



Ludwig-Maximilians-Universität München
Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik

Mathematische Grundlagen der nichteuclidischen Geometrie

Bachelorarbeit

Studiengang: Wirtschaftsmathematik
Matrikelnummer: 12637447
Verfasser: Emanuel Joachim Saller
E-Mail: E.Saller@campus.lmu.de

Erstbetreuer: Dr. Dirk André Deckert
Zweitkorrektorin: Dr. Paula Reichert
Abgabedatum: 05. August 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung: Von Euklid zur nichteuklidischen Geometrie	1
2	Legendres Versuch, das Parallelenpostulat herzuleiten	5
3	Absolute Geometrie nach Janos Bolyai	15
4	Lobatschewskische Geometrie	23
5	Poincaré-Scheiben Modell	31
	Literaturverzeichnis	39

1 Einleitung: Von Euklid zur nichteuklidischen Geometrie

Der Ursprung der nichteuklidischen Geometrie, wie wir sie heute kennen, liegt in einer jahrhundertelangen Diskussion über die Grundlagen der Geometrie. Zentral waren hierbei bestimmte Aspekte von Euklids Werk „Die Elemente“, das noch bis ins 19. Jahrhundert hinein das Standardlehrbuch der Geometrie war. Euklid versuchte, die Geometrie systematisch aus klaren Definitionen, Postulaten und Axiomen abzuleiten – ein Ansatz, der später zum allgemeinen Vorbild für wissenschaftliche Arbeiten in der Mathematik wurde.

Die frühe Geometrie beruhte zunächst auf empirischen Einzelerkenntnissen, insbesondere aus Mesopotamien und Ägypten. Doch mit der Zeit wuchs das Bedürfnis nach einer logisch geschlossenen Gesamtordnung. Euklids revolutionäres System basierte auf drei Säulen: 23 Definitionen grundlegender Begriffe, fünf Postulaten und neun Axiomen.

Die folgenden Aufzählungen der Definitionen, Postulate und Axiome basieren auf der Ausgabe von Euklids Elementen in „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften“ Seite 1-3.

Die zentralen Definitionen umfassen:

1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
2. Eine Linie ist eine breitenlose Länge.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.
5. Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Die Enden einer Fläche sind Linien.
7. Eine ebene Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.
8. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.
9. Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der Winkel geradlinig.
10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Nebenwinkel ein Rechter; und die stehende gerade Linie heißt senkrecht zu (Lot auf) der, auf der sie steht.
11. Stumpf ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist.
12. Spitz, wenn kleiner als ein Rechter.
13. Eine Grenze ist das, worin etwas endigt.

14. Eine Figur ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfasst wird.
15. Ein Kreis ist eine ebene, von einer einzigen Linie [die Umfang (Bogen) heißt] umfasste Figur mit der Eigenschaft, dass alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie [zum Umfang des Kreises] laufenden Strecken einander gleich sind;
16. Und Mittelpunkt des Kreises heißt dieser Punkt.
17. Ein Durchmesser des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzte Strecke; eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.
18. Ein Halbkreis ist die vom Durchmesser und dem durch ihn abgeschnittenen Bogen umfasste Figur; [und Mittelpunkt ist beim Halbkreise derselbe Punkt wie beim Kreise].
19. Geradlinige Figuren sind solche, die von Strecken umfasst werden, dreiseitige die von drei, vierseitige die von vier, vielseitige die von mehr als vier Strecken umfassten.
20. Von den gleichseitigen Figuren ist ein gleichseitiges Dreieck jede mit drei gleichen Seiten, ein gleichschenkliges jede mit nur zwei gleichen Seiten, ein schiefes jede mit drei ungleichen Seiten.
21. Weiter ist von den dreiseitigen Figuren ein rechtwinkliges Dreieck jede mit einem rechten Winkel, ein stumpfwinkliges Dreieck jede mit einem stumpfen Winkel, ein spitzwinkliges Dreieck jede mit drei spitzen Winkeln.
22. Von den vierseitigen Figuren ist ein Quadrat jede, die gleichseitig und rechtwinklig ist, ein längliches Rechteck jede, die zwar rechtwinklig aber nicht gleichseitig ist, ein Rhombus jede, die zwar gleichseitig aber nicht rechtwinklig ist, ein Rhomboid jede, in der die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich sind und die dabei weder gleichseitig noch rechtwinklig ist; die übrigen vierseitigen Figuren sollen Trapeze heißen.
23. Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.

Die fünf Postulate bilden das operative Herzstück der euklidischen Geometrie und sind in unseren folgenden Betrachtungen zur nichteuklidischen Geometrie zentral. Sie lauten:

1. Es soll gefordert werden, dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt eine gerade Linie ziehen kann.
2. Und dass man eine begrenzte gerade Linie stetig in gerader Linie verlängern kann.
3. Und dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand einen Kreis beschreiben kann.
4. Und dass alle rechten Winkel einander gleich sind.
5. **Und, wenn eine gerade Linie, falls sie auf zwei gerade Linien trifft, die innen auf derselben Seite liegenden Winkel zu weniger als zwei**

Rechten ergänzt, dann sollen die zwei geraden Linien, ins Unendliche verlängert, auf jener Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen weniger als zwei Rechte betragen.

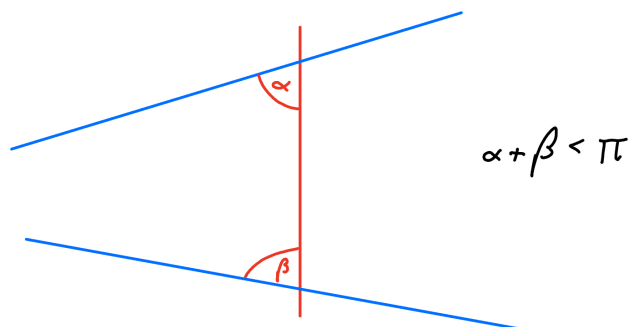


Abbildung 1: Veranschaulichung von Euklids fünftem Postulat

Und zuletzt dienen Axiome als logische Basis des Systems:

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
3. Wenn Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.
4. Wenn Ungleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen ungleich.
5. Die Doppelten von demselben sind einander gleich.
6. Die Halben von demselben sind einander gleich.
7. Was einander deckt, ist einander gleich.
8. Das Ganze ist größer als der Teil.
9. Zwei Strecken umfassen keinen Flächenraum.

Zusätzlich ist anzumerken, dass Euklids Geometrie auf einigen idealisierten in der Natur nicht existenten bzw. messbaren Begriffen beruht: Ein Punkt ohne Ausdehnung, eine Gerade ohne Breite, aber mit unendlicher Ausdehnung sind gedankliche Abstraktionen. Diese Idealisierung wirft zwei fundamentale Fragen auf:

1. Erkenntnistheoretische Legitimation:

Mit welchem Recht können wir diesen Begriffen Eigenschaften zuschreiben, die nur näherungsweise gelten? Das logische Verständnis dieser Begriffe war so stark, dass selbst Carl Friedrich Gauß zunächst nicht an der Alternativlosigkeit Euklids zweifelte. Kants oft zitierte Annahme, dass die euklidische Geometrie „denknotwendig“ sei, erwies sich als fundamentale Fehleinschätzung. Denn auch wenn Euklids System widerspruchsfrei ist, lässt sich das fünfte Postulat weder beweisen noch widerlegen (es ist damit ein Beispiel für die Gültigkeit von Gödels Unvollständigkeitssatz).

2. Widerspruchsfreiheit:

Ein fundamentaler Bestandteil moderner Mathematik liegt darin, dass sich aus einem Axiomen- bzw. „Postulaten“-System niemals gleichzeitig ein Satz und das Gegenteil desselben Satzes beweisen lassen. Für Euklid galt dies lange als selbstverständlich – ein Trugschluss, wie die später entwickelten Modelle der nichteuklidischen Geometrie zeigten.

Ein zentrales Problem der euklidischen Geometrie betrifft also die Frage nach der Abhängigkeit von seinen aufgestellten Postulaten: Lässt sich ein Postulat aus den anderen ableiten, oder ist es logisch unabhängig gegeben? Beim euklidischen System fällt auf, dass die ersten vier Postulate vergleichsweise einfach formuliert sind, während das fünfte – das Parallelenpostulat – komplexer erscheint.

Dies führte dazu, dass sich die Annahme verbreitete, dass es sogar gänzlich abhängig von den vorigen vier Postulaten sei. Was wiederum viele Mathematiker veranlasste die Abhängigkeit beweisen zu wollen. Den letzten große Versuch hierfür stellen Legendres Beweise aus den Jahren 1794-1823 dar, die er in aufeinander folgenden Ausgaben seines Werks „Éléments de géométrie“ veröffentlichte. Er präsentierte dabei einen speziellen Beweis, den wir im zweiten Kapitel dieser Arbeit näher beleuchten werden, der sich allerdings in Zirkelschlüsse verläuft.

Die vollständige Unabhängigkeit des Parallelenpostulats von den übrigen Postulaten wurde erst im Laufe des 19. Jahrhunderts durch die nichteuklidischen Geometrien von Gauß, Bolyai und Lobatschewski dargestellt. Deren Systeme sind ebenso widerspruchsfrei wie die euklidische Geometrie, obwohl sie das fünfte Postulat verwerfen.

Damit war klar:

- Die euklidische Geometrie ist **nicht** die einzig denkbare Struktur des Raumes.
- Das Parallelenpostulat ist **nicht** aus den übrigen Axiomen ableitbar.

Dennoch wäre es falsch, die jahrtausendelange Dominanz Euklids als bloßes „Vorurteil“ abzutun; Auch Euklid erkannte schon die Notwendigkeit des fünften Postulats als eigenständiges Postulat. Er sah offenbar, dass es sich eben nicht aus den anderen Definitionen und Postulaten ableiten lässt. Vielmehr zeigt dieses Ringen um diese Fragestellungen und Probleme den stufenweisen Bildungsfortschritt der Mathematik – und den Mut einiger Geometer, tradierte Anschauungen zu überwinden und nach Neuem zu streben.

In dieser Arbeit werden die mathematischen Hintergründe dieser Revolution untersucht, von Euklids Axiomatik bis hin zu den bahnbrechenden Entdeckungen von Bolyai, Lobatschewski und Poincaré.

(siehe [1], [2])

2 Legendres Versuch, das Parallelenpostulat herzuleiten

2.1 Bemerkung *Im Folgenden wird zur besseren Lesbarkeit „ π “ anstatt der Originalformulierung „zwei Rechte“ verwendet. Ansonsten wird aber darauf geachtet, stets die Formulierungen des jeweiligen Autors beizubehalten.*

Seit der Antike versuchten Mathematiker das Parallelenpostulat aus den anderen Axiomen und Postulaten abzuleiten. Bekannte Ansätze dazu stammten von **Ptolemäus** (Nutzte implizit die Äquivalenz „Parallelen haben konstanten Abstand“), von **Proklos** (Setzte voraus, dass sich schneidende Geraden unbegrenzt voneinander entfernen) und **Nasir-Eddin** (Argumentierte mit der Existenz gleichförmiger Bewegungen in der Ebene). Alle diese Beweisversuche und noch unzählige mehr scheiterten daran, dass sie auf Annahmen bauten, die von vornherein schon äquivalent zum Parallelenpostulat waren. Einige dieser Annahmen lauteten (vgl. Reichardt, S.12 [1]):

- Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden existiert genau eine Parallele.
- Die Winkelsumme im Dreieck beträgt π .
- Es existiert mindestens ein Dreieck mit der Winkelsumme π .
- Es gibt nicht-kongruente, aber ähnliche Dreiecke.
- Dreiecke können bei gleichen Winkeln unterschiedliche Seitenlängen haben.
- Drei nicht-kollineare Punkte liegen stets auf einem Kreis.
- Drei Punkte mit gleichem Abstand zu einer Geraden sind kollinear.
- Eine Gerade teilt die Ebene in zwei nicht zusammenhängende Gebiete.
- Jede Gerade durch einen Punkt im Winkelinneren schneidet mindestens einen Schenkel.

Den letzten großen Versuch unternahm der französische Mathematiker Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Dieser publizierte in seinen „Éléments de géométrie“ mehrere Beweisversuche; in fast jeder der 14 Auflagen einen Neuen, was Legendres Hadern mit diesem Thema unterstreicht. Es ist jedoch sehr sinnvoll auch diese Beweise zu betrachten, da durch das Verneinen des Parallelenpostulats in Widerspruchsbeweisen, interessante (Vor-)Erkenntnisse zur nichteuklidischen Geometrie entstehen. Die folgenden Sätze und Theoreme stammen von Legendre selbst, während die Skizzen, Nebenbemerkungen, Korollare und Bemerkungen zum besseren Verständnis von mir hinzugefügt wurden.

2.2 Theorem *Es existiert kein Dreieck, in welchem die Summe der Innenwinkel größer als π ist.*

Beweis. Durch Widerspruch.

Annahme: Es gibt ein Dreieck ABA_1 , welches eine Innenwinkelsumme $> \pi$ hat.

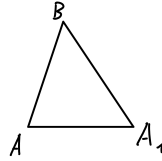


Abbildung 2

Nachdem wir $\overline{AA_1}$ verlängern und auf dieser Verlängerung eine Folge von kongruenten (deckungsgleichen) Dreiecken $A_1B_1A_2, A_2B_2A_3, \dots, A_nB_nA_{n+1}$ errichten, verbinden wir zusätzlich noch die Spitzen dieser Dreiecke, also B und B_1 , B_1 und B_2 , $\dots$, B_{n-1} und B_n (Bemerkung: So eine Konstruktion ist tatsächlich durch Euklids Definitionen und seine anderen Postulate gegeben).

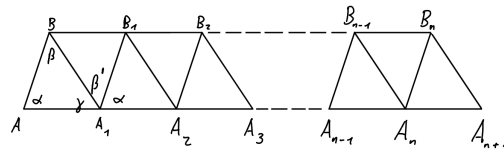


Abbildung 3

Die Winkel im Dreieck ABA_1 heißen α, β und γ und der Winkel $\angle BA_1B_1$ heiße β' (vgl. Skizze).

In den folgenden Schritten ist im Hinterkopf zu behalten, dass die Teilstrecken $\overline{BB_1}, \overline{B_1B_2}, \dots, \overline{B_{n-1}B_n}$ nicht zwingend auf derselben Geraden liegen müssen. Dies würde sich nämlich nur mit dem Parallelenpostulat beweisen lassen.

Es folgt also für die Winkel α, β und γ :

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi \quad (1)$$

$$\alpha + \beta' + \gamma = \pi \quad (2)$$

$$\Rightarrow \beta' < \beta$$

In den Dreiecken ABA_1 und BB_1A_1 gilt:

- $|\overline{A_1B}| = |\overline{BA_1}|$
- $|\overline{BA}| = |\overline{A_1B_1}|$

Aber: $\beta > \beta'$

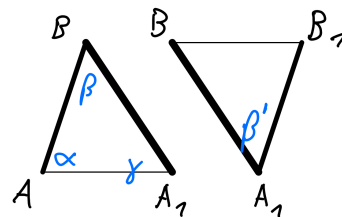


Abbildung 4

$$\Rightarrow |\overline{AA_1}| > |\overline{BB_1}| \quad (3)$$

Bemerke, dass die beiden folgenden Gleichheiten gelten:

$$\triangle ABA_1 = \triangle A_1B_1A_2 = \dots = \triangle A_nB_nA_{n+1} \quad (4)$$

$$\triangle BA_1B_1 = \triangle B_1A_2B_2 = \dots = \triangle B_{n-1}A_nB_n \quad (5)$$

Definiere nun $a := |\overline{AA_1}| - |\overline{BB_1}| > 0$

$$\Rightarrow |\overline{AA_n}| - (|\overline{BB_1}| + |\overline{B_1B_2}| + \dots + |\overline{B_{n-1}B_n}|) = n \cdot a \quad (6)$$

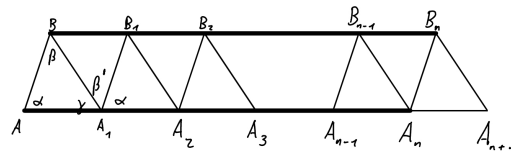


Abbildung 5

Wir wählen n nun so, dass: $n \cdot a > 2 \cdot |\overline{AB}|$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (|\overline{AB}| + |\overline{BB_1}| + |\overline{B_1B_2}| + \dots + |\overline{B_{n-1}B_n}| + |\overline{B_nA_n}|) - |\overline{AA_n}| \\ &= |\overline{AB}| + |\overline{B_nA_n}| + \underbrace{(|\overline{B_1B_2}| + \dots + |\overline{B_{n-1}B_n}|)}_{= -n \cdot a \text{ wegen (6)}} - |\overline{AA_n}| \end{aligned} \quad (7)$$

$$= |\overline{AB}| + |\overline{B_nA_n}| - n \cdot a < 0 \quad (8)$$

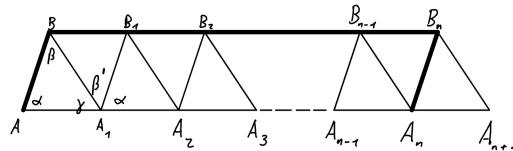


Abbildung 6

$$\Rightarrow |\overline{AA_n}| > |\overline{AB_1 \dots B_n A_n}| \quad (9)$$

Worin Legendre einen Widerspruch sieht. (Bemerkung: Natürlich war der Begriff einer Norm bei Legendre und insbesondere bei Euklid noch nicht so rigoros definiert und wurde einfach als euklidische Länge interpretiert)

Woraus folgt, dass die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck nie größer als π ist. $\square$

2.3 Nebenbemerkung Allerdings könnte in einer nichteuklidischen Geometrie sehr wohl $|\overline{AA_n}| > |\overline{AB_1 \dots B_n A_n}|$ gelten, zum Beispiel:

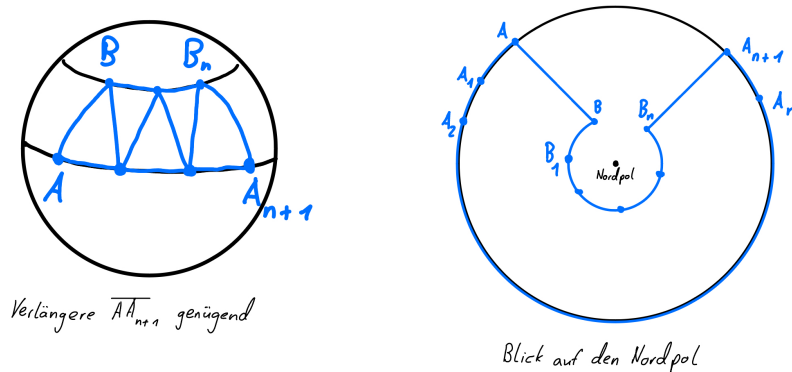


Abbildung 7

2.4 Satz Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck ABC die Innenwinkelsumme $= \pi$ ist, so ist sie es auch in dem Dreieck ABC_1 , dessen Kathete $\overline{BC_1}$ die doppelte Länge von $\overline{BC}$ hat.

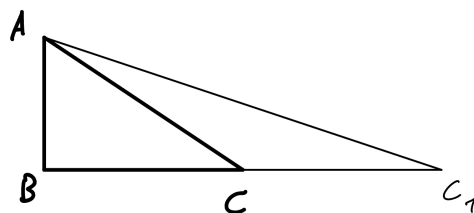


Abbildung 8

Beweis. Konstruiere zunächst über der Seite $\overline{AC}$ ein zu ACB kongruentes Dreieck $AB'C$.

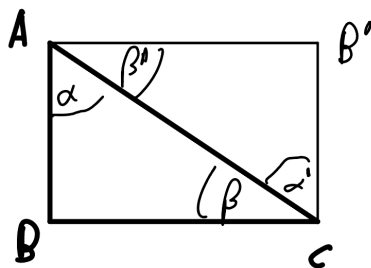


Abbildung 9

(Also gilt: $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$)

$\Rightarrow$ Viereck $AB'CB$ hat nur rechte Winkel (da nach Voraussetzung gilt: $\alpha + \beta = \pi$)
Verlängern wir nun die Seite $\overline{AB'}$ um die Strecke $\overline{B'C'}$ der Länge $|\overline{AB'}|$ und verbinden C' mit C_1 gerade.

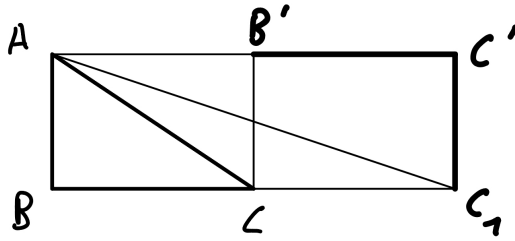


Abbildung 10

Da man die beiden Vierecke durch Spiegelung an der Geraden $\overline{B'C}$ zur Deckung bringen kann, ist $ABCB'$ kongruent zu $B'CC_1C'$.

$\Rightarrow ABC_1C'$ hat ebenfalls vier rechte Winkel.

$\Rightarrow$ Die Diagonale $\overline{AC_1}$ teilt ABC_1C' in zwei rechtwinklige Dreiecke zu je π auf. $\square$

2.5 Satz *Ist in mindestens einem rechtwinkligen Dreieck ABC die Innenwinkelsumme $= \pi$, so ist sie es auch in einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck $A_1B_1C_1$.*

Beweis. Zuerst nehmen an, dass die beiden Katheten des Dreiecks ABC größer sind, als die des Dreiecks $A_1B_1C_1$. Sonst müsste man die Katheten von ABC genügend oft verdoppeln, was nach Satz 2.4. die Innenwinkelsumme von π nicht verändern würde.

Wir legen das nach Annahme kleinere Dreieck $A_1B_1C_1$ auf das größere ABC drauf, so dass ihre rechten Winkel aufeinanderliegen ($B = B_1$).

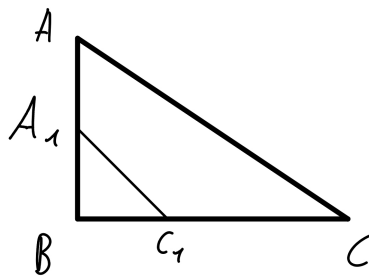


Abbildung 11

Nach Theorem 2.2. hat keines der beiden so entstandenen Dreiecke ABC_1 und AC_1C eine Innenwinkelsumme, welche größer als π ist.

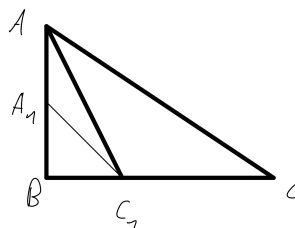


Abbildung 12

Wäre nun die Innenwinkelsumme eines der beiden kleineren Dreiecke ABC_1 und AC_1C kleiner als π , müsste auch für die Innenwinkelsumme des größeren Dreiecks ABC gelten, dass sie kleiner als π ist. Was ein Widerspruch dazu ist, dass ABC eine Innenwinkelsumme von π hat.

$\Rightarrow ABC_1$ hat eine Innenwinkelsumme von π

$\Rightarrow A_1BC_1$ und A_1AC_1 haben ebenfalls Innenwinkelsummen von π . □

2.6 Theorem Wenn in mindestens einem Dreieck die Innenwinkelsumme $= \pi$ ist, so gilt dies auch in einem beliebigen Dreieck.

Beweis. Annahme: Dreieck ABC hat Innenwinkelsumme $= \pi$.

Als erstes zerlegen wir dieses Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke ABD und CBD , indem wir auf der längsten Seite die Höhe des Dreiecks $\overline{BD}$ errichten.

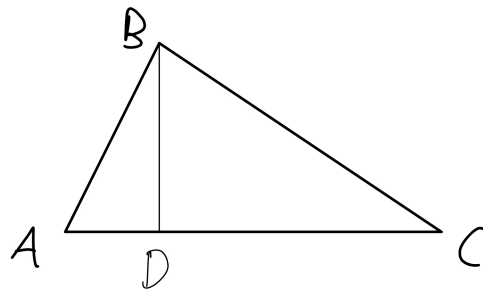


Abbildung 13

Die Innenwinkelsumme der Unterdreiecke ABD und CBD beträgt jeweils π (denn wäre die Summe von je zwei spitzen Winkeln $< \frac{\pi}{2}$, so hätte ABC eine Innenwinkelsumme $< \pi$).

$\Rightarrow$ Mit Satz 2.5. und da nun in einem rechtwinkligen Dreieck die Innenwinkelsumme $= \pi$ ist, so gilt dies auch für beliebige rechtwinklige Dreiecke.

$\Rightarrow$ Summe der spitzen Winkel in einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck $= \frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow$ Jedes Dreieck $A_1B_1C_1$ kann dadurch in zwei rechtwinklige Dreiecke aufgeteilt werden, indem man auf der längsten Seite die Höhe errichtet.

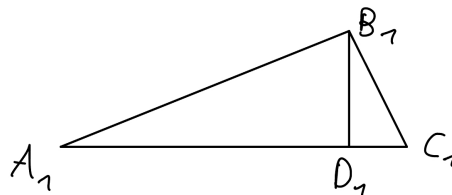


Abbildung 14

Da die Summe der spitzen Winkel in den Dreiecken $A_1B_1D_1$ und $B_1C_1D_1$ jeweils gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, folgt die Innenwinkelsumme von π im Dreieck $A_1B_1C_1$. □

2.7 Theorem Wenn in mindestens einem (bzw. nun in jedem) Dreieck die Innenwinkelsumme $= \pi$ ist, so gilt das Parallelenpostulat.

Beweis. Sei A ein Punkt, welcher nicht auf der Geraden $\overline{D'D}$ liegt. Wir fällen vom Punkt A das Lot $\overline{AC}$ auf $\overline{D'D}$ und errichten durch den Punkt A die Senkrechte $\overline{B'B}$ zu $\overline{AC}$.

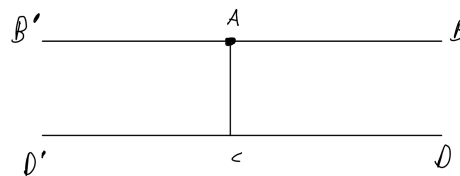


Abbildung 15

$\Rightarrow \overline{B'B}$ und $\overline{D'D}$ schneiden sich nicht, da man sonst ein Dreieck mit einer Innenwinkelsumme größer als π konstruieren würde, was nach Theorem 2.2. nicht möglich ist.

Zu zeigen ist nun, dass jede zu $\overline{B'B}$ verschiedene Gerade $\overline{MN}$, die durch den Punkt A geht, die Gerade $\overline{D'D}$ schneidet. (Wie bereits zu Beginn von Kapitel 2 erwähnt, ist dies auch nur eine Äquivalenz des originalen Parallelenpostulats von Euklid (vgl. Kapitel 1). Diese wurde allerdings schon sehr früh bewiesen und war dadurch auch Legendre schon bekannt)

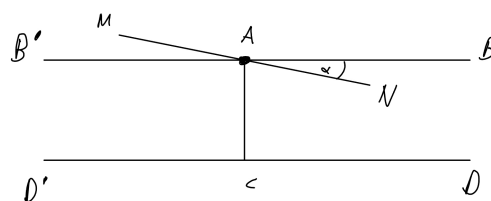


Abbildung 16

Von den beiden Halbgeraden AM und AN wählen wir diejenige aus, welche mit dem Lot $\overline{AC}$ einen spitzen Winkel einschließt.

O.B.d.A. können wir sagen, dass dies AN ist, wobei B und N in der selben Halbebene bezüglich $\overline{AC}$ liegen sollen.

Sei α der Winkel $\angle BAN$.

Um zu zeigen, dass $\overline{AN}$ $\overline{D'D}$ schneidet, genügt es die Existenz einer Geraden $\overline{AP}$ nachzuweisen, die ebenfalls $\overline{D'D}$ schneidet und mit $\overline{AB}$ einen Winkel $< \alpha$ einschließt.

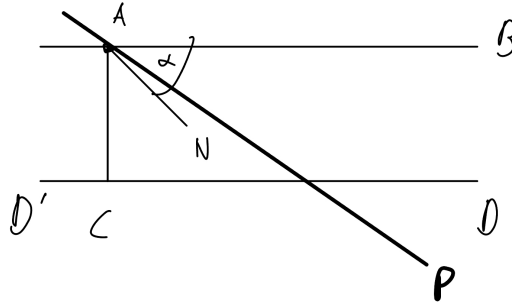


Abbildung 17

Wir tragen auf der Halbgeraden $\overline{CD}$ die Strecke $\overline{CP_1}$ der Länge $|\overline{CA}|$ ab.

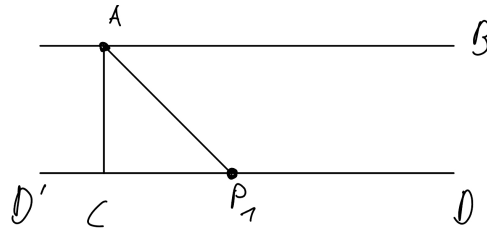


Abbildung 18

In dem so entstandenen gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck ACP_1 hat dann jeder der Winkel $\angle A$ und $\angle P_1$ die Größe $\frac{\pi}{4}$, wegen der Voraussetzung, dass in jedem Dreieck die Innenwinkelsumme $= \pi$ ist.

Als nächstes tragen wir die Strecke $\overline{P_1P_2}$ der Länge $|\overline{AP_1}|$ auf $\overline{CD}$ ab.

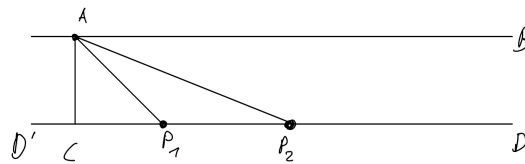


Abbildung 19

In dem so entstandenen gleichschenkligen Dreieck AP_1P_2 haben die Winkel $\angle A$ und $\angle P_2$ die Größe $\frac{\pi}{8}$.

In gleicher Weise konstruieren wir den Punkt P_3 , für welchen $|\overline{P_2P_3}| = |\overline{AP_2}|$ gilt. Führt man dies in geeigneter Weise weiter, erhält man eine Folge von Halbgeraden $\overline{AP_1}, \overline{AP_2}, \overline{AP_3}, \dots$, von denen jede die Halbgerade $\overline{CD}$ schneidet, wobei die Folge der Winkel $\angle BAP_i$ für $i = 1, 2, 3, \dots$ monoton abnimmt.

$\Rightarrow$ Wir erhalten nach endlich vielen Schritten eine Halbgerade $\overline{AP_n}$, die $\overline{D'D}$ schneidet und für die

$$\angle BAP_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi}{2} < \alpha \quad (10)$$

gilt.

□

2.8 Nebenbemerkung Um die in Bemerkung 2.1. erwähnte Äquivalenz zu erhalten, müsste freilich noch die Umkehrung gezeigt werden. Diese gilt ebenfalls und kann Buch 1 Proposition 32 aus Euklids Elementen entnommen werden; sie wird an dieser Stelle aber nicht gesondert gezeigt.

Es gilt also: Innenwinkelsumme $\pi \Leftrightarrow$ Parallelenpostulat

2.9 Theorem Es ist ein Ding der Unmöglichkeit, dass die Innenwinkelsumme in einem Dreieck kleiner als π ist.

Beweis. Legendre führt den Beweis hierzu per Widerspruch. Es werde also angenommen, dass ein Dreieck ABC mit einer Innenwinkelsumme $< \pi$ existiere, sagen wir Innenwinkelsumme $= \pi - r$ mit r reell.

Wir konstruieren zunächst über der Seite $\overline{BC}$ ein Dreieck BDC , welches kongruent zu ABC ist.

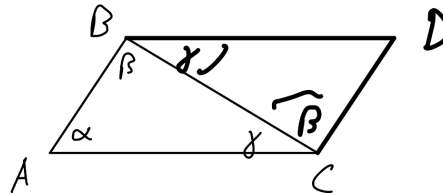


Abbildung 20

Wir ziehen im nächsten Schritt eine Gerade durch D , die die verlängerten Schenkel des Winkels $\angle BAC = \alpha$ in gewissen Punkten M, N schneidet.

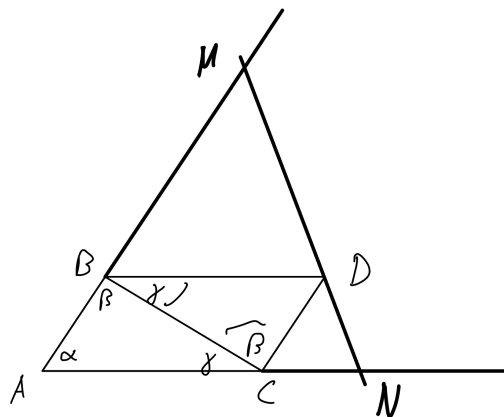


Abbildung 21

Zu bemerken ist, dass auch BCD eine Innenwinkelsumme von $\pi - r$ hat und die Innenwinkelsummen von BDM und CDN nicht $> \pi$ sind.

$\Rightarrow$ Summe der Winkel der vier Dreiecke ABC, BCD, BDM, CDN ist nicht $> 4\pi - 2r$
Außerdem beträgt die Summe der je drei Winkel bei den Punkten B, C, D genau

$3 \cdot \pi$ (jeweils π).

$\Rightarrow$ Für die Summe der verbleibenden drei Ecken A, M, N gilt, dass sie nicht größer ist als $(4\pi - 2r) - 3\pi = \pi - 2r$.

$\Rightarrow \triangle AMN$ hat also eine Winkelsumme, welche nicht größer ist als $\pi - 2r$.

Führt man dieses Verfahren nun geeignet weiter, kann man Dreiecke konstruieren, deren Innenwinkelsummen $\pi - 4r, \pi - 8r, \dots$ betragen, was uns nach endlich vielen Schritten zu einer negativen Innenwinkelsumme führen würde, worin Legendre einen Widerspruch sieht.

□

2.10 Korollar *Theorem 2.2. und 2.9. liefern, dass die Innenwinkelsumme in jedem Dreieck $= \pi$ ist. Woraus mit Theorem 2.7. die Gültigkeit des Parallelenpostulats abgeleitet zu sein scheint.*

2.11 Bemerkung *Ein Fehler von Legendre liegt darin, dass er annimmt, man könne im Beweis zu Theorem 2.9. vom Punkt D , der im Inneren des Winkels $\angle CAB$ liegt, stets eine Gerade ziehen, die beide Schenkel des Winkels schneidet. Diese Annahme ist nämlich bereits äquivalent zum Parallelenpostulat. Diese Äquivalenz werden wir hier an dieser Stelle zwar nicht gesondert zeigen. Sie ist aber aus den nichteuklidischen Modellen an späterer Stelle in dieser Arbeit leicht abzuleiten.*

(siehe [1], [3], [4])

3 Absolute Geometrie nach Janos Bolyai

Die folgenden beiden Kapitel über die Absolute Geometrie von Janos Bolyai und die Lobatschewskische Geometrie sollen die frühesten Modelle der nichteuklidischen Geometrie beschreiben. Sie sind natürlich keinesfalls vollständig und liefern gelegentlich auch nur Beweisideen zu bestimmten Aussagen. Allerdings ist es wichtig auch diese frühen Modelle genauer zu beleuchten, um einen Überblick über die Entwicklung hin zu Klein und Poincaré zu erhalten. An dieser Stelle ist natürlich auch der Name Carl Friedrich Gauß zu nennen, welcher genau wie Bolyai und Lobatschewski einer der Vorreiter auf diesem Gebiet der Mathematik war. Da er *aus Furcht vor dem Geschrei der Böötier* (siehe [5]) wenig bis gar nichts zu diesem Thema veröffentlichte, ist ihm kein eigenes Kapitel in dieser Arbeit gewidmet. Es ist aber im Hinterkopf zu behalten, dass er in engem Kontakt mit Bolyai und Lobatschewski stand und auch teilweise an ihren Ideen mitwirkte. (siehe [1])

Die nun angestellten Überlegungen veröffentlichte Janos Bolyai (1802-1860) erstmals in seiner „Appendix“ 1832 und wurden von Johannes Frischauf 1872 (siehe [6]) ausgearbeitet. (Während die Bemerkungen, Nebenbemerkungen, Notationen, Skizzen und Überlegungen von mir zum besseren Verständnis und einer besseren Übersicht hinzugefügt oder umformuliert wurden, folgen sämtliche Definitionen, Korollare, Sätze und ihre Beweise Frischaufs Überarbeitung von Bolyais Originalwerk)

3.1 Definition [Linie] *Eine Linie sei die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten.*

3.2 Definition [Parallelität] *Zwei Linien $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ heißen parallel unter der Bedingung, dass, wenn sie von einer Geraden $\overline{AB}$ geschnitten werden, die Summe der inneren Winkel auf derselben Seite π beträgt.*

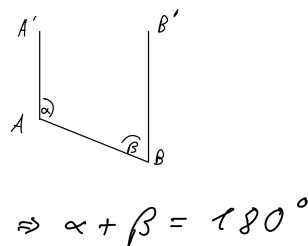


Abbildung 22

3.3 Nebenbemerkung *Hieraus folgt später für Bolyai aber nicht zwingend, dass die Parallelen stets gleichen Abstand zueinander haben. Auf dieser Annahme beruht Bolyais Absolute Geometrie.*

3.4 Satz *Zwei parallele Linien $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ können sich nicht schneiden.*

Beweis. Sind $\overline{AA''}$ und $\overline{BB''}$ die Rückverlängerungen von $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$, so können die so entstandenen Figuren $A'ABB'$ und $B''BAA''$ zur Deckung gebracht werden. Würden sich also $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ schneiden, so auch $\overline{AA''}$ und $\overline{BB''}$. (Worin Bolyai

noch einen Widerspruch sieht. Für ihn galt, dass zwei Linien grundsätzlich keinen, einen oder unendlich viele Schnittpunkte haben müssen)

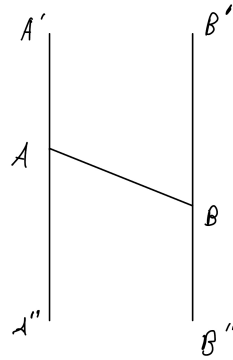
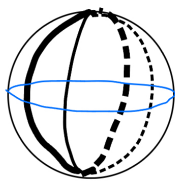


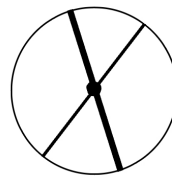
Abbildung 23

□

3.5 Nebenbemerkung Ein nichteuklidisches Modell, in welchem sich zwei Geraden, die nach Bolyais Definition (3.2) parallel sind, in zwei Punkten schneiden können, ist die Sphäre:



*Erdkugel mit Blick
auf den Äquator*



*Erdkugel mit Blick
auf den Nordpol
(bzw. Südpol)*

Abbildung 24

3.6 Überlegung Man kann in einer Ebene durch einen beliebigen Punkt A außerhalb einer Geraden $\overline{B'B''}$ mindestens eine Parallele $\overline{A'A''}$ ziehen, indem man zwei mal die Senkrechte zieht.

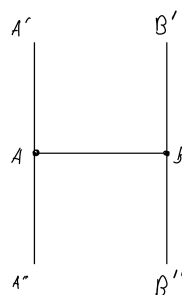


Abbildung 25

3.7 Definition [Grenzparallelum] Die Halblinien, die vom Punkt A in $A'ABB'$ reinzeigen, lassen sich in zwei Kategorien einteilen:

(1) Jene, die $\overline{BB'}$ schneiden.

(2) Jene, die $\overline{BB'}$ nicht schneiden.

Die gemeinsame Grenzlinie dieser beiden Klassen wird Grenzparallelum zur Geraden $\overline{BB'}$ genannt.

Notation: $\parallel$

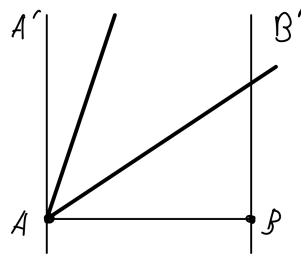


Abbildung 26

3.8 Bemerkung In jedem Fall begegnet das Grenzparallelum selbst der Geraden $\overline{BB'}$ nicht. Es muss allerdings nicht im rechten Winkel zu $\overline{AB}$ stehen, sondern nur in einem $\leq \frac{\pi}{2}$

3.9 Nebenbemerkung In der klassischen euklidischen Geometrie ist das Grenzparallelum freilich die Parallele $\overline{AA'}$ selbst.

3.10 Vorüberlegung (für den Beweis von 3.21.) Um das Grenzparallelum durch A zu verlängern, trägt man den Winkel α ab.

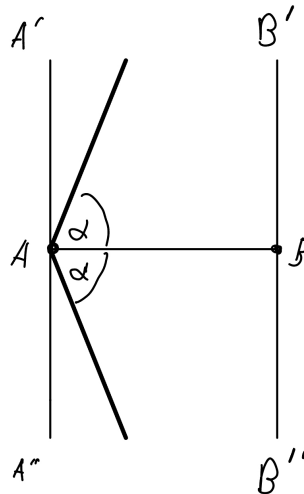


Abbildung 27

3.11 Nebenbemerkung Sei $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$

(1) Eine Gerade $\overline{AA'}$ ist an allen ihren Punkten zu $\overline{BB'}$ grenzparallel.

(2) Symmetrie: $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \Leftrightarrow \overline{BB'} \parallel \overline{AA'}$

(3) Transitivität: $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}, \overline{BB'} \parallel \overline{CC'} \Rightarrow \overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$

3.12 Satz Die Innenwinkelsumme in einem beliebigen Dreieck beträgt π .

Beweis. Sei ABC ein gegebenes Dreieck.

Zieht man durch die Spitze B eine Gerade $\overline{B'B''}$ parallel zur gegenüberliegenden Seite $\overline{AC}$, so gilt:

$\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ (vgl. Abbildung 28)

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (11)$$

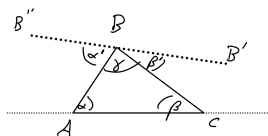


Abbildung 28

□

3.13 Definition [Parallelwinkel] Sei A ein Punkt außerhalb einer Geraden $\overline{BB'}$ und sei $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$ und $\overline{AB} \perp \overline{BB'}$. Der Winkel $\alpha = \angle A'AB$ heißt der Parallelwinkel.



Abbildung 29

3.14 Korollar Nimmt der Betrag von $\overline{AB}$ zu bzw. ab, so nimmt die Größe des Parallelwinkels ab bzw. zu:

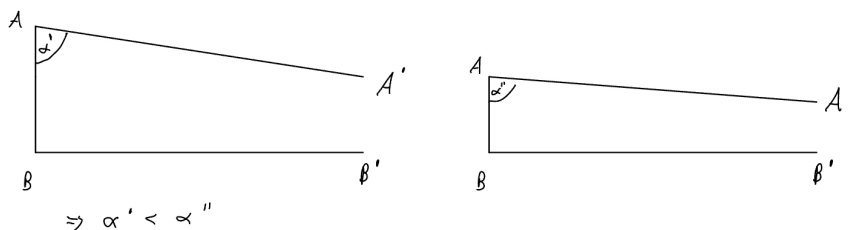


Abbildung 30

3.15 Korollar Setzt man auf $\overline{AB}$ einen Punkt C und betrachtet $\overline{CB} < \overline{AB}$, so muss für $\overline{CC'} \parallel \overline{BB'}$ gelten: $\beta > \alpha$

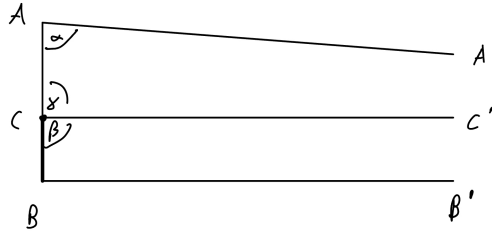


Abbildung 31

(Denn wäre $\beta \leq \alpha$, so wäre $\alpha + \gamma = \alpha + (\pi - \beta) > \pi$, was Bolyai ausschließt.)

3.16 Notation Für jede Distanz p (eines Punktes von einer Geraden) gibt es also einen bestimmten Parallelwinkel und umgekehrt. Man bezeichnet den der Distanz p entsprechenden Parallelwinkel mit $\pi(p)$.

$$\cdot \text{Für} : p \longrightarrow \infty : \pi(p) \longrightarrow 0 \quad (12)$$

$$\cdot \text{Für} : p \longrightarrow 0 : \pi(p) \longrightarrow \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

3.17 Satz Zwei Grenzparallele nähern sich einander immer mehr an.

Beweis. Sind nämlich $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, d.h. grenzparallel und gleich lang, und $\overline{AB} \perp \overline{AA'}$, sowie $\overline{A'B'} \perp \overline{AA'}$, so schneidet die Gerade $\overline{BB'}$ nicht $\overline{AA'}$ (parallel).

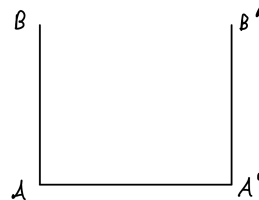


Abbildung 32

Dies ist der Fall, denn: Nimmt man C als die Mitte der Strecke $\overline{AA'}$ und $\overline{CD} \perp \overline{AA'}$, so können die Vierecke $ACDB$ und $A'CDB'$ zur Deckung gebracht werden. Es gilt daher auch $\overline{CD} \perp \overline{BB'}$
 $\Rightarrow \overline{BB'}$ und $\overline{AA'}$ schneiden sich nicht.

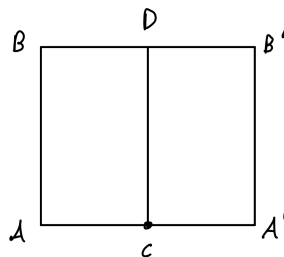


Abbildung 33

Eine zweite Parallele $\overline{BB''}$ liege näher an $\overline{AA'}$; sie begegne also der Senkrechten $\overline{A'B'}$ im Punkt B'' derart, dass $\overline{A'B''} < \overline{A'B'}$ ist.

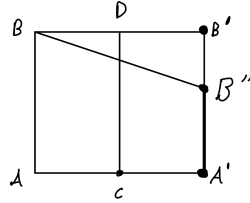


Abbildung 34

$\Rightarrow$ Die Distanzen der Punkte einer Geraden zu einer ihrer Grenzparallelen werden daher in der Richtung des Parallelismus immer kleiner. $\square$

3.18 Korollar *Zwei Grenzparallele schneiden sich im Unendlichen.*

3.19 Nebenbemerkung *Obwohl die beiden folgenden Sätze 3.20. und 3.21. fundamentale Resultate von Bolyais Absoluter Geometrie sind, werden in ihren Beweisen je widersprüchliche Aussagen verwendet (* und **), wovon (*) sogar nur eine Behauptung ist. Dies ist einer der Gründe, warum Janos Bolyais Vater Wolfgang Bolyai zeitlebens an den Entdeckungen seines Sohnes zweifelte und auch dieser zögerlich bei der Veröffentlichung vorging.*

3.20 Satz *Eine Grenzparallele $\overline{AB}$, welche eine Gerade $\overline{CD}$ schneidet, hat zu ihr denselben Winkel α , wie zu einer zu $\overline{CD}$ parallelen $\overline{C'D'}$.*

Beweis. Da $\overline{CD}$ und $\overline{C'D'}$ parallel sind, folgt mit Definition 3.2., dass $\alpha + \beta = \pi$ gilt (vgl. Abbildung 35). Verbindet man dies zusätzlich mit der Behauptung (*) $\alpha' + \beta = \pi$, folgt $\alpha = \alpha'$.

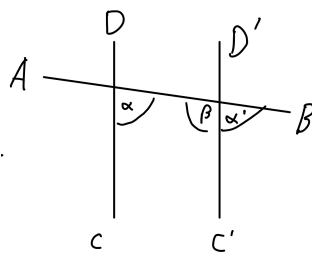


Abbildung 35

$\square$

Die Behauptung (*) gilt i.A. nur für Geraden und nach Satz 3.21. muss das Grenzparallelum keine Gerade sein, was zu der bereits beschriebenen Unstimmigkeit führt.

3.21 Satz *Grenzparallele müssen keine Geraden sein (sondern sogenannte krumme Linien).*

Beweis. In einem Viereck $ACDE$ sei der Winkel β spitz und $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$ (Achtung: Die Notation $\parallel$ steht, wie eingeführt, nur für das Grenzparallelum, nicht für allgemeine Parallele, wie wir es wohl heutzutage auffassen würden).

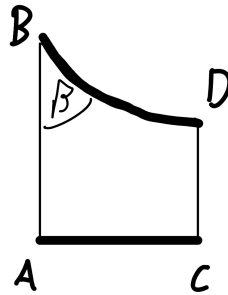


Abbildung 36

Spiegeln wir nun an der Seite $\overline{CD}$, erhalten wir ungefähr folgende Figur:

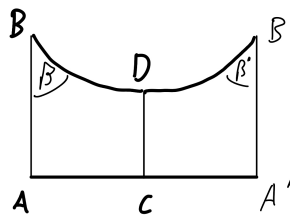


Abbildung 37

Nach 3.10. ist $\overline{BB'}$ immernoch ein Grenzparallelum durch den Punkt D .
 Und nach Satz 3.19. ist $\beta = \gamma$ und $\beta' = \gamma'$.
 $\Rightarrow \gamma$ und γ' sind spitz.

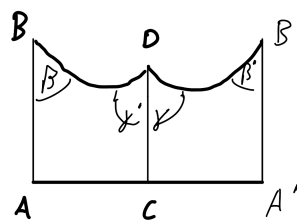


Abbildung 38

$$(**) \gamma + \gamma' \neq \pi \quad (14)$$

$\Rightarrow$ Die Grenzparallelle durch BDB' ist keine Gerade. □

3.22 Satz *Zwei Parallele haben einen eindeutigen kleinsten Abstand.*

Beweis. Jede kürzeste Verbindungslinie mit einem Punkt M auf der Strecke $\overline{B'B''}$ ist eine $\overline{AA'}$ nicht schneidende Linie.

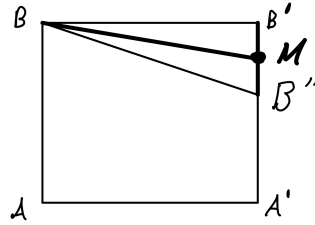


Abbildung 39

Die Entfernungen der Punkte der Linie $\overline{BM}$ von der Geraden $\overline{AA'}$ nehmen in der Richtung $\overline{BM}$ ab. Allerdings ist leicht zu erkennen, dass diese Abnahme nicht unbegrenzt sein kann, da sich sonst $\overline{AA'}$ und $\overline{BM}$ doch irgendwann schneiden würden. Es muss daher einen Punkt Q auf $\overline{BM}$ geben, an dem die Entfernung $\overline{QP}$ von $\overline{AA'}$ die Kleinste ist.

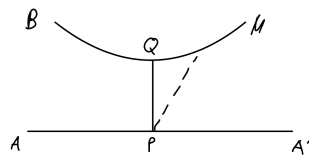


Abbildung 40

Dabei muss $\overline{PQ} \perp \overline{BM}$, weil sonst das Lot auf P kleiner wäre. Die Figuren $APQB$ und $A'PQM$ sind kongruent. $\square$

(siehe [6])

3.23 Abschlussbemerkung Da man also weiß, dass zwei von Bolyai parallel genannt Linien nicht immer denselben, sondern nur einen kleinsten Abstand haben, kann man prinzipiell, wenn man weiterdenkt, unendlich viele solcher „Parallelen“ durch einen Punkt ziehen, wodurch wir dieses Modell der hyperbolischen Geometrie zurechnen können.

Außerdem ist zu bemerken, dass man in diesem Kapitel mit den Begriffen „Linie“ und „Gerade“ vorsichtig sein muss, denn laut Euklids erstem Postulat kann man zwischen zwei Punkten immer eine gerade Linie ziehen, welche die kürzeste Verbindung zwischen beiden Punkten ist und „Gerade“ genannt wird. Auf der anderen Seite bezeichnet Bolyai die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten nur als „Linie“, welche dann wiederum krumm oder gerade sein kann. Somit ist Bolyais „gerade Linie“ nicht Euklids „gerade Linie“, wohingegen Bolyais „Linie“ Euklids „Gerade“ ist.

4 Lobatschewskische Geometrie

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski lebte von 1793 bis 1856 und war ein russischer Mathematiker. Seine Erkenntnisse über die nichteuklidische Geometrie publizierte er 1829 in seinem Werk „Über die Grundlagen der Geometrie“. Auch wenn er drei Jahre vor Janos Bolyai seine Erkenntnisse veröffentlichte, ist sein Kapitel in dieser Arbeit hier Bolyai trotzdem nachgestellt, da Lobatschewskis Ausführungen in sich schlüssiger und widerspruchsfreier erscheinen.

4.1 Vorbemerkung *Um der Lobatschewskischen Geometrie eine Grundlage zu geben, ersetzt Lobatschewski zuerst das Parallelenpostulat durch eine gegenteilige Annahme:*

In der Ebene kann man durch einen Punkt A, der nicht auf einer Geraden a liegt, mehr als eine Gerade ziehen, die a nicht schneidet.

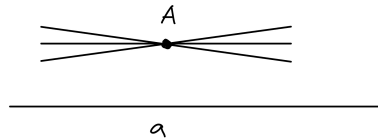


Abbildung 41

Lobatschewski sieht hier also keinen Widerspruch, sondern baut auf den ersten vier und dem neuen fünften seine Geometrie auf.

4.2 Bemerkung *Wir betrachten eine Geometrie, die auf einer den beiden Schalen einer Sphäre mit imaginärem Radius gilt, wenn man als Geraden die Großkreise der Sphäre nimmt, also Schnitte mit Ebenen, die durch den Mittelpunkt gehen, und unter dem Abstand zweier Punkte die pseudoeuklidische Länge des sie verbindenden Großkreises. Die Lobatschewski Ebene ist dabei als imaginäre Sphäre definiert. Diese Ebene stellt eine pseudo-euklidische Ebene dar, weil in ihr (wie später gezeigt werden wird) das Parallelenpostulat nicht gilt.*

*Für die Punkte (x, y, z) auf einer Sphäre muss allgemein gelten: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
Für eine solche imaginäre Sphäre ersetzt man nun z durch iz und r durch iq , so gilt:*

$$x^2 + y^2 + (iz)^2 = (iq)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - z^2 = -q^2 \quad (15)$$

Die hiesige imaginäre Sphäre zerfällt in zwei Halbsphären und ist wie folgt im $\mathbb{R}^3$ eingebettet.

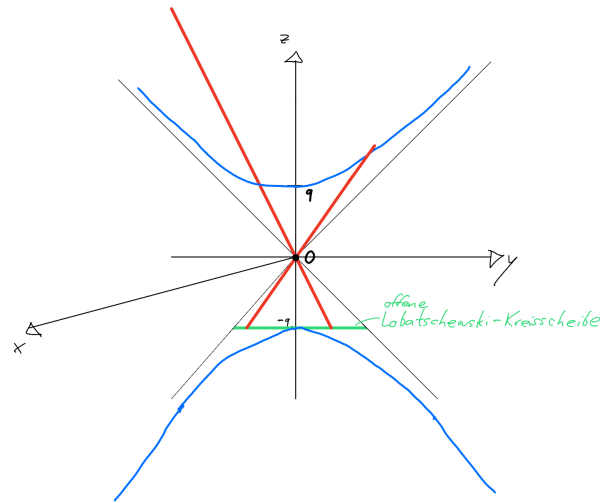


Abbildung 42

4.3 Bemerkung In diesem Modell projizieren wir durch den Nullpunkt aus der oberen Halbsphäre auf die Ebene $z = -q$. Dabei entsteht die offene Kreisscheibe, die wir Lobatschewski Kreisscheibe nennen wollen (siehe Abbildung 42).

4.4 Nebenbemerkung Es gibt zwei lokale Extrema: $(0, 0, q)$ und $(0, 0, -q)$. Beide erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = -q^2$ für $x = y = 0$.

4.5 Korollar Benennt man nun jenen Punkt auf der Lobatschewski Kreisscheibe, dessen Projektion durch den Ursprung exakt senkrecht auf der Ebene steht, mit A

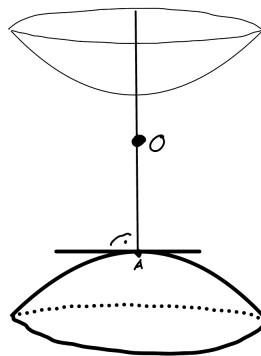


Abbildung 43

und betrachtet die Kreisscheibe von oben, ergibt sich folgendes Bild:

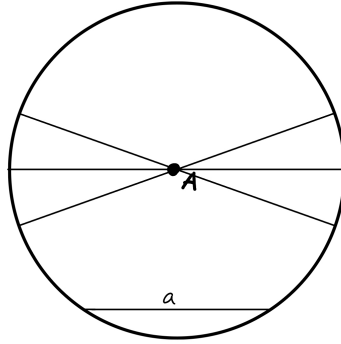


Abbildung 44

$\Rightarrow$ Man kann unendlich viele Geraden durch A ziehen, die a nicht schneiden.

4.6 Bemerkung Wir betrachten in $\mathbb{R}^3$ die „hyperbolische Sphäre“

$$S : x^2 + y^2 - z^2 = -q^2$$

und die Lobatschewski-Ebene

$$E : z = -q.$$

Eine hyperbolische Gerade wird definiert als der Schnitt

$$G = \Pi \cap S$$

einer euklidischen Ebene Π durch den Ursprung $O = (0, 0, 0)$ mit S , gefolgt von der Zentralprojektion

$$\pi : (x, y, z) \mapsto \left(-\frac{q}{z}x, -\frac{q}{z}y, -q \right)$$

auf E .

4.7 Bemerkung Die Lobatschewskische Ebene ist im kleinen ebenso wie die euklidische beschaffen (denn die Geometrie in kleinen Gebieten der Sphäre unterscheidet sich kaum von der Geometrie, die auf einer Tangentialebene dieser Sphäre gilt).

4.8 Nebenbemerkung Die Lobatschewskische Geometrie wird später direkt in die Kleinsche Kreisscheibe übergehen (die Geraden außerhalb des Mittelpunktes A sind tatsächlich gerade Linien). Doch auch schon Lobatschewski liefert in seinem Modell einen klar definierten Abstandsbegriff.

4.9 Definition [Abstand] Die Punkte der Lobatschewskischen Ebene kann man durch die Koordinaten x, y, z charakterisieren, die den Punkten einer Sphäre mit imaginärem Radius entsprechen; Der Abstand ω zweier Punkte $M_1(x_1, y_1, z_1)$ und $M_2(x_2, y_2, z_2)$ wird definiert durch:

$$\cosh\left(\frac{\omega}{q}\right) = \frac{1}{q^2} |x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2| \quad (16)$$

4.10 Beachte Zwei diametral gegenüberliegende Punkte $M_1(x, y, z)$ und $M_2(-x, -y, -z)$ der Sphäre kennzeichnen nur einen Punkt in der Lobatschewski Ebene (daher rührt der Betrag im Abstandsbegriff).

4.11 Bemerkung *Das Modell zeigt, dass sich die Lobatschewski Ebene in jeder Richtung ins Unendliche erstreckt (nähere dazu die Schnittebene an die Sphärenhalbierende an).*

4.12 Überlegung *Da die Geraden in der Lobatschewski Ebene den Großkreisen einer Sphäre mit imaginärem Radius des pseudoeuklidischen Raumes entsprechen, kann man diese Geraden mit den Ebenen vergleichen, die durch den Mittelpunkt einer Sphäre mit imaginärem Radius gehen und diese in einem Großkreis schneiden. Haben zwei Geraden der Lobatschewski Ebene einen gewissen Punkt gemeinsam, so schneiden sich die dazugehörigen Ebenen in einer Geraden mit imaginärer Streckenlänge.*

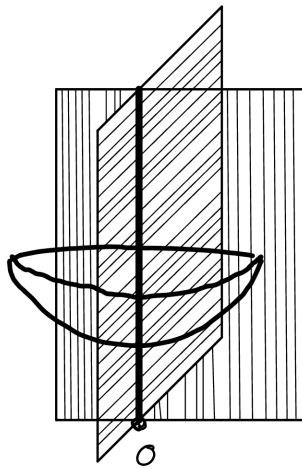


Abbildung 45

4.13 Erster Gegensatz *Die Ebenen können sich auch in einer Geraden mit reeller Streckenlänge schneiden.*



Abbildung 46

In diesem Fall haben die diesen Ebenen entsprechenden Geraden keinen Schnittpunkt und können auch nicht durch Grenzübergang aus sich schneidenden Geraden erhalten werden.

4.14 Zweiter Gegensatz *Die Ebenen können sich auch in einer isotropen Geraden schneiden.*

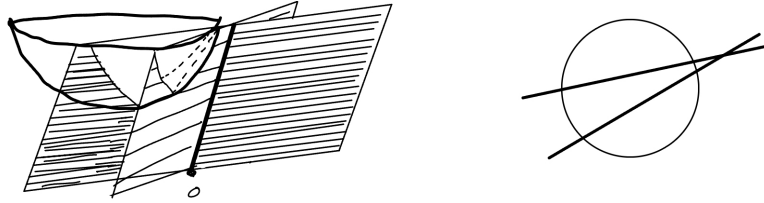


Abbildung 47

Hier schneiden sich die beiden Geraden in der Lobatschewski Ebene zwar auch nicht, jedoch können sie durch einen Grenzübergang aus sich schneidenden Geraden erhalten werden.

Da es nun zwei Arten von sich nicht schneidenden Geraden gibt, führen wir folgende Definitionen ein.

4.15 Definition [Parallelität] *Sich nicht schneidende Geraden in der Lobatschewski Ebene heißen nur dann parallel, wenn man sie durch Grenzübergang aus sich nicht schneidenden Geraden erhalten kann (d.h. wenn sich die ihnen entsprechenden Ebenen in einer isotropen Geraden schneiden; zweiter Gegensatz)*

4.16 Definition [Divergenz] *Sich nicht schneidende Geraden in der Lobatschewski Ebene, die nicht durch Grenzübergang erhalten werden können, nennt man divergierend (erster Gegensatz).*

4.17 Skizze *Um die Lage von Geraden der Lobatschewskischen nichteuklidischen Geometrie in der euklidischen Geometrie zu veranschaulichen, kann man die parallelen und divergierenden Geraden durch krumme Linien darstellen:*

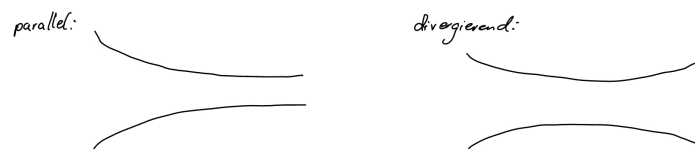


Abbildung 48

(In der euklidischen Ebene gäbe es sonst keine zwei verschiedenen Typen von sich nicht schneidenden Geraden)

4.18 Korollar *Es ist nur möglich durch alle Punkte A außerhalb einer gegebenen Geraden der Lobatschewski Ebene jeweils zwei Parallele zu ziehen. (Nur zwei Geraden schneiden sie durch Grenzübergang)*

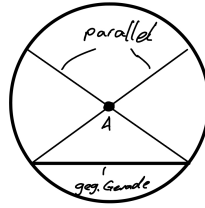


Abbildung 49

4.19 Bemerkung Der Grenzübergang von sich schneidenden Geraden zu Parallelen hat zur Folge, dass $\alpha \rightarrow 0$. (Erinnerung: Die Lobatschewski Ebene ist unbegrenzt)

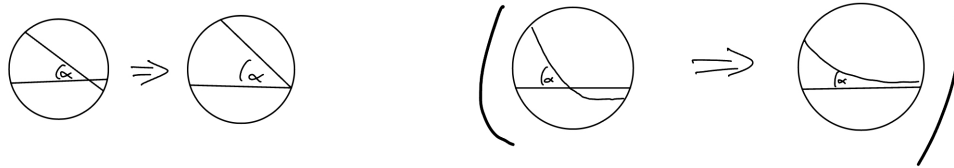


Abbildung 50

4.20 Korollar In der Richtung der Parallelität nähern sich die Parallelen unbegrenzt einander an.

In der Gegenrichtung entfernen sich Parallele unbegrenzt.

4.21 Bemerkung Die beiden Parallelen haben ebenfalls die Eigenschaft, dass sie alle durch den gegebenen Punkt gehenden Geraden in zwei Klassen einteilen: in Schneidende und Divergierende.

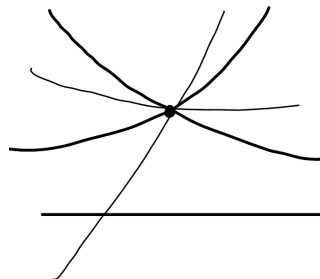


Abbildung 51

Die weiterhin geltenden ersten vier Postulate führen dazu, dass immernoch einige Sätze gültig sind, die sich auf Grundlage der ersten vier beweisen lassen.

4.22 Satz Jede Seite eines Dreiecks ist kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten und größer als deren Differenz.

4.23 Satz Der größte Winkel eines Dreiecks liegt gegenüber der größten Seite.

Andererseits gelten nun alle dem fünften Parallelenpostulat äquivalenten Sätze nicht; also gilt:

4.24 Satz Die Winkelsumme eines Dreiecks ist stets kleiner als π .

Und zusätzlich:

4.25 Satz Die Menge aller Punkte, die von den Punkten einer Geraden denselben Abstand besitzen, bilden keine Gerade, sondern eben nur eine Kurve, die man Abstandslinie oder Äquidistante bezeichnet.

4.26 Rückblick Nun wird auch klar, warum Legendres Annahme im Beweis zu Theorem 2.9., dass er zu einem Punkt in einem Winkel eine die Schenkel schneidende Gerade finden kann, zu lose gefasst war.

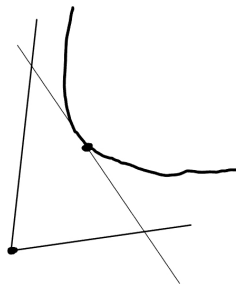


Abbildung 52

4.27 Theorem Zwei Dreiecke sind bereits dadurch kongruent (deckungsgleich), wenn ihre Winkel paarweise übereinstimmen.

Beweis. Aus dem Satz, dass die Winkelsumme in einem beliebigen Dreieck kleiner als π ist, folgt, dass die Winkelsumme des n -Ecks kleiner als $(n - 2) \cdot \pi$ ist. Betrachte nun die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ mit an ihren Ecken jeweils gleichen Winkeln.

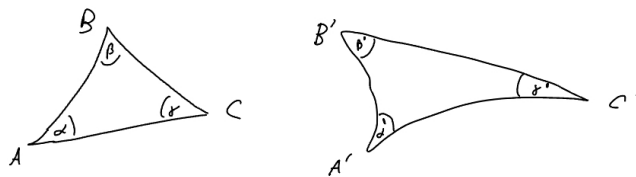


Abbildung 53

Bringe zunächst die Winkel α und α' zur Deckung, wodurch drei Möglichkeiten entstehen:

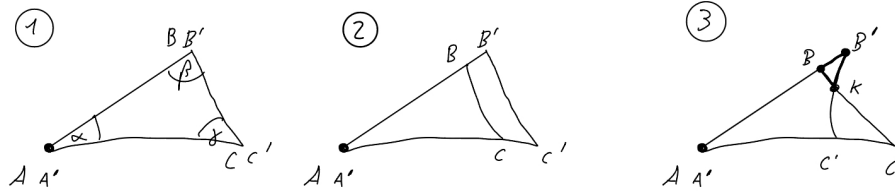


Abbildung 54

Wäre es wie in Möglichkeit 2, hätte das Viereck $BB'C'C$ eine Innenwinkelsumme von 2π , was ein Widerspruch ist.

Wäre es wie in Möglichkeit 3, so wäre ein Außenwinkel des Dreiecks $BB'K$ gleich einem der nichtanliegenden Innenwinkel, was ebenfalls nicht möglich ist.

$\Rightarrow$ Beide Dreiecke fallen zusammen. □

(siehe [3])

5 Poincaré-Scheiben Modell

Erstmals wurde die Poincaré-Scheibe bereits durch Bernhard Riemann 1854 beschrieben. Weiter erarbeitet wurde sie durch Eugenio Beltrami 1868. Allerdings erfuhr sie erst Bekanntheit durch Poincarés „La Science et l’Hypothèse“ 1905, wo er das Modell mit folgenden Worten charakterisiert:

5.1 Modell „Wir wollen uns z. B. eine in eine große Kugel eingeschlossene Welt denken, welche folgenden Gesetzen unterworfen ist:
Die Temperatur darin ist nicht gleichmäßig; sie ist im Mittelpunkte am höchsten und vermindert sich in dem Maße, als man sich von ihm entfernt, um auf den absoluten Nullpunkt herabzusinken, wenn man die Kugel erreicht, in die die Welt eingeschlossen ist.
Ich bestimme das Gesetz, nach welchem diese Temperatur sich verändern soll, noch genauer:
Sei R der Halbmesser der begrenzenden Kugel, sei r die Entfernung des betrachteten Punktes vom Mittelpunkte dieser Kugel, dann soll die absolute Temperatur proportional zu $R^2 - r^2$ sein.
Ich setze weiter voraus, daß in dieser Welt alle Körper denselben Ausdehnungskoeffizienten haben, so daß die Länge irgendeines Lineals seiner absoluten Temperatur proportional sei. [...]
Ein bewegliches Objekt wird also immer kleiner in dem Maße, wie es sich der begrenzenden Kugel nähert.
Beachten wir vor allem, daß diese Welt ihren Einwohnern unbegrenzt erscheinen wird, wenn sie auch vom Gesichtspunkte unserer gewöhnlichen Geometrie aus als begrenzt gilt.“ (S. 67)

5.2 Korollar Durch das Näherkommen an den Rand dieser Welt kühlt eine Person also immer weiter ab und wird zusätzlich immer kleiner, was zur Folge hat, dass sie nie den umfassenden Kugelrand erreicht.

5.3 Korollar Poincaré setzt ebenfalls voraus, dass die Lichtstrahlen innerhalb dieses Modells unterschiedlich brechende Medien durchdringen. Dies geschieht mit einem Brechungsindex umgekehrt proportional zu $R^2 - r^2$. $\Rightarrow$ Lichtstrahlen sind im Allgemeinen nicht geradlinig.

(siehe [7])

Die folgenden Überlegungen stammen nicht mehr von Poincaré selbst, auch wenn er sie wahrscheinlich schon erahnt hatte, sondern von David Royster, 2008. Auf jeden Fall sind sie nicht in Poincarés Werk „La Science et l’Hypothèse“ veröffentlicht, v.A. um es einem breiteren Publikum darzubieten.

5.4 Bemerkung a) Um solch eine hyperbolische Kreisscheibe (jetzt in 2 Dimensionen) zu beschreiben, benutzen wir den Einheitskreis.
b) Die Punkte auf dem Kreis selbst sind nicht Teil der hyperbolischen Ebene.
c) Die Randpunkte werden auch ideale oder Ω -Punkte genannt: $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$

5.5 Definition [Linien] Gegeben sei ein Einheitskreis Γ .
Linien der hyperbolischen Ebene sind Bögen, welche orthogonal zu Γ sind und in

seinem Inneren liegen.

5.6 Konstruktion Es gibt drei Fälle, die bei der Konstruktion von Linien zu beachten sind. Seien A, B die Endpunkte einer Linie.

Fall 1: $A, B \in \Gamma$ (beide auf dem Rand)

Konstruiere zunächst die Geraden $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$, wobei P der Mittelpunkt von Γ ist, und danach die Orthogonalen dazu durch A und B als jeweilige y -Achsen eines so entstehenden Koordinatenkreuzes. Sei Q der Schnittpunkt dieser zwei Orthogonalen. Konstruiere nun einen zweiten Kreis Ω um Q mit Radius QA . Der Teil des Kreises, welcher im Inneren von Γ liegt, ist unsere gesuchte Linie.

(Bemerkung: Dieser Bogen ist nach Konstruktion orthogonal zu Γ)

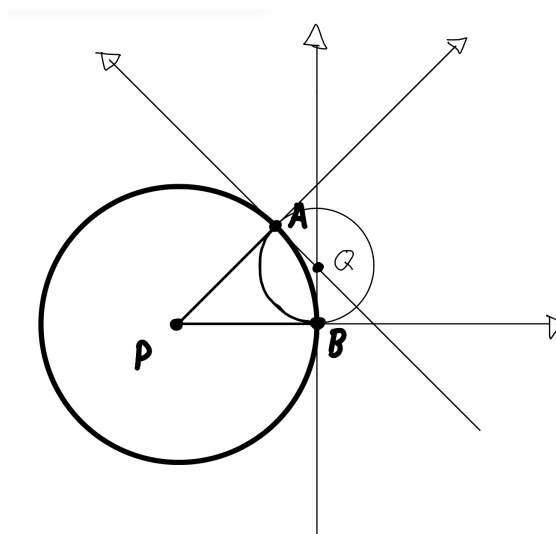


Abbildung 55

Fall 2: $A \in \Gamma$ und B liegt im Inneren von Γ

Konstruiere wieder $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$ und anschließend die Orthogonale auf $\overline{PA}$. Ziehe nun eine Gerade $\overline{AB}$ und errichte auf halber Strecke eine Orthogonale darauf. Der Punkt Q sei der Schnittpunkt dieser Orthogonalen mit der bereits gezogenen Tangenten durch den Punkt A . Die Linie zwischen A und B liegt nun auf dem Kreis um Q mit Radius $|\overline{QA}|$.

Beweis.

$$\rho = \int_0^r \frac{2du}{1-u^2} dx \quad (18)$$

$$= \left[\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) \right]_0^r \quad (19)$$

$$= \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - \ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right) \quad (20)$$

$$= \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - 0 \quad (21)$$

$$= 2 \cdot \tanh^{-1}(r) \quad (22)$$

□

5.9 Definition [Abstand zwischen zwei bel. Punkten] Seien zwei hyperbolische Punkte A und B gegeben. Wenn man nun die Linie zwischen beiden Punkten bis zum Rand fortführt, soll diese den Rand in den Punkten P und Q schneiden. Definiere: $(AB, PQ) = \frac{AP/AQ}{BP/BQ} = \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP}$ (gemeint sind die euklidischen Bogenlängen). $\Rightarrow d(A, B) = \ln |(AB, PQ)|$

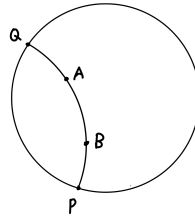


Abbildung 58

5.10 Korollar Die beiden Abstandsbegriffe sind äquivalent.

Beweis. Erster Fall: A und B sind auf der selben Seite vom Mittelpunkt aus betrachtet.

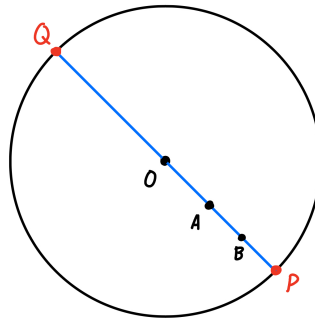


Abbildung 59

Sei r_A und r_B der jeweilige euklidische Abstand zum Mittelpunkt. Der hyperbolische Abstand ist damit : $\rho_{AO} = \ln\left(\frac{1+r_A}{1-r_A}\right)$, $\rho_{BO} = \ln\left(\frac{1+r_B}{1-r_B}\right)$ Der Abstand zwischen A und

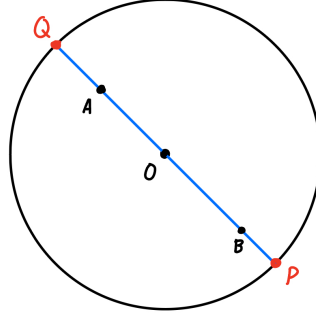


Abbildung 60

B ist somit gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 d_\rho(A, B) &= |\rho_{B0} - \rho_{A0}| \\
 &= \left| \ln\left(\frac{1+r_B}{1-r_B}\right) - \ln\left(\frac{1+r_A}{1-r_A}\right) \right| \\
 &= \left| \ln\left(\frac{1+r_B}{1-r_B} \cdot \frac{1-r_A}{1+r_A}\right) \right| \\
 &= \ln \left| \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP} \right| \\
 &= \ln |(AB, PQ)| \\
 &= d(A, B)
 \end{aligned}$$

$$(1+r_B = BQ, 1-r_A = AP, 1-r_B = BP \text{ und } 1+r_A = AQ)$$

Zweiter Fall: A und B liegen auf verschiedenen Seiten vom Mittelpunkt aus betrachtet.

$$\begin{aligned}
 d_\rho(A, B) &= |\rho_{B0} + \rho_{A0}| \\
 &= \left| \ln\left(\frac{1+r_B}{1-r_B}\right) + \ln\left(\frac{1+r_A}{1-r_A}\right) \right| \\
 &= \left| \ln\left(\frac{1+r_B}{1-r_B} \cdot \frac{1+r_A}{1-r_A}\right) \right| \\
 &= \ln \left| \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP} \right| \\
 &= \ln |(AB, PQ)| \\
 &= d(A, B)
 \end{aligned}$$

$$(1+r_B = BQ, 1-r_A = AQ, 1-r_B = BP \text{ und } 1+r_A = AP)$$

□

5.11 Nebenbemerkung Für $A \rightarrow Q$ gilt: $d \rightarrow \infty$

Für $B \rightarrow P$ gilt: $d \rightarrow \infty$

Für $A = B$ gilt: $d = \ln|1| = 0$

5.12 Korollar *Der hyperbolische Abstand von einem beliebigen Punkt im Inneren von Γ zum Rand ist unendlich lang.*

5.13 Korollar *Die Innenwinkelsumme ist kleiner als π .*

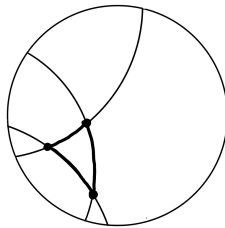


Abbildung 61

5.14 Lemma *Die Transitivität bei Parallelität gilt nicht mehr, also $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{AB} \parallel \overline{EF} \not\Rightarrow \overline{CD} \parallel \overline{EF}$*

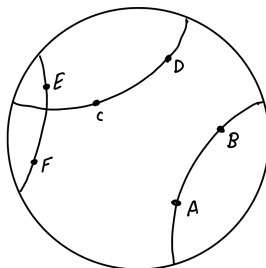


Abbildung 62

Allerdings ist hier zu beachten, dass es genau wie bei Lobatschewski zwei Arten von Parallelen gibt.

5.15 Definition *Sei $\widehat{AB}$ eine hyperbolische Gerade in Γ . Verlängert man nun diese Gerade bis zu den Randpunkten X und Y , heißt jene hyperbolische Gerade, die sich $\widehat{XY}$ im Randpunkt unbegrenzt annähert, aber nicht schneidet, horoparallel zu $\widehat{AB}$ bzw. zu $\widehat{XY}$.*

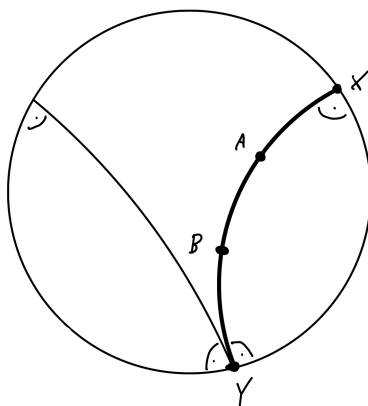


Abbildung 63

5.16 Theorem Seien Λ und Ω die Randpunkte zu $\widehat{AB}$. Konstruiere nun die zwei Horoparallelen dazu, welche sich im Punkt D schneiden sollen. Die Aussage ist nun, dass wenn eine beliebige hyperbolische Gerade durch D und $\widehat{\Lambda\Omega}$ geht und letztere im Punkt M schneidet, die beiden so entstandenen Dreiecke $\triangle \Lambda DM$ und $\triangle MD\Omega$ kongruent sind.

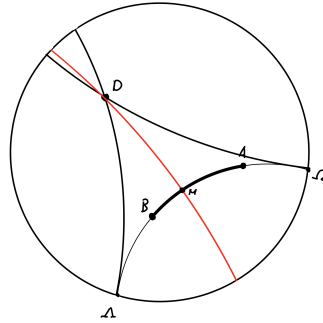


Abbildung 64

Beweis. Wir nehmen an, die Dreiecke $\triangle \Lambda DM$ und $\triangle MD\Omega$ wären nicht kongruent. Dann würde für $\alpha = \angle \Lambda DM$ und für $\beta = \angle MD\Omega$ gelten: $\alpha \neq \beta$.

O.B.d.A. sagen wir, dass $\alpha < \beta$ gilt.

$\Rightarrow$ Es gibt einen Punkt E im Inneren des Dreiecks $\triangle MD\Omega$, s.d. $\alpha = \beta' = \angle EDM$.

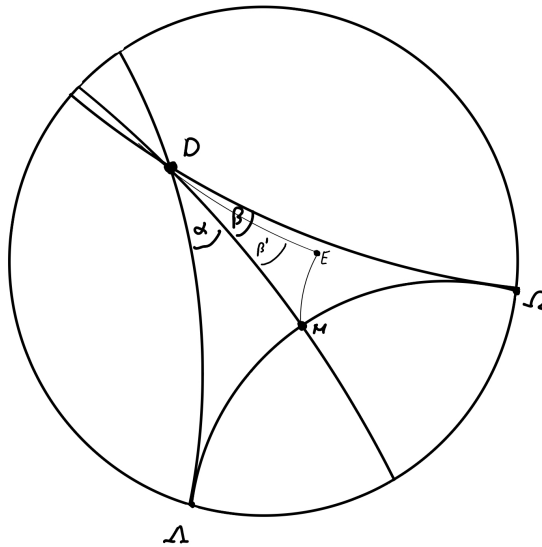


Abbildung 65

Die Verlängerung von $\widehat{DE}$ schneidet $\widehat{\Lambda\Omega}$, da $\widehat{D\Omega}$ die Horoparallele zu $\widehat{\Lambda\Omega}$ ist. Der Schnittpunkt heiße X .

Wähle den Punkt Y auf $\widehat{\Lambda\Omega}$ als Spiegelung an $\widehat{DM}$, also dass $|\widehat{MX}| = |\widehat{MY}| < \infty$.

$\Rightarrow \triangle YMD$ ist kongruent zu $\triangle XMD$

$\Rightarrow \alpha' = \beta' = \alpha$, was ein Widerspruch ist.

$\Rightarrow \triangle \Lambda DM$ ist kongruent zu $\triangle MD\Omega$.

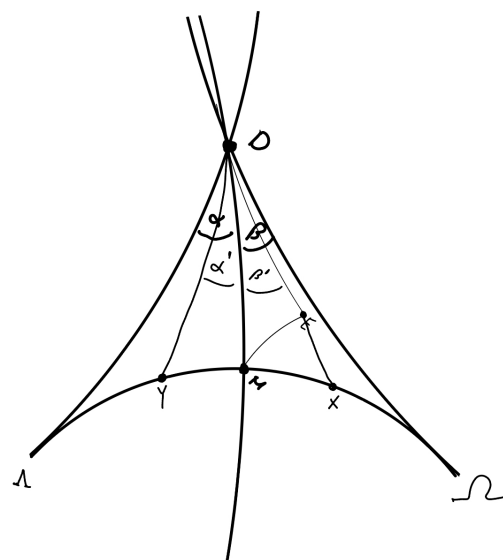


Abbildung 66

□

(siehe [8])

Literaturverzeichnis

- [1] H. Reichardt: *Gauß und die nichteuklidische Geometrie*, Leipzig, 1976.
- [2] Euklid: *Die Elemente*, aus dem Griechischen bearbeitet von Clemens Thaer, Frankfurt am Main, 2010.
- [3] P.S. Alexandroff, A.I. Markuschewitsch, A.J. Chintschin (Red.): *Enzyklopädie der Elementarmathematik. Band V: Geometrie.*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971.
- [4] A.M. Legendre: *Die Elemente der Geometrie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie*, aus dem Französischen bearbeitet von August Crelle, Berlin, 1837.
- [5] C.F. Gauß: Brief an Friedrich Wilhelm Bessel vom 27. Januar 1829, Auszug in *Gauß: Werke Band 8*. S. 200, 1900.
- [6] J.Bolyai: *Absolute Geometrie*, bearbeitet von J. Frischauf, Leipzig, 1872.
- [7] H. Poincaré: *Wissenschaft und Hypothese*, bearbeitet von F. und L. Lindemann, München, 1906.
- [8] D.C. Royster: *Poincaré's Disk Model for Hyperbolic Geometry*, 2008.

