gilt

$$(x \bmod m_0, \dots, x \bmod m_n) = (y \bmod m_0, \dots, y \bmod m_n).$$

Daraus folgt $m_i \mid (y - x)$ für alle $i = 0, \dots, n$. Da die Moduln $m_0, \dots, m_n$ paarweise teilerfremd sind, gilt somit

$$m_0 \cdots \cdots m_n \mid (y - x).$$

Da $x, y < m_0 \cdots \cdots m_n$, ist auch $0 < y - x < m_0 \cdots \cdots m_n$. Dies ist jedoch nur möglich, wenn $y - x = 0$, was im Widerspruch zur Annahme $y > x$ steht. Also ist π injektiv.

Surjektivität. Der Definitionsbereich von π ist endlich und hat ebenso viele Elemente wie der Wertebereich. Daher folgt aus der Injektivität unmittelbar die Surjektivität.

□

4 Primitiv-rekursive Funktionen

Lemma 4.16. *Sei $l \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann sind die Zahlen*

$$1 + 1 \cdot l!, 1 + 2 \cdot l!, 1 + 3 \cdot l!, \dots, 1 + l \cdot l!$$

paarweise teilerfremd.

Wir übernehmen den Beweis aus Hoffmann 2017 S. 313-314 Kapitel 6.2 Satz 6.11 ohne wesentliche Änderung.

Beweis. Für beliebige $1 \leq i < j \leq l$ nehmen wir an, es gebe eine Primzahl p , die sowohl $1 + i \cdot l!$ als auch $1 + j \cdot l!$ teilt. Dann teilt p auch die Differenz

$$(1 + j \cdot l!) - (1 + i \cdot l!) = (j - i) \cdot l!.$$

Da p prim ist und $p \mid (j - i) \cdot l!$ gilt, folgt $p \mid (j - i)$ oder $p \mid l!$.

Fall 1: $p \mid l!$

Dann teilt p auch $i \cdot l!$, also $1 + i \cdot l! \equiv 1 \pmod{p}$, im Widerspruch zu $p \mid (1 + i \cdot l!)$.

Fall 2: $p \mid (j - i)$

Da $1 \leq j - i \leq l - 1$, ist $j - i$ ein Teiler von $l!$, also $p \mid l!$. Damit sind wir wieder in Fall 1 und erhalten denselben Widerspruch.

Also kann es keine solche Primzahl p geben. Folglich gilt, dass die Zahlen $1 + 1 \cdot l!, 1 + 2 \cdot l!, \dots, 1 + l \cdot l!$ paarweise teilerfremd sind. $\square$

Nachfolgende Definition entnehmen wir aus Hoffmann 2017 S.313 Kapitel 6.2 definition 6.3.

Definition 4.17 (Gödel'sche β -Funktion). Die *Gödel'sche β -Funktion* ist die Abbildung

$$\beta : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N},$$

definiert durch

$$\beta(n, d, i) := n \bmod (1 + (i + 1) \cdot d).$$

Mit diesen Hilfsmitteln in der Hand können wir nun die gewünschte Codierungseigenschaft beweisen.

Lemma 4.18 (Codierung von endlichen Zahlenfolgen). *Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Für jede Zahlenfolge $[f_0, f_1, \dots, f_{k-1}]$ der Länge k existieren natürliche Zahlen $n, d \in \mathbb{N}$ mit*

$$\forall i < k : f_i = \beta(n, d, i).$$

Wir übernehmen den Beweis aus Hoffmann 2017 S. 313-315 Kapitel 6.2 Satz 6.10 ohne wesentliche Änderung.

Beweis. Sei eine Folge $[f_0, f_1, \dots, f_{k-1}]$ gegeben und setze

$$l := \max\{k, f_0, f_1, \dots, f_{k-1}\}.$$

Betrachte das System simultaner Kongruenzen

$$x \equiv f_i \pmod{1 + (i + 1) \cdot l!} \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, k - 1.$$

4 Primitiv-rekursive Funktionen

Für $i = 0, 1, \dots, k-1$ setzen wir $M_i := 1 + (i+1) \cdot l!$. Da $1 \leq i+1 \leq k \leq l$, sind die Zahlen $M_0, M_1, \dots, M_{k-1}$ nach Lemma 4.16 paarweise teilerfremd. Zudem gilt wegen $f_i \leq l < M_i$, dass jedes f_i ein zulässiger Rest modulo M_i ist. Nach dem chinesischen Restsatz 4.15 existiert also ein $n \in \mathbb{N}$, das alle obigen Kongruenzen gleichzeitig erfüllt.

Setze nun $d := l!$. Dann gilt für alle $i < k$:

$$\beta(n, d, i) = n \bmod (1 + (i+1) \cdot d) = n \bmod (1 + (i+1) \cdot l!) = f_i.$$

□

Nach dem eben bewiesenen Lemma 4.18 finden wir $s, t \in \mathbb{N}$, so dass die Berechnungshistorie $(*)$ folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} & [f(\vec{x}, 0), f(\vec{x}, 1), f(\vec{x}, 2), \dots, f(\vec{x}, n)] \\ & \quad \parallel \\ & [h(\vec{x}), g(\vec{x}, 0, h(\vec{x})), g(\vec{x}, 1, f(\vec{x}, 1)), \dots, g(\vec{x}, n-1, f(\vec{x}, n-1))] \\ & \quad \parallel \\ & [\beta(s, t, 0), \beta(s, t, 1), \beta(s, t, 2), \dots, \beta(s, t, n)] \end{aligned}$$

Diese Überlegungen helfen uns natürlich nur bei der Konstruktion einer Formel, die f repräsentieren soll, wenn die eben diskutierte β -Funktion auch eine Darstellung in PA hat.

Lemma 4.19. *Es seien n, d, i, y Variablen und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

(i) *Die Gödelsche β -Funktion ist in PA durch die Formel*

$$\phi_\beta(n, d, i, y) := \exists q (n \dot{=} q \dot{\times} M(d, i) \dot{+} y \wedge y \dot{<} M(d, i))$$

darstellbar, wobei $M(d, i) := \bar{1} \dot{+} (i \dot{+} \bar{1}) \dot{\times} d$.

(ii) $\vdash \phi_\beta(n, d, i, y) \wedge \phi_\beta(n, d, i, \bar{m}) \rightarrow y \dot{=} \bar{m}$

Wir verzichten an dieser Stelle auf einen ausführlichen Beweis und verweisen auf Kleene 1974 S.203 Kapitel VIII *(180).

Beweisskizze.(i) Man beweist die Darstellbarkeit der β -Funktion, indem man nacheinander die Darstellbarkeit der Nachfolger-, Additions-, Multiplikations-, Quotienten- und Restfunktion zeigt. Die Darstellbarkeit der Nachfolgerfunktion haben wir bereits in Lemma 4.11 nachgewiesen.

(ii) Kleene beweist $\phi_\beta(n, d, i, \bar{m}) \vdash \exists! z \phi_\beta(n, d, i, z)$. Daraus lässt sich aber unmittelbar $\vdash \phi_\beta(n, d, i, y) \wedge \phi_\beta(n, d, i, \bar{m}) \rightarrow y \dot{=} \bar{m}$ folgern:

Wir erinnern uns daran, dass $\exists! z \phi_\beta(n, d, i, z)$ folgendermaßen definiert war:

$$\exists z (\phi_\beta(n, d, i, z) \wedge \forall w (\phi_\beta(n, d, i, w) \rightarrow w \dot{=} z)).$$

1: $\phi_\beta(n, d, i, \bar{m}) \rightarrow \exists! z \phi_\beta(n, d, i, z) \vdash \phi_\beta(n, d, i, \bar{m}) \rightarrow \exists! z \phi_\beta(n, d, i, z)$ (Deduktionsannahme)

4 Primitiv-rekursive Funktionen

- 2: ", $\phi_\beta(n, d, i, y) \wedge \phi_\beta(n, d, i, \bar{m}) \vdash \phi_\beta(n, d, i, y) \wedge \phi_\beta(n, d, i, \bar{m})$ (Deduktionsannahme)
- 3: ", " $\vdash \phi_\beta(n, d, i, \bar{m})$ (aus 2 durch $\wedge$ -Elimination)
- 4: ", " $\vdash \exists!z \phi_\beta(n, d, i, z)$ (aus 3,1 durch MP)
- 5: ", " $\vdash \phi_\beta(n, d, i, y)$ (aus 2 durch $\wedge$ -Elimination)
- Es sei a eine variable, die in keinen vorherigen Annahmen frei auftritt.
- 6: ", ", $\phi_\beta(n, d, i, a) \wedge \forall w(\phi_\beta(n, d, i, w) \rightarrow w \doteq a) \vdash \phi_\beta(n, d, i, a) \wedge \forall w(\phi_\beta(n, d, i, w) \rightarrow w \doteq a)$ (Deduktionsannahme)
- 7: ", ", " $\vdash \forall w(\phi_\beta(n, d, i, w) \rightarrow w \doteq a)$ (aus 6 durch $\wedge$ -Elimination)
- 8: ", ", " $\vdash (\forall w(\phi_\beta(n, d, i, w) \rightarrow w \doteq a)) \rightarrow (\phi_\beta(n, d, i, \bar{m}) \rightarrow \bar{m} \doteq a)$ (Axiom (L6))
- 9: ", ", " $\vdash \phi_\beta(n, d, i, \bar{m}) \rightarrow \bar{m} \doteq a$ (aus 7,8 durch MP)
- 10: ", ", " $\vdash \bar{m} \doteq a$ (aus 3,9 durch MP)
- 11: ", ", " $\vdash y \doteq a$ (analog zu 8 - 10)

Mit Lemma 3.8 (ES), (ET) folgt ", ", " $\vdash y \doteq \bar{m}$. Mit $\exists$ -Elimination und dem Deduktionstheorem folgt

$$\phi_\beta(n, d, i, \bar{m}) \rightarrow \exists!z \phi_\beta(n, d, i, z) \vdash \phi_\beta(n, d, i, y) \wedge \phi_\beta(n, d, i, \bar{m}) \rightarrow y \doteq \bar{m}.$$

□

Jetzt haben wir alle nötigen Werkzeuge in der Hand, um eine Formel zu konstruieren, die f repräsentiert.

Entstehe also f aus den in PA darstellbaren Funktionen $g : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{k-1} \rightarrow \mathbb{N}$ durch primitive-Rekursion. Außerdem werde g durch die Formel ϕ_g und h durch die Formel ϕ_h repräsentiert. Nach Lemma 4.19 gibt es eine Formel ϕ_β , welche die β -Funktion repräsentiert. Dann wird f durch die Formel

$$\begin{aligned} \phi_f(\tilde{x}, \tilde{n}, \tilde{y}) := & \exists s \exists t \left(\exists u \left(\phi_\beta(s, t, \bar{0}, u) \wedge \phi_h(\tilde{x}, u) \right) \wedge \right. \\ & \forall i < n \left(\exists u \exists v \left(\phi_\beta(s, t, S(i), u) \wedge \phi_\beta(s, t, i, v) \wedge \phi_g(\tilde{x}, i, v, u) \right) \wedge \right. \\ & \left. \left. \phi_\beta(s, t, \tilde{n}, \tilde{y}) \right) \right) \end{aligned} \quad (**)$$

repräsentiert, wobei $\tilde{n}, \tilde{y}$ Variablen und $\tilde{x}$ ein Tupel von $(k-1)$ Variablen sei. Des Weiteren seien $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^{k-1}$ gegeben und wir setzen $y_i := f(m, i)$ für alle $0 \leq i \leq n$.

Bevor wir diese Behauptung beweisen, wollen wir die Formel ϕ_f zunächst einmal auf einer anschaulichen Ebene betrachten. Folgende Illustration soll lediglich die Intuition unterstützen und die Frage klären, warum genau diese Formel denn f repräsentieren könnte:

4 Primitiv-rekursive Funktionen

Es gibt s, t , welche die Berechnungshistorie von $f(m, n)$ codieren.

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{\exists s \exists t} \\
 & \left(\begin{array}{c} \text{Es gibt ein } y_0, \text{ so dass} \\ \overbrace{\exists u} \end{array} \left(\begin{array}{c} \overbrace{\beta(s, t, 0) = f(m, 0) = y_0} \\ \overbrace{\phi_\beta(s, t, 0, u)} \end{array} \wedge \begin{array}{c} \text{und } h(m) = y_0 \text{ gilt.} \\ \overbrace{\phi_h(\tilde{x}, u)} \end{array} \right) \wedge \right. \\
 & \begin{array}{c} \text{Für alle } i < n \text{ gibt es } y_{i+1} \text{ und } y_i, \text{ so dass} \\ \overbrace{\forall i < \tilde{n}} \quad \overbrace{\exists u \exists v} \end{array} \\
 & \left(\begin{array}{c} \overbrace{\beta(s, t, i+1) = f(m, i+1) = y_{i+1}} \\ \overbrace{\phi_\beta(s, t, S(i), u)} \end{array} \wedge \begin{array}{c} \text{und } \beta(s, t, i) = f(m, i) = y_i \\ \overbrace{\phi_\beta(s, t, i, v)} \end{array} \wedge \begin{array}{c} \text{und } g(m, i, y_i) = y_{i+1} \text{ gilt.} \\ \overbrace{\phi_g(m, i, v, u)} \end{array} \right) \wedge \\
 & \left. \begin{array}{c} \text{Es gilt } \beta(s, t, n) = f(m, n) = y_n. \\ \overbrace{\phi_\beta(s, t, \tilde{n}, \tilde{y})} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Wir benötigen noch eine letzte technische Hilfsaussage, dann können wir den Beweis für $(**)$ angeben.

Proposition 4.20 (Eigenschaften des beschränkten Allquantors). *Es sei x eine Variable, $A(x)$ eine Formel und $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann sind folgende Formeln in PA herleitbar:*

$$(i) \ A(\bar{0}), A(\bar{1}), \dots, A(\overline{k-1}) \vdash \forall x < \bar{k} (A(x))$$

$$(ii) \ \forall x < \bar{k} (A(x)) \vdash A(\bar{i}) \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, k-1$$

Wir skizzieren den Beweis lediglich und verweisen für eine ausführliche Argumentation auf Kleene 1974 S. 197 Kapitel VIII *166 und *167.

Beweisskizze. (i) Mit dem Deduktions- und Generalisierungstheorem genügt es

$$A(\bar{0}), A(\bar{1}), \dots, A(\overline{k-1}), x < \bar{k} \vdash A(x)$$

zu zeigen. Zunächst beweist man

$$\vdash x \doteq \bar{0} \vee x \doteq \bar{1} \vee \dots \vee x \doteq \overline{k-1} \vee x \doteq \bar{k} \vee \exists y (x \doteq S^{k+1}(y)).$$

Wir erhalten aus $x \in \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{k-1}\}$ mit Axiom (E3) $A(x)$. Aus den anderen beiden Fällen lassen sich Widersprüche herleiten. Aus diesen können wir durch Proposition 3.10 (i) ebenfalls $A(x)$ folgern. Mit $\vee$ -Elimination³ folgt die gewünschte Aussage.

(ii) Man beweist zunächst die Darstellbarkeit der gewöhnlichen $<$ -Relation. Mit Axiom (L6) folgt die gewünschte Aussage. $\square$

Lemma 4.21 (Abgeschlossenheit der Darstellbarkeit unter primitiver Rekursion). *Es gilt die Behauptung $(**)$.*

³Bei $\vee$ -Elimination handelt es sich um folgende Aussage: Wenn $PL1 \vdash \phi \vee \psi$ sowie $PL1 \vdash \phi \rightarrow \chi$ und $PL1 \vdash \psi \rightarrow \chi$ gelten, folgt $PL1 \vdash \chi$, wobei ϕ, ψ, χ beliebige Formeln seien. Wir haben auf einen Beweis dieser Aussage verzichtet, da sie in dieser Arbeit ausschließlich in der Beweisskizze für Proposition 4.20 verwendet wird.

4 Primitiv-rekursive Funktionen

Wir entnehmen für den Nachweis von (D1) den Fall $n > 0$ aus Kleene 1974 S.243 Kapitel IX Theorem 27. Der Fall $n = 0$ wurde eigenständig erarbeitet. Für den Nachweis von (D2) und (D3) entnehmen wir den Induktionsschritt ohne wesentliche Änderung aus Kleene 1974 S.243 Kapitel IX Theorem 27. Der Induktionsanfang wurde selbstständig erarbeitet.

Beweis. Wir verwenden im Folgenden weiterhin die Notation aus (**). Ferner definieren wir

$$\begin{aligned}\Phi(\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}, \tilde{x}) &:= \phi_\beta(\tilde{s}, \tilde{t}, \bar{0}, \tilde{u}) \wedge \phi_h(\tilde{x}, \tilde{u}), \\ \Psi(\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}, \tilde{i}) &:= \phi_\beta(\tilde{s}, \tilde{t}, S(\tilde{i}), \tilde{u}) \wedge \phi_\beta(\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{i}, \tilde{v}) \wedge \phi_g(\tilde{x}, \tilde{i}, \tilde{v}, \tilde{u}), \\ \phi_{f'}(\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{n}, \tilde{y}) &:= \exists u \Phi(\tilde{s}, \tilde{t}, u, \tilde{x}) \wedge \forall i < \tilde{n} \left(\exists u \exists v \Psi(\tilde{s}, \tilde{t}, u, v, \tilde{x}, i) \right) \wedge \phi_\beta(\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{n}, \tilde{y}),\end{aligned}$$

wobei $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{i}$ Variablen seien. Mit dem Codierungslemma 4.18 finden wir $s, t \in \mathbb{N}$, so dass $\beta(s, t, i) = f(m, i) = y_i$ für alle $0 \leq i \leq n$.

(D1) Es seien i', z Variablen. Wir zeigen die Aussage durch Fallunterscheidung.

Fall $n = 0$:

- 1: $\vdash \forall x \neg(S(x) \doteq \bar{0})$ (Axiom PA1 (i))
- 2: $\vdash \forall x \neg(S(x) \doteq \bar{0}) \rightarrow \neg(S(i' \dot{+} z) \doteq \bar{0})$ (Axiom (L6))
- 3: $\vdash \neg(S(i' \dot{+} z) \doteq \bar{0})$ (aus 1,2 durch MP)
- 4: $\vdash \forall z \neg(S(i' \dot{+} z) \doteq \bar{0})$ (aus 3 durch Generalisierungstheorem)
- 5: $\vdash \forall z \neg(S(i' \dot{+} z) \doteq \bar{0}) \rightarrow \neg\neg\forall z \neg(S(i' \dot{+} z) \doteq \bar{0})$ (Proposition 3.10 (iii))
- 6: $\vdash \neg(i' < \bar{0})$ (aus 4,5 durch MP)
- 7: $(i' < \bar{0}) \vdash (i' < \bar{0})$ (Deduktionsannahme)
- 8: " $\vdash \neg(i' < \bar{0}) \rightarrow (i' < \bar{0} \rightarrow \exists u \exists v \Psi(\bar{s}, \bar{t}, u, v, \bar{m}, i'))$ (Proposition 3.10 (i))
- 9: " $\vdash i' < \bar{0} \rightarrow \exists u \exists v \Psi(\bar{s}, \bar{t}, u, v, \bar{m}, i')$ (aus 6,8 durch MP)
- 10: " $\vdash \exists u \exists v \Psi(\bar{s}, \bar{t}, u, v, \bar{m}, i')$ (aus 7,9 durch MP)
- 11: $\vdash (i' < \bar{0}) \rightarrow \exists u \exists v \Psi(\bar{s}, \bar{t}, u, v, \bar{m}, i')$ (Deduktionstheorem)
- 12: $\vdash \forall i < \bar{0} (\exists u \exists v \Psi(\bar{s}, \bar{t}, u, v, \bar{m}, i))$ (aus 11 durch Generalisierungstheorem)
- 13: $\vdash \phi_\beta(\bar{s}, \bar{t}, \bar{0}, \bar{y}_0)$ (Lemma 4.19 (i))
- 14: $\vdash \phi_h(\bar{m}, \bar{y}_0)$ (ϕ_h repräsentiert h)
- 15: $\vdash \Phi(\bar{s}, \bar{t}, \bar{y}_0, \bar{m})$ (aus 13,14 durch $\wedge$ -Einführung)
- 16: $\vdash \exists u \Phi(\bar{s}, \bar{t}, u, \bar{m})$ (aus 15 durch $\exists$ -Einführung)
- 17: $\vdash \phi_{f'}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{m}, \bar{0}, \bar{y}_0)$ (aus 16,12,13 durch 2-fache $\wedge$ -Einführung)

4 Primitiv-rekursive Funktionen

18: $\vdash \phi_f(\overline{m}, \overline{0}, \overline{y_0})$ (aus 17 durch 2-fache $\exists$ -Einführung)

Fall $n > 0$:

Für $0 \leq i \leq n$ folgt:

1: $\vdash \phi_\beta(\overline{s}, \overline{t}, \overline{i+1}, \overline{y_{i+1}})$ (Lemma 4.19 (i))

2: $\vdash \phi_\beta(\overline{s}, \overline{t}, \overline{i}, \overline{y_i})$ (Lemma 4.19 (i))

3: $\vdash \phi_g(\overline{m}, \overline{i}, \overline{y_i}, \overline{y_{i+1}})$ (ϕ_g repräsentiert g)

4: $\vdash \Psi(\overline{s}, \overline{t}, \overline{y_{i+1}}, \overline{y_i}, \overline{m}, \overline{i})$ (aus 1,2,3 durch 2-fache $\wedge$ -Einführung)

5: $\vdash \exists u \exists v \Psi(\overline{s}, \overline{t}, u, v, \overline{m}, \overline{i})$ (aus 4 durch 2-fache $\exists$ -Einführung)

6: $\vdash \forall i < \overline{n} (\exists u \exists v \Psi(\overline{s}, \overline{t}, u, v, \overline{m}, i))$ (aus 5 durch Proposition 4.20 (i))

7: $\vdash \exists u \Phi(\overline{s}, \overline{t}, u, \overline{m})$ (wie bei Fall $n = 0$ Schritte 13 - 16)

8: $\vdash \phi_\beta(\overline{s}, \overline{t}, \overline{n}, \overline{y_n})$ (Lemma 4.19 (i))

9: $\vdash \phi_{f'}(\overline{s}, \overline{t}, \overline{m}, \overline{n}, \overline{y_n})$ (aus 7,6,8 durch 2-fache $\wedge$ -Einführung)

10: $\vdash \phi_f(\overline{m}, \overline{n}, \overline{y_n})$ (aus 9 durch 2-fache $\exists$ -Einführung)

Es sei z eine variable. Für den Nachweis von (D2) und (D3) genügt es nach Lemma 4.9 folgende Aussage zu beweisen:

$$\phi_f(\overline{m}, \overline{n}, z) \rightarrow z \doteq \overline{y_n}$$

Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über n .

Induktionsanfang: Gelte also nun $n = 0$.

1: $\phi_f(\overline{m}, \overline{0}, z) \vdash \phi_f(\overline{m}, \overline{0}, z)$ (Deduktionsannahme)

Es seien a, b Variablen, die in keiner vorherigen Annahme frei auftreten mit $a \neq b$.

2: ", $\exists t \phi_{f'}(a, t, \overline{m}, \overline{0}, z) \vdash \exists t \phi_{f'}(a, t, \overline{m}, \overline{0}, z)$ (Deduktionsannahme)

3: ", ", $\phi_{f'}(a, b, \overline{m}, \overline{0}, z) \vdash \phi_{f'}(a, b, \overline{m}, \overline{0}, z)$ (Deduktionsannahme)

4: ", ", " $\vdash \exists u \Phi(a, b, u, \overline{m})$ (aus 3 durch $\wedge$ -Elimination)

5: ", ", " $\vdash \phi_\beta(a, b, \overline{0}, z)$ (aus 3 durch $\wedge$ -Elimination)

Es sei c eine Variable, die in keiner vorherigen Annahme frei auftritt.

6: ", ", ", $\Phi(a, b, c, \overline{m}) \vdash \Phi(a, b, c, \overline{m})$ (Deduktionsannahme)

7: ", ", ", " $\vdash \phi_\beta(a, b, \overline{0}, c)$ (aus 6 durch $\wedge$ -Elimination)

8: ", ", ", " $\vdash \phi_h(\overline{m}, c)$ (aus 6 durch $\wedge$ -Elimination)

9: ", ", ", " $\vdash \phi_h(\overline{m}, \overline{y_0})$ (ϕ_h repräsentiert h)

4 Primitiv-rekursive Funktionen

- 10:** ", ", ", " $\vdash \phi_h(\overline{m}, c) \wedge \phi_h(\overline{m}, \overline{y_0})$ (aus 8,9 durch $\wedge$ -Einführung)
- 11:** ", ", ", " $\vdash \phi_h(\overline{m}, c) \wedge \phi_h(\overline{m}, \overline{y_0}) \rightarrow c \doteq \overline{y_0}$ (ϕ_h repräsentiert h)
- 12:** ", ", ", " $\vdash c \doteq \overline{y_0}$ (aus 10,11 durch MP)
- 13:** ", ", ", " $\vdash \phi_\beta(a, b, \overline{0}, \overline{y_0})$ (aus 12,7 durch $\doteq$ -Substitution)
- 14:** ", ", ", " $\vdash \phi_\beta(a, b, \overline{0}, z) \wedge \phi_\beta(a, b, \overline{0}, \overline{y_0})$ (aus 5,13 durch $\wedge$ -Einführung)
- 15:** ", ", ", " $\vdash \phi_\beta(a, b, \overline{0}, z) \wedge \phi_\beta(a, b, \overline{0}, \overline{y_0}) \rightarrow z \doteq \overline{y_0}$ (Lemma 4.19 (ii))
- 16:** ", ", ", " $\vdash z \doteq \overline{y_0}$ (aus 14,15 durch MP)

Mit 3-facher $\exists$ -Elimination und dem Deduktionstheorem folgt die Aussage.

Induktionsschritt: Gelte also $\phi_f(\overline{m}, \overline{n}, z) \rightarrow z \doteq \overline{y_n}$ für ein beliebiges n .

- 1:** $\phi_f(\overline{m}, \overline{n+1}, \overline{y_{n+1}}) \vdash \phi_f(\overline{m}, \overline{n+1}, \overline{y_{n+1}})$ (Deduktionsannahme)
- Es seien c, d Variablen, die in keiner vorherigen Annahme frei auftreten mit $c \neq d$.
- 2:** ", $\exists t \phi_{f'}(c, t, \overline{m}, \overline{n+1}, z) \vdash \exists t \phi_{f'}(c, t, \overline{m}, \overline{n+1}, z)$ (Deduktionsannahme)
- 3:** ", ", $\phi_{f'}(c, d, \overline{m}, \overline{n+1}, z) \vdash \phi_{f'}(c, d, \overline{m}, \overline{n+1}, z)$ (Deduktionsannahme)
- 4:** ", ", " $\vdash \exists u \Phi(c, d, u, \overline{m})$ (aus 3 durch $\wedge$ -Elimination)
- 5:** ", ", " $\vdash \forall i < \overline{n+1} (\exists u \exists v \Psi(c, d, u, v, \overline{m}, i))$ (aus 3 durch $\wedge$ -Elimination)
- 6:** ", ", " $\vdash \phi_\beta(c, d, \overline{n+1}, z)$ (aus 3 durch $\wedge$ -Elimination)
- 7:** ", ", " $\vdash \exists u \exists v \Psi(c, d, u, v, \overline{m}, \overline{n})$ (aus 5 durch Proposition 4.20 (ii))

Für $0 \leq j \leq n-1$ folgt:

- 8:** ", ", " $\vdash \exists u \exists v \Psi(c, d, u, v, \overline{m}, \overline{j})$ (aus 5 durch Proposition 4.20 (ii))
- 9:** ", ", " $\vdash \forall i < \overline{n} (\exists u \exists v \Psi(c, d, u, v, \overline{m}, i))$ (aus 8 durch Proposition 4.20 (i))

Es seien u', v' Variablen, die in keiner vorherigen Annahme frei auftreten mit $u' \neq v'$.

- 10:** ", ", ", $\exists v \Psi(c, d, u', v, \overline{m}, \overline{n}) \vdash \exists v \Psi(c, d, u', v, \overline{m}, \overline{n})$ (Deduktionsannahme)
- 11:** ", ", ", ", $\Psi(c, d, u', v', \overline{m}, \overline{n}) \vdash \Psi(c, d, u', v', \overline{m}, \overline{n})$ (Deduktionsannahme)
- 12:** ", ", ", ", " $\vdash \phi_\beta(c, d, \overline{n+1}, u')$ (aus 11 durch $\wedge$ -Elimination)
- 13:** ", ", ", ", " $\vdash \phi_\beta(c, d, \overline{n}, v')$ (aus 11 durch $\wedge$ -Elimination)
- 14:** ", ", ", ", " $\vdash \phi_g(\overline{m}, \overline{n}, v', u')$ (aus 11 durch $\wedge$ -Elimination)
- 15:** ", ", ", ", " $\vdash \phi_{f'}(c, d, \overline{m}, \overline{n}, v')$ (aus 4,9,13 durch 2-fache $\wedge$ -Einführung)
- 16:** ", ", ", ", " $\vdash \phi_f(\overline{m}, \overline{n}, v')$ (aus 15 durch 2-fache $\exists$ -Einführung)
- 17:** ", ", ", ", " $\vdash \phi_f(\overline{m}, \overline{n}, v') \rightarrow v' \doteq \overline{y_n}$ (Induktionsannahme)

4 Primitiv-rekursive Funktionen

- 18:** ", ", ", ", " $\vdash v' \doteq \overline{y_n}$ (aus 16,17 durch MP)
- 19:** ", ", ", ", " $\vdash \phi_g(\overline{m}, \overline{n}, \overline{y_n}, u')$ (aus 14,18 durch $\doteq$ -Substitution)
- 20:** ", ", ", ", " $\vdash \phi_g(\overline{m}, \overline{n}, \overline{y_n}, \overline{y_{n+1}})$ (ϕ_g repräsentiert g)
- 21:** ", ", ", ", " $\vdash \phi_g(\overline{m}, \overline{n}, \overline{y_n}, u') \wedge \phi_g(\overline{m}, \overline{n}, \overline{y_n}, \overline{y_{n+1}})$ (aus 19,20 durch $\wedge$ -Einführung)
- 22:** ", ", ", ", " $\vdash \phi_g(\overline{m}, \overline{n}, \overline{y_n}, u') \wedge \phi_g(\overline{m}, \overline{n}, \overline{y_n}, \overline{y_{n+1}}) \rightarrow u' \doteq \overline{y_{n+1}}$ (ϕ_g repräsentiert g)
- 23:** ", ", ", ", " $\vdash u' \doteq \overline{y_{n+1}}$ (aus 21,22 durch MP)
- 24:** ", ", ", ", " $\vdash \phi_\beta(c, d, \overline{n+1}, \overline{y_{n+1}})$ (aus 12,23 durch $\doteq$ -Substitution)
- 25:** ", ", ", ", " $\vdash \phi_\beta(c, d, \overline{n+1}, z) \wedge \phi_\beta(c, d, \overline{n+1}, \overline{y_{n+1}})$ (aus 3,24 durch $\wedge$ -Einführung)
- 26:** ", ", ", ", " $\vdash \phi_\beta(c, d, \overline{n+1}, z) \wedge \phi_\beta(c, d, \overline{n+1}, \overline{y_{n+1}}) \rightarrow z \doteq \overline{y_{n+1}}$ (Lemma 4.19 (ii))
- 27:** ", ", ", ", " $\vdash z \doteq \overline{y_{n+1}}$ (aus 25,26 durch MP)

Mit 4-facher $\exists$ -Elimination und dem Deduktionstheorem folgt die Aussage.

□

Korollar 4.22 (Darstellbarkeit primitiv-rekursiver Funktionen). *Jede primitiv-rekursive Funktion ist in PA darstellbar.*

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 4.11, Lemma 4.13 und Lemma 4.21. □

Korollar 4.23 (Darstellbarkeit primitiv-rekursiver Relationen). *Jede primitiv-rekursive Relation ist in PA darstellbar.*

Wir übernehmen den Beweis aus Hoffmann 2017 S.279-280 Kapitel 5.4 Satz 5.5 ohne wesentliche Änderung.

Beweis. Es sei $R \subset \mathbb{N}^k$ eine primitiv-rekursive Relation. Nach Definition existiert also eine primitiv-rekursive Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$, so dass $R(x_1, \dots, x_k) \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_k) = 0$ gilt. Da alle primitiv-rekursiven Funktionen nach Korollar 4.22 in PA darstellbar sind, gibt es eine Formel $\phi(x_1, \dots, x_k, y)$, so dass für alle $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f(n_1, \dots, n_k) = 0 &\Rightarrow \vdash \phi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{0}) \\ f(n_1, \dots, n_k) \neq 0 &\Rightarrow \vdash \neg \phi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{0}) \end{aligned}$$

gilt. Es folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} (n_1, \dots, n_k) \in R &\Rightarrow \vdash \phi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{0}) \\ (n_1, \dots, n_k) \notin R &\Rightarrow \vdash \neg \phi(\overline{n_1}, \dots, \overline{n_k}, \overline{0}). \end{aligned}$$

R wird also durch die Formel $\phi(x_1, \dots, x_k, \overline{0})$ repräsentiert. □

5 Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze

5.1 Arithmetisierung der Syntax

Es folgt wohl eine der zentralsten Ideen für den Beweis des ersten Unvollständigkeitssatzes.

Bemerkung 5.1. Es sei K ein formales System mit zugehöriger Sprache L . Eine endliche Folge von Symbolen $u_1, \dots, u_k$ in L bezeichnen wir im folgenden als Ausdruck in K .

Wir entnehmen folgende Definition aus Mendelson 2015 S.192 Kapitel 3.4.

Definition 5.2 (Gödelnummern). Sei K ein beliebiges formales System bezüglich einer Sprache L , welches die Axiome und die Schlussregel der Prädikatenlogik erster Stufe beinhaltet. Jedem Symbol u von K ordnen wir eine ungerade natürliche Zahl $g(u)$ zu, welche wir als die *Gödelnummer* von u bezeichnen. g wird wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} g(()) &= 3, & g(()) &= 5, & g(,) &= 7, & g(\neg) &= 9, & g(\rightarrow) &= 11, & g(\forall) &= 13, \\ g(x_k) &= 13 + 8k, & \text{für alle Variablen } x_k \text{ in } L \text{ mit } k &\geq 1, \\ g(a_k) &= 7 + 8k, & \text{für alle Konstanten } a_k \text{ in } L \text{ mit } k &\geq 1, \\ g(f_k^n) &= 1 + 8(2^n 3^k), & \text{für alle } n\text{-stelligen Funktionen } f_k^n \text{ in } L \text{ mit } k, n &\geq 1, \\ g(A_k^n) &= 3 + 8(2^n 3^k), & \text{für alle } n\text{-stelligen Relationen } A_k^n \text{ in } L \text{ mit } k, n &\geq 1. \end{aligned}$$

Wir schreiben p_j für die j -te Primzahl und setzen $p_0 := 2$. Für jeden Ausdruck $f := u_0 u_1 \dots u_k$ in K bezeichnen wir mit

$$g(u_0 u_1 \dots u_k) := 2^{g(u_0)} \times 3^{g(u_1)} \times \dots \times p_k^{g(u_k)}$$

die *Gödelnummer* von f .

Für endliche Folgen von Ausdrücken $\pi := [f_0, f_1, \dots, f_r]$ in K bezeichnen wir mit

$$g(f_0, f_1, \dots, f_r) := 2^{g(f_0)} \times 3^{g(f_1)} \times \dots \times p_r^{g(f_r)}$$

die *Gödelnummer* von π .

Aufgrund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung können wir also jeder Formel und jedem Beweis eine eindeutige Gödelnummer zuordnen. Wenn wir die Gödelnummern von Formeln bestimmen wollen, dürfen wir natürlich nicht unsere abkürzende Notation der Formelschreibweise nutzen, sondern müssen Funktionen und Relationen ausschreiben. Außerdem muss das Setzen von Klammern nach festen Regeln vollzogen

werden. Wir können jedoch leicht aus der von uns verwendeten Notation Formeln gewinnen, welche nach diesen strikten Regeln notiert werden (vergleiche hierfür Mendelson 2015 S. 48 Kapitel 2.1.1).

Beispiel 5.3. Wir wollen zur Veranschaulichung die Gödelnummern der Formeln

$$\varphi_1 := \forall x_1 (x_1 \doteq x_1), \quad \varphi_2 := \forall x_1 (x_1 \doteq x_1) \rightarrow \bar{0} \doteq \bar{0}, \quad \varphi_3 := \bar{0} \doteq \bar{0}$$

bestimmen. Dafür müssen wir zunächst die Klammern wiederherstellen und die Relation $\doteq$ ausschreiben¹:

$$\varphi_1 := ((\forall x_1) \doteq(x_1, x_1)), \quad \varphi_2 := (((\forall x_1) \doteq(x_1, x_1)) \rightarrow \doteq(\bar{0}, \bar{0})), \quad \varphi_3 := \doteq(\bar{0}, \bar{0})$$

Setzen wir für die Sprache der Arithmetik

$$a_1 := \bar{0}, \quad f_1^1 := S, \quad f_2^2 := +, \quad f_3^2 := \dot{\times} \text{ und } A_1^2 := \doteq$$

erhalten wir die Formeln:

$$\varphi_1 := ((\forall x_1) A_1^2(x_1, x_1)), \quad \varphi_2 := (((\forall x_1) A_1^2(x_1, x_1)) \rightarrow A_1^2(a_1, a_1)), \quad \varphi_3 := A_1^2(a_1, a_1)$$

Damit ergeben sich die folgenden Gödelnummern:

$$\begin{aligned} g(\varphi_1) &= 2^{g(()} \times 3^{g(()} \times 5^{g(\forall)} \times 7^{g(x_1)} \times 11^{g(()} \times 13^{g(A_1^2)} \times 17^{g(()} \times 19^{g(x_1)} \times 23^{g(,)} \times 29^{g(x_1)} \times \\ &\quad 31^{g(()} \times 37^{g(()} \\ &= 2^3 \times 3^3 \times 5^{13} \times 7^{13+8} \times 11^5 \times 13^{3+8(2^2 \times 3^1)} \times 17^3 \times 19^{13+8} \times 23^7 \times 29^{13+8} \times 31^5 \times 37^5 \\ &= 55070653948729998508791264959275363796685444037591782450474761807236 \\ &\quad 81627871079924872719583484015884279271234148210103630473218906973517 \\ &\quad 60760963559415377396115002959856627285714879830484493040751803489398855 \\ &\quad 299747878498837890625000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\varphi_2) &= 2^{g(()} \times 3^{g(()} \times 5^{g(()} \times 7^{g(\forall)} \times 11^{g(x_1)} \times 13^{g(()} \times 17^{g(A_1^2)} \times 19^{g(()} \times 23^{g(x_1)} \times 29^{g(,)} \times \\ &\quad 31^{g(x_1)} \times 37^{g(()} \times 41^{g(()} \times 43^{g(\rightarrow)} \times 47^{g(A_1^2)} \times 53^{g(()} \times 59^{g(a_1)} \times 61^{g(,)} \times 67^{g(a_1)} \times \\ &\quad 71^{g(()} \times 73^{g(()} \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\varphi_3) &= 2^{g(A_1^2)} \times 3^{g(()} \times 5^{g(x_1)} \times 7^{g(,)} \times 11^{g(x_1)} \times 13^{g(()} \\ &= \dots \end{aligned}$$

$\pi := [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$ ist ein Beweis für φ_3 in PA. Diesem können wir ebenfalls eine eindeutige Gödelnummer $g(\pi) = 2^{g(\varphi_1)} \times 3^{g(\varphi_2)} \times 5^{g(\varphi_3)}$ zuordnen.

Wir haben jetzt also ein Werkzeug in der Hand mit dem wir auf der Metaebene mit natürlichen Zahlen über PA-Formeln und -Beweise sprechen können. Dementsprechend können wir auch Relationen betrachten wie

$$(x, y) \in \mathbf{Bew} \subset \mathbb{N}^2 \Leftrightarrow$$

x ist Gödelnummer eines PA-Beweises für die Formel mit Gödelnummer y .

¹vergleiche wieder Mendelson 2015 S. 48 Kapitel 2.1.1

Erinnern wir uns daran, dass wir in Kapitel 4 die Darstellbarkeit primitiv-rekursiver Relationen in PA 4.23 bewiesen haben. Wenn wir jetzt noch zeigen können, dass die Relation **Bew** beziehungsweise Varianten dieser primitiv-rekursiv sind, können wir die Darstellbarkeitseigenschaft nutzen, um eine PA-Formel zu finden, deren Beweisbarkeit (innerhalb von PA) von der Relation **Bew** (Metaebene) abhängig ist.

5.2 Der erste Unvollständigkeitssatz

Notation 5.4. Es sei G eine Menge von Gödelnummern. Wir definieren

$$\text{PA} \cup G := \text{PA} \cup \{\phi \mid g(\phi) \in G\}.$$

Proposition 5.5 (Ausgewählte primitiv-rekursive Relationen und Funktionen). *Es sei χ eine primitiv-rekursive Menge von Gödelnummern von Formeln. Folgende Relationen und Funktionen sind primitiv-rekursiv:*

- (i) ***Sub**: $\mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$, $(y, u, v) \mapsto$ Gödelnummer des Ergebnisses der Substitution des Terms mit der Gödelnummer u in den Ausdruck mit der Gödelnummer y an allen freien Vorkommen der Variablen mit der Gödelnummer v (bezüglich $\text{PA} \cup \chi$).*
- (ii) ***Num**: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto g(\bar{n})$ (Gödelnummer von $\bar{n}$ bezüglich $\text{PA} \cup \chi$)*
- (iii) *$\text{Bew}_\chi(x, y) := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ ist die Gödelnummer eines Beweises der Formel mit Gödelnummer } y \text{ in } \text{PA} \cup \chi\}$ ²*

Wir zitieren diese Aussage lediglich und verweisen für einen detaillierten Nachweis auf Mendelson 2015 S.194-200 Kapitel 3.4 Proposition 3.26, 3.27 und 3.28.

Wir weisen an dieser Stelle noch auf einen Unterschied zwischen der zitierten Quelle und dieser Arbeit bezüglich der verwendeten Definitionen hin. Mendelson verwendet eine andere Axiomatisierung für PL1 (siehe Mendelson 2015 S.66-67 Definition 2.3.1 und Definition 2.3.3) als die, die wir in dieser Arbeit verwenden. Es lassen sich jedoch die von uns verwendeten Axiome (L1) - (L6) in Mendelsons Axiomatisierung herleiten. Wir führen dies an dieser Stelle nicht aus. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit lässt sich also jeder unserer PL1-Beweise in Mendelsons Axiomatisierung herleiten. Wenn wir also in Proposition 5.5 und in allen nachfolgenden Ausführungen dieser Arbeit von einem Beweis sprechen, ist damit ein Beweis im Sinne der in der zitierten Quelle verwendeten Axiomatisierung gemeint.

Nachfolgende Definition entnehmen wir aus Hoffmann 2017 S.291 kapitel 6.1 Definition 6.2.

Definition 5.6 (ω -Widerspruchsfreiheit). Es sei χ eine (möglicherweise leere) Menge von Formeln. $\text{PA} \cup \chi$ heißt ω -widerspruchsfrei, falls für alle Formeln ϕ mit genau einer freien Variablen

$$\vdash \phi(\bar{n}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \not\vdash \neg \forall x \phi(x) \text{ gilt.}$$

²Mendelson bezeichnet PA in seinem Buch mit S .

5 Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze

Des Weiteren bezeichnen wir eine Menge von Gödelnummern G als ω -widerspruchsfrei, wenn $\text{PA} \cup G$ ω -widerspruchsfrei ist.

Die ω -Widerspruchsfreiheit ist eine stärkere Variante der gewöhnlichen Widerspruchsfreiheit. Gödel benötigte diese in seiner Arbeit, um den ersten Unvollständigkeitssatz zu beweisen. Mit stärker meinen wir:

Proposition 5.7 (ω -widerspruchsfrei $\Rightarrow$ widerspruchsfrei). *Es sei χ eine (möglicherweise leere) Menge von Formeln. Dann gilt*

$$\text{PA} \cup \chi \text{ ist } \omega\text{-widerspruchsfrei} \Rightarrow \text{PA} \cup \chi \text{ ist widerspruchsfrei.}$$

Der nachfolgende Beweis wurde eigenständig erarbeitet.

Beweis. Sei $\text{PA} \cup \chi$ also ω -widerspruchsfrei. Angenommen $\text{PA} \cup \chi$ wäre widersprüchlich. Wir finden also eine Formel ϕ , so dass $\vdash \phi$ und $\vdash \neg\phi$ gilt. Mit Proposition 3.10 (i) schließen wir $\vdash \neg\forall x x \doteq x$. Da aber ebenfalls $\vdash \bar{n} \doteq \bar{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, kann $\text{PA} \cup \chi$ nicht ω -widerspruchsfrei sein. Die Annahme war also falsch und $\text{PA} \cup \chi$ ist widerspruchsfrei. $\square$

Bemerkung 5.8. Die Umkehrung von Proposition 5.7 gilt im Allgemeinen nicht. Wir verweisen dafür auf Gödel 1931 S.190.

Notation 5.9. Für Formeln ϕ mit Gödelnummer $y := g(\phi)$ definieren wir

$$\phi_y := \phi_{g(\phi)} := \phi.$$

Satz 5.10 (Erster Unvollständigkeitssatz). *Es sei χ eine ω -widerspruchsfreie und primitiv rekursive Menge von Gödelnummern. Dann existiert eine Formel ϕ in A , so dass $\text{PA} \cup \chi \not\vdash \phi$ und $\text{PA} \cup \chi \not\vdash \neg\phi$ gilt (oder anders ausgedrückt $\text{PA} \cup \chi$ ist entweder nicht ω -widerspruchsfrei oder nicht negationsvollständig).*

Wir entnehmen den Beweis aus Gödel 1931 S.187-189 Satz VI.

Beweis. Die Funktionen **Sub** und **Num** sind nach Proposition 5.5 (i) und (ii) primitiv-rekursiv. Als Komposition dieser beiden Funktionen gilt dies also auch für (a) **Sub**(y , **Num**(y), 21). Da die Relation **Bew** $_{\chi}$ nach Proposition 5.5 (iii) ebenfalls primitiv-rekursiv ist, muss selbiges auch für die Relation (b) **Bew** $_{\chi}$ (x , **Sub**(y , **Num**(y), 21)) gelten. Mit Lemma 4.5 folgt schließlich, dass (c) $Q(x, y) := \mathbb{N}^2 \setminus \text{Bew}_{\chi}(x, \text{Sub}(y, \text{Num}(y), 21))$ primitiv-rekursiv ist.

Es erschließen sich die folgenden inhaltlichen Bedeutungen:

- (a) $\text{Sub}(y, \text{Num}(y), 21) = g(\phi_y[\bar{y}/x_1])$
 $=$ Gödelnummer des Ergebnisses der Substitution von $\bar{y}$
für die Variable x_1 in ϕ_y
- (b) $\text{Bew}_{\chi}(x, \text{Sub}(y, \text{Num}(y), 21)) \Leftrightarrow$
 x ist die Gödelnummer eines Beweises für $\phi_y[\bar{y}/x_1]$ in $\text{PA} \cup \chi$
- (c) $Q(x, y) \Leftrightarrow$
 x ist keine Gödelnummer eines Beweises für die Formel $\phi_y[\bar{y}/x_1]$ in $\text{PA} \cup \chi$

5 Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze

Wir stellen fest, dass $\text{PA} \vdash \phi \Rightarrow \text{PA} \cup \chi \vdash \phi$ für alle Formeln ϕ gilt. Zusammen mit der Darstellbarkeit primitiv-rekursiver Relationen in PA 4.23 finden wir eine Formel $\psi_q(x_2, x_1)$ mit Gödelnummer q , wobei x_1, x_2 frei in ψ_q sind, so dass

$$(x, y) \in Q \Rightarrow \text{PA} \cup \chi \vdash \psi_q(\bar{x}, \bar{y}) \text{ und } (x, y) \notin Q \Rightarrow \text{PA} \cup \chi \vdash \neg \psi_q(\bar{x}, \bar{y}) \text{ gilt.} \quad (\text{d})$$

Weiter definieren wir die Formel $\phi_p(x_2) := \forall x_2 \psi_q(x_2, x_1)$ mit Gödelnummer p und die Formel $\phi_r(x_2) := \psi_q(x_2, \bar{p})$ mit Gödelnummer r .

Setzen wir nun p für y in Q ein folgern wir aus (d) unter Berücksichtigung der eben definierten Formeln:

$$(x, p) \in Q \Rightarrow \text{PA} \cup \chi \vdash \phi_r(\bar{x}) \text{ und } (x, p) \notin Q \Rightarrow \text{PA} \cup \chi \vdash \neg \phi_r(\bar{x}) \quad (\text{e})$$

Außerdem beobachten wir

$$\phi_p(x_1)[\bar{p}/x_1] = (\forall x_2 \psi_q(x_2, x_1))[\bar{p}/x_1] = \forall x_2 \psi_q(x_2, \bar{p}) = \forall x_2 \phi_r(x_2). \quad (\text{f})$$

Mit (c), (e) und (f) schließen wir

$$\begin{aligned} x \text{ ist keine Gödelnummer eines Beweises für } \forall x_2 \phi_r(x_2) &\Leftrightarrow (x, p) \in Q \quad (\text{g}) \\ &\Rightarrow \text{PA} \cup \chi \vdash \phi_r(\bar{x}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x \text{ ist Gödelnummer eines Beweises für } \forall x_2 \phi_r(x_2) &\Leftrightarrow (x, p) \notin Q \quad (\text{h}) \\ &\Rightarrow \text{PA} \cup \chi \vdash \neg \phi_r(\bar{x}). \end{aligned}$$

Die Formel $\forall x_2 \phi_r(x_2)$ ist die gesuchte nicht entscheidbare Formel.

Angenommen es gelte $\text{PA} \cup \chi \vdash \forall x_2 \phi_r(x_2)$. Dann muss es ein $n \in \mathbb{N}$ geben, welches die Gödelnummer eines Beweises von $\forall x_2 \phi_r(x_2)$ ist. Nach (h) folgt daraus $\text{PA} \cup \chi \vdash \neg \phi_r(\bar{n})$. Mit Axiom (L6) lässt sich aus $\text{PA} \cup \chi \vdash \forall x_2 \phi_r(x_2)$ aber $\text{PA} \cup \chi \vdash \phi_r(\bar{n})$ folgern, wonach $\text{PA} \cup \chi$ widersprüchlich und nach (der Kontraposition von) Proposition 5.7 ω -widersprüchlich sein müsste. Die Annahme war also falsch und es folgt somit (j) $\text{PA} \cup \chi \not\vdash \forall x_2 \phi_r(x_2)$.

Nehmen wir also nun an es gelte $\text{PA} \cup \chi \vdash \neg \forall x_2 \phi_r(x_2)$. Nach (j) gilt n' ist keine Gödelnummer eines Beweises von $\forall x_2 \phi_r(x_2)$ für alle $n' \in \mathbb{N}$. Mit (g) folgern wir weiter $\text{PA} \cup \chi \vdash \phi_r(\bar{n'})$ für alle $n' \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zur ω -Widerspruchsfreiheit. Auch diese Annahme war also falsch und wir schließen $\text{PA} \cup \chi \not\vdash \neg \forall x_2 \phi_r(x_2)$. □

Bemerkung 5.11. Wir können das formale System $\text{PA} \cup \chi$ nicht einfach vervollständigen³, indem wir die nicht entscheidbare Aussage $\forall x_2 \phi_r(x_2)$ zu seinen Axiomen hinzufügen. Die Menge $\chi \cup \{g(\forall x_2 \phi_r(x_2))\}$ ist primitiv-rekursiv und wir können somit wieder den ersten Unvollständigkeitssatz anwenden. Insbesondere gilt dies für endliche Formelmengen. So schreibt Gödel in seiner Arbeit:

³unter der Annahme der ω -Widerspruchsfreiheit

„Jede endliche Klasse α ist natürlich rekursiv.“⁴(Gödel 1931, S.190)

Da ebenfalls die Vereinigung primitiv-rekursiver Mengen wieder primitiv ist (vergleiche Gödel 1931 S.180 Satz II), gilt die zuvor aufgestellte Behauptung.

Bemerkung 5.12. Wir möchten noch eine Bemerkung bezüglich der Menge χ machen. Diese garantiert nämlich, dass der erste Unvollständigkeitssatz für eine sehr große Menge formaler Systeme anwendbar ist. So schreibt Prof. Dr. Dirk Hoffmann bezüglich der Menge χ :

„In Wirklichkeit verleiht die Menge χ dem Hauptresultat eine ungeahnte Durchschlagskraft. Aus der Tatsache, dass wir χ nahezu frei wählen können, folgt, dass die Lücken, die in das System P^5 gerissen werden, nicht durch die Hinzunahme weiterer Axiome geschlossen werden können. [...] Solange wir uns also im Bereich der seriösen Mathematik bewegen, muss jede Erweiterung von P genauso unvollständig sein wie P selbst [...]“(Hoffmann 2017, S.305)

Bemerkung 5.13. Der erste Unvollständigkeitssatz greift ebenfalls für das formale System der Mengenlehre ZFC⁶, auf dem ein Großteil der heutigen Mathematik aufgebaut wird. So schreibt Gödel in seiner Arbeit:

„Zu den Systemen, welche die Voraussetzungen [...] erfüllen, gehören, wie man leicht bestätigen kann, das Zermelo-Fraenkelsche und das v.Neumannsche Axiomensystem der Mengenlehre[...]"(Gödel 1931, S.191)

5.3 Verschärfungen des ersten Unvollständigkeitssatzes

Wir wollen noch eine Verschärfung des ersten Unvollständigkeitssatzes präsentieren, wie man sie in moderner Literatur finden kann.

So konnte zunächst John Barkley Rosser im Jahr 1936 die Voraussetzung der ω -Widerspruchsfreiheit durch Widerspruchsfreiheit ersetzen. (Hoffmann 2017, S.320)

Satz 5.14 (Erster Unvollständigkeitssatz, Rosser 1936). *Jedes widerspruchsfreie formale System, das stark genug ist, um die Peano-Arithmetik zu formalisieren, ist negationsunvollständig.*

Des Weiteren können wir die Forderung der Primitiven-Rekursivität bezüglich der Menge χ , welche wir in Satz 5.10 genutzt haben, um PA zu erweitern, abschwächen. Hierfür erweitern wir den Begriff der primitiv-rekursiven Funktionen zu den rekursiven

⁴Der Begriff 'rekursiv' in Gödels Arbeit ist gleichbedeutend mit dem von uns verwendeten Begriff 'primitiv-rekursiv'.

⁵In der Gödelschen Originalarbeit wird der erste Unvollständigkeitssatz zunächst für das formale System P bewiesen. Gödel beschreibt dieses als die Peanoschen Axiome mit der Logik der Principia Mathematica überbaut.(Gödel 1931, S.176)

⁶Die Axiome der Peano-Arithmetik sind in ZFC beweisbar (ZFC verwendet natürlich nicht die Sprache der Arithmetik. Wir können aber die Symbole $\bar{0}$, S , $+$, $\times$ innerhalb von ZFC definieren).

5 Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze

Funktionen, indem wir ein weiteres Schema zulassen, nach dem diese gebildet werden können.

Nachfolgende Definition entnehmen wir aus Mendelson 2015 S.174-175 Kapitel 3.3.

Definition 5.15 (Beschränkter μ -Operator). Sei $g(x_1, \dots, x_n, y)$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ mindestens ein $y \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$g(x_1, \dots, x_n, y) = 0.$$

Wir bezeichnen mit

$$\mu y (g(x_1, \dots, x_n, y) = 0)$$

die kleinste Zahl y , für die $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ gilt.

Ist nun

$$f(x_1, \dots, x_n) := \mu y (g(x_1, \dots, x_n, y) = 0),$$

so sagen wir, dass f mittels des *beschränkten μ -Operators* aus g gewonnen wird, falls für alle $x_1, \dots, x_n$ mindestens ein y mit $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ existiert.

Nachfolgende Definition entnehmen wir aus Mendelson 2015 S.174-175 Kapitel 3.3.

Definition 5.16 (Rekursive Funktion). Eine Funktion f heißt *rekursiv* genau dann, wenn sie aus den primitiv-rekursiven Basisfunktionen durch endlich viele Anwendungen von Komposition, Primitiver-Rekursion und des beschränkten μ -Operators gewonnen werden kann.

Bemerkung 5.17. Jede primitiv-rekursive Funktion ist also auch rekursiv.

Analog zu den Begriffen der primitiv-rekursiven Relation/Menge (4.2 und 4.3) können wir den Begriff der rekursiven Relation/Menge definieren. Des Weiteren benötigen wir folgende Begrifflichkeiten:

Definition 5.18 (rekursive (primitiv-rekursive) Axiomenmenge). Wir bezeichnen die Menge der Axiome eines formalen Systems K als *rekursiv (primitiv-rekursiv)*, wenn die Menge

$$\{y \in \mathbb{N} \mid y \text{ ist die Gödelnummer eines nicht-logischen Axioms von } K\}$$

rekursiv (primitiv-rekursiv) ist.

Wir entnehmen folgende Definition aus Mendelson 2015 S.213

Definition 5.19 (Rekursive Axiomatisierbarkeit). Ein formales System K bezeichnen wir als *rekursiv axiomatisierbar*, wenn es ein formales System K^* gibt, mit der Eigenschaft, dass die Menge seiner Axiome rekursiv ist und dieselben Theoreme wie K beweist.

Das schwächste formale System, auf das die von uns bewiesene Variante des Unvollständigkeitssatzes wirkt, ist PA. Diese Forderung kann man jedoch weiter entschärfen. Es bezeichne RR das formale System der Robinson Arithmetik. Die Axiome von RR sind in PA beweisbar. Es handelt sich also in diesem Sinne um ein schwächeres formales System als PA (vergleiche Mendelson 2015 S.202-203).

Wir können nun eine verschärfte Variante des ersten Unvollständigkeitssatzes präsentieren:

Wir zitieren das Resultat ohne Beweis aus Mendelson 2015 S.222 Korollar 3.48.

Satz 5.20 (Erster Unvollständigkeitssatz (moderne Fassung)). *Es sei χ eine Formelmengende bezüglich A . Wenn $RR \cup \chi$ widerspruchsfrei und rekursiv axiomatisierbar ist, dann ist es auch negationsunvollständig.*

5.4 Der zweite Unvollständigkeitssatz

Abschließend wollen wir noch den 2. Unvollständigkeitssatz präsentieren.

Zunächst sei eine Formelmengende χ bezüglich A gegeben, so dass $PA \cup \chi$ rekursiv axiomatisierbar ist. Die Relation

$$\text{Pf}_\chi(x, y) \Leftrightarrow$$

x ist die Gödelnummer eines Beweises der Formel mit Gödelnummer y bezüglich $PA \cup \chi$ und die Funktion

$$\text{Neg} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$$

$$n \mapsto \text{Gödelnummer der Negation der Formel mit Gödelnummer } n \text{ bezüglich } A$$

sind rekursiv (vergleiche Mendelson 2015 S.198 Proposition 3.26 und S.200 Proposition 3.28).

Wir haben für PA (und damit auch für $PA \cup \chi$) die Darstellbarkeit primitiv-rekursiver Funktionen (Relationen) bereits bewiesen (Korollar 4.22 und Korollar 4.23). Man kann dieses Resultat noch erweitern und die Darstellbarkeit rekursiver Funktionen (Relationen) beweisen (vergleiche Mendelson 2015 S.188 Proposition 3.24). Wir folgern also, dass $\text{Pf}_\chi(x, y)$ und $\text{Neg}(x)$ in $PA \cup \chi$ darstellbar sind. Somit finden wir Formeln $\mathcal{P}_\chi(x, y)$ und $\mathcal{N}(x, y)$, die diese repräsentieren.

Wir können nun die Definition einer Formel angeben, die den Begriff der Widerspruchsfreiheit innerhalb eines formalen Systems formalisiert:

wir entnehmen die nachfolgende Definition aus Mendelson 2015 S.215.

Definition 5.21 (Widerspruchsfreiheitsaussage $\text{Con}_{PA \cup \chi}$). Wir definieren $\text{Con}_{PA \cup \chi}$ als die folgende geschlossene Formel von $PA \cup \chi$:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \neg \left(\mathcal{P}_\chi(x_1, x_3) \wedge \mathcal{P}_\chi(x_2, x_4) \wedge \mathcal{N}(x_3, x_4) \right).$$

Unter der Standardinterpretation besagt $\text{Con}_{PA \cup \chi}$, dass es in $PA \cup \chi$ nicht möglich ist, eine Formel und die Negation der Formel zu beweisen, d.h. dass das System $PA \cup \chi$ widerspruchsfrei ist.

Damit können wir den zweiten Unvollständigkeitssatz formulieren:⁷

Wir zitieren das nachfolgende Resultat ohne Beweis aus Mendelson 2015 S.217 Proposition 3.42.

Satz 5.22 (Zweiter Unvollständigkeitssatz). *Wenn $PA \cup \chi$ widerspruchsfrei ist, dann gilt $\not\vdash \text{Con}_{PA \cup \chi}$.*

5.5 „Ignoramus et ignorabimus“ oder „Wir werden wissen“?

Nachdem wir die Gödelschen Resultate nun ausführlich betrachtet haben, wollen wir diese in einer persönlichen Stellungnahme bezüglich der wissenschaftsphilosophischen Positionen von Emil du Bois-Reymond und David Hilbert einordnen, die uns aus der Einleitung 1 bekannt sind.

Du Bois-Reymond vertrat im wesentlichen die Position 'Ignoramus et ignorabimus'⁸.

Ihm gegenüber stand Hilbert mit seinem Ausspruch „[...] Wir müssen wissen. Wir werden wissen.“ (Hilbert 2014)

So wirkt es zunächst so, dass die Gödelschen Unvollständigkeitssätze gerade eben beschreiben, dass hinsichtlich formaler Systeme Aussagen existieren, die sich dem Griff eines Beweises zu entziehen scheinen und wenn dies nicht zutrifft, wäre unser Beweissystem widersprüchlich⁹. Falls unser formales System nun widerspruchsfrei ist, können wir uns dessen innerhalb der Grenzen des formalen Systems selbst nicht sicher sein, aufgrund der Unmöglichkeit, die eigene Widerspruchsfreiheit zu beweisen. Auf den ersten Blick wirkt wohl alles so, als müsse man sich du Bois-Reymond anschließen und sagen: „Wir wissen nicht. Mit absoluter Sicherheit sagen wir: 'Wir werden nicht wissen!'“

Gödels Ergebnis darf aber nicht als endgültiger Sieg des 'Ignoramus et ignorabimus' verstanden werden, sondern als eine Antwort auf die Frage nach den Grenzen des Wissens¹⁰. So sind die Gödelschen Unvollständigkeitssätze keine Kapitulation vor der Erkenntnis, sondern vielmehr selbst Teil der Erkenntnis. Sie zeigen, dass sich formale Systeme vielleicht nicht unbedingt dafür eignen die Mathematik in ihrer Gesamtheit abzubilden, sondern dass es sich bei ihnen um Werkzeuge handelt, die Teile der Mathematik auf eine sehr kontrollierbare Art und Weise beschreiben können. Ihre Grenzen sind nicht nur eine Einschränkung, sondern vielmehr Gegenstand mathematischen Wissens. So darf man sich niemals in der Mathematik damit begnügen 'nicht

⁷Wir erinnern an dieser Stelle nochmal daran, dass Mendelson PA mit S bezeichnet. Er beweist den 2. Unvollständigkeitssatz nur für S . Er schreibt aber zuvor: „For the sake of definiteness, we shall limit ourselves to the theory S , although everything we say also holds for recursively axiomatizable extensions of S .“ (Mendelson 2015, S.215)

⁸Wir wissen nicht und wir werden nicht wissen.

⁹Alle hier getätigten Aussagen beziehen sich natürlich nur auf solche formale Systeme, die die Voraussetzungen des ersten oder zweiten Unvollständigkeitssatzes erfüllen.

¹⁰bezüglich formaler Systeme

5 Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze

zu wissen' oder viel schlimmer noch der Überzeugung zu sein, dass man 'niemals wissen werde'. Wie Hilbert vor fast 100 Jahren wollen auch wir ausrufen: „[...] Statt des törichten Ignorabimus heiße im Gegenteil unsere Losung: Wir müssen wissen. Wir werden wissen.“(Hilbert 2014)

Literatur

- [Bat24] Serafim Batzoglou. *Introduction to Incompleteness. From Gödel's Theorems to Forcing and the Continuum Hypothesis*. Birkhäuser, 2024.
- [Boi72] Emil du Bois-Reymond. *Über die Grenzen des Naturerkennens*. Deutsches Textarchiv. 1872. URL: https://www.deutschestextarchiv.de/dubois_naturerkennen_1872 (besucht am 09.12.2025).
- [Fra22] Adolf Fraenkel. „Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre“. In: *Mathematische Annalen* 86 (1922), S. 230–237.
- [Göd31] Kurt Gödel. „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I“. In: *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931), S. 173–198.
- [Hil14] David Hilbert. *David Hilbert's Radio Address – German Transcription*. Hrsg. von James T. Smith. deutsches Transkript von Hilberts Radioansprache aus dem Jahr 1930 mit Tonaufnahme. Mathematical Association of America. 2014. URL: <https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/david-hilberts-radio-address-german-transcription> (besucht am 09.12.2025).
- [Hil22] David Hilbert. „Die logischen Grundlagen der Mathematik“. In: *Mathematische Annalen* 88.1 – 2 (Sep. 1922), S. 151–156. ISSN: Print 0025-5831, Online 1432-1807. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01448445>.
- [Hof17] Dirk W. Hoffmann. *Die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze. Eine geführte Reise durch Kurt Gödels historischen Beweis*. 2. Aufl. Springer Spektrum, 2017.
- [Kle74] Stephen Cole Kleene. *Introduction to Metamathematics*. 7. Aufl. Bibliotheca mathematica 1. Wolters-Noordhoff Publishing; North-Holland Publishing Company, 1974.
- [Men15] Elliott Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. 6. Aufl. CRC Press, 2015.
- [WR10] Alfred North Whitehead und Bertrand Russell. *Principia Mathematica*. 3 Bde. Cambridge: Cambridge University Press, 1910–1913.
- [Zer08] Ernst Zermelo. „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I“. In: *Mathematische Annalen* 65 (1908), S. 261–281.
- [Zie10] Martin Ziegler. *Mathematische Logik*. Birkhäuser, 2010.

Alle Zitate wurden an die heutige deutsche Rechtschreibung angepasst.

In wörtlichen Zitaten wurden die Fußnoten des Originals weggelassen.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, wurden unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Diese Arbeit wurde weder vollständig noch in Teilen einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und ist bislang nicht veröffentlicht worden.

Ort, Datum, Unterschrift