

Bachelorarbeit

Volumenberechnungen des Archimedes

Fakultät für Mathematik
Ludwig-Maximilians-Universität München

David Höller
(12561799)



Vorgelegt zur Erlangung des akademischen Grades Bachelor of Science
Betreut von PD Dr. Dirk-André Deckert und Dr. Paula Reichert

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Die Kreismessung	5
2.1	Der Flächeninhalt des Kreises	5
2.2	Approximation von π	8
3	Die Quadratur der Parabel	16
4	Kugel und Zylinder	24
4.1	Kegel und Doppelkegel	26
4.2	Rotationskörper in der Kugel	34
4.3	Rotationskörper um die Kugel	38
4.4	Volumen und Oberfläche der Kugel	40
5	Schlussbetrachtung	45
6	Literaturverzeichnis	46
7	Selbstständigkeitserklärung	47

1 Einleitung

„Gebt mir einen Hebel, der lang genug,
und einen Angelpunkt, der stark genug ist,
dann kann ich die Welt mit einer Hand bewegen.“¹

Dies soll Archimedes, einer der berühmtesten Mathematiker der Antike, über sein Hebelgesetz behauptet haben. Ob er diese Aussage wirklich tätigte, ist aber wie vieles über ihn nicht mit Gewissheit zu sagen.

Über Archimedes weiß man ziemlich sicher, dass er im Jahr 212 vor Christus während der Plünderung von Syrakus starb. Die genauen Umstände seines Todes sind dabei nicht genau bekannt, man vermutet aber, dass er von einem römischen Soldaten erstochen wurde. Es wird davon ausgegangen, dass Archimedes bei seinem Tod etwa 75 Jahre alt war, wodurch man ein Geburtsjahr um 287 vor Christus erhält. Über sein Umfeld weiß man, dass Archimedes der Sohn des Astronomen Pheidias und ein Freund des Königs Hieron und dessen Sohn Gelon war. Während seines Studiums in Alexandria machte Archimedes außerdem Bekanntschaft mit den Mathematikern Conon von Samos und Eratosthenes. Später kehrte Archimedes in seinen Geburtsort Syrakus zurück, wo er vertieft in seine physikalischen, astronomischen und mathematischen Betrachtungen lebte. Er soll oft so vertieft in seine Forschung gewesen sein, dass er das Essen und Schlafen vergessen hat und während er sich salbte, noch in das Öl auf seinem Körper geometrische Figuren zeichnete.

Bekannt war Archimedes zu seiner Zeit vor allem für mechanische Entdeckungen wie das zu Beginn erwähnte Hebelgesetz, womit man schwere Objekte durch einen langen Hebel leichter bewegen kann, das Archimedische Prinzip, das sich mit der Auftriebs- und Gewichtskraft eines Körpers beschäftigte, und der Archimedischen Schraube, einer Spirale zur Beförderung von Wasser. Zu Kriegszeiten in Syrakus war Archimedes außerdem angesehen für die Konstruktion von Kriegsmaschinen wie Katapulten oder Wurfmaschinen, was ein Grund für seine Ermordung gewesen sein könnten.

Wie schon sein Vater war Archimedes auch an der Astronomie interessiert. So baute er eine Kugel, in der die Bewegungen der Sonne, des Mondes und von fünf Planeten simuliert wurden. Er soll über die Konstruktion dieser Kugel auch ein Buch geschrieben haben.

¹ siehe aphorismen.de/zitat/18536

Zu seinen mathematischen Forschungen verfasste Archimedes viele Werke, von welchen vermutlich einige verloren gingen und nicht alle bekannten für sich selbst vollständig sind. Außerdem wurden von späteren Bearbeitern Veränderungen vorgenommen, die Rekonstruktionsversuche gemäß der relativen Chronologie beinhalten könnten. Zur wahren Reihenfolge ist also ein Interpretationsspielraum gegeben und die Chronologie der uns bekannten Schriften wird sich nicht zweifelsfrei herstellen lassen.

Durch die Einleitungen und darin verwendeten Sätze aus anderen Werken wurde versucht, die bekannten Werke chronologisch zu ordnen. Die Forscher Heiberg und Hultsch legten im 19. Jahrhundert eine mögliche Reihenfolge fest, die auch von den Archimedesforschern Heath und Dijksterhuis so übernommen wurde. Lediglich 1906 wurde diese Liste durch die Entdeckung der Methodenschrift leicht abgeändert. Daraus ergab sich folgende Chronologie:

1. Über das Gleichgewicht ebener Flächen I
2. Die Quadratur der Parabel
3. Über das Gleichgewicht ebener Flächen II
4. Die Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen
5. Über Kugel und Zylinder I & II
6. Über Spiralen
7. Über Konoide und Sphäroide
8. Über schwimmende Körper
9. Die Kreismessung
10. Die Sandzahl

Archimedes werden außerdem die kleineren Werke

- Stomachion
- Die Lemmata
- Das Rinderproblem

zugeschrieben, die in die Liste aber aufgrund ihrer unvollständigen und veränderten Fassungen und dem Mangel an geeigneten Hinweisen nicht eingeordnet werden können.

Diese Arbeit befasst sich mit drei seiner Werke, die man der Thematik Berechnung von Flächeninhalten, Oberflächen und Volumen zuordnen kann.

Wir beginnen mit der „Kreismessung“, in der Archimedes eine Formel für den Flächeninhalt des Kreises angibt und Verhältnisse von Kreisgrößen bestimmt, aus denen man Approximationen an π herleiten kann.

Als nächstes befassen wir uns mit dem geometrischen Teil der „Quadratur der Parabel“, in der die Fläche eines Parabelsegments durch die Größe eines eingelegten Dreiecks bestimmt wird.

Im letzten Kapitel wird das Werk „Über Kugel und Zylinder I“ untersucht, in welchem Archimedes das Volumen und die Oberfläche einer Kugel durch einen umschriebenen Zylinder bestimmt.

Die Informationen zum Leben sowie den astronomischen und physikalischen Arbeiten von Archimedes stammen aus [Hea97]. Zu seinen mathematischen Werken siehe [Sch16].

Die Bilder in dieser Arbeit wurden selbst mit geogebra erstellt, meist auf Grundlage der Abbildungen in den jeweiligen Quellen. Welchen Büchern die Sätze und Beweise der einzelnen Werke folgen, wird immer zu Beginn des Kapitels angegeben.

2 Die Kreismessung

Archimedes' Werk „Die Kreismessung“ ist unvollständig überliefert und umfasst daher nur drei Propositionen. In der ersten Proposition stellt Archimedes eine Formel für den Flächeninhalt des Kreises auf, die in Abhängigkeit von dessen Radius und Durchmesser steht. In Proposition wird das Verhältnis vom Flächeninhalt eines Kreises zum Quadrat seines Durchmessers angenähert. In der dritten Proposition wird das Verhältnis vom Umfang eines Kreises zu seinem Durchmesser von oben und unten abgeschätzt. Aus den Propositionen 2 und 3 erhält man durch Einsetzen der Formeln für Flächeninhalt und Umfang des Kreises und durch Umformen eine Näherung an π sowie ein Intervall, in dem sich der genaue Wert von π befindet. Ob die Reihenfolge dieser beiden Propositionen richtig ist, ist allerdings nicht klar, da der nicht überlieferte Beweis von Satz 2 vermutlich Proposition 3 nutzt. Archimedes verwendet im Beweis von Proposition 3 außerdem eine Abschätzung von $\sqrt{3}$ nach unten und oben, von der man nicht mehr rekonstruieren kann, wie er sie bestimmte. (vgl. [Hea21])

Die Propositionen und Beweise in diesem Kapitel folgen [Hea97].

2.1 Der Flächeninhalt des Kreises

Für den Flächeninhalt eines Kreises gilt $A = \pi r^2$, was man durch die Formel für den Umfang $U = 2\pi r$ umschreiben kann zu

$$A = \frac{1}{2}Ur. \quad (1)$$

Den geometrischen Beweis für diese Formel gibt Archimedes, indem er die Gleichheit des Flächeninhalts eines Kreises zu dem eines rechtwinkligen Dreiecks zeigt. Die Katheten dieses Dreiecks sind dabei so lang wie der Radius bzw. der Umfang des Kreises. Für die Fläche des Dreiecks gilt dann $A = \frac{1}{2}Ur$, was übereinstimmt mit der Fläche des Kreises nach der Umformung aus (1).

Proposition 2.1. Die Fläche eines Kreises ist gleich der Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks, bei dem eine Kathete so lang wie der Radius und die andere wie der Umfang des Kreises ist.

Beweis. Sei Q der durch $ABCD$ gegebene Kreis und K das zugehörige rechtwinklige Dreieck, dessen Katheten so lange wie Radius bzw. Umfang von Q sind. Diese Figuren sind in Abbildung 1 dargestellt.

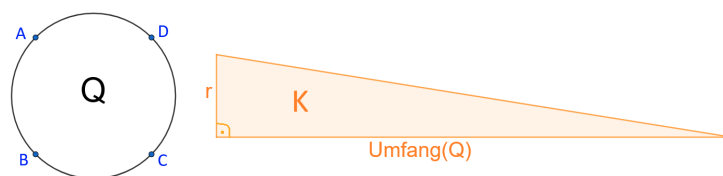


Abbildung 1: Kreis Q und Dreieck K

Wir nehmen zunächst an, dass $A(Q) > A(K)$ gilt.

Wir fügen in den gegebenen Kreis das Quadrat $ABCD$ ein und halbieren die Seiten AB , BC , CD und DA durch Geraden, die im Mittelpunkt O beginnen und an ihrem Schnittpunkt mit der Kreislinie enden. Die Schnittpunkte dieser Mittelsenkrechten mit dem Kreis bezeichnen wir mit E , F , G und H . In Abbildung 2 sieht man diese Konstruktion.

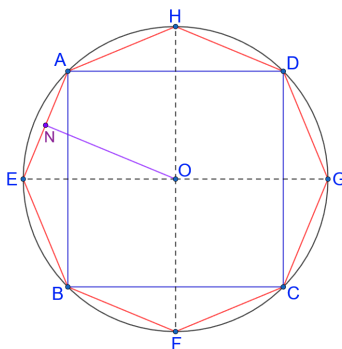


Abbildung 2: Konstruktion eines 8-Ecks in Q und von NO

Diese Konstruktion wiederholen wir an dem neuen Polygon so lange, bis die Summe der Flächen, die innerhalb des Kreises, aber nicht des Polygons liegen, geringer ist als $A(Q) - A(K)$.

Die Fläche des Polygons ist also größer als K . (*)

Sei AE eine Seite dieses Polygons und NO die Senkrechte auf AE durch O wie in Abbildung 2 in lila dargestellt. Dann ist NO kürzer als der Radius des Kreises und damit auch als eine der Katheten von K . Außerdem ist der Umfang des Polygons kleiner als der Umfang des Kreises und entsprechend kürzer als die andere Kathete von K . Damit folgt

$$A(\text{Polygon}) = \frac{1}{2} \cdot NO \cdot U(\text{Polygon}) < \frac{1}{2} \cdot r \cdot U(Q) = A(K), \quad (2)$$

was ein Widerspruch zu (*) ist. Q ist also nicht größer als K .

Nun nehmen wir $A(Q) < A(K)$ an.

Wir umschreiben den Kreis mit einem Quadrat, das die Kreislinie unter anderem in den Punkten E und H berührt. T sei die Ecke des Quadrats an den Seiten mit diesen Berührungspunkten. Weiter konstruieren wir den Punkt A als Mittelpunkt des Kreisbogens EH und die Tangente an A , deren Schnittpunkte mit dem Quadrat wir mit F und G bezeichnen. Diese Konstruktion ist in Abbildung 3 dargestellt.

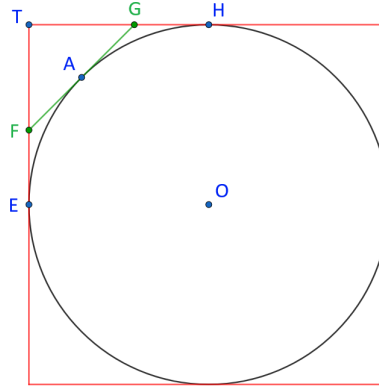


Abbildung 3: Quadrat um Q und Tangente an A

Der Winkel $\angle TAG$ ist dann ein rechter Winkel und damit das Dreieck AGT ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem GT die Hypotenuse und AG eine Kathete ist. Damit gilt $GT > AG$. Außerdem ist $AG = GH$. Es folgt, dass

$$A(TFG) > \frac{1}{2}A(TEAH). \quad (3)$$

gilt. Nun können wir analog den Kreisbogen AH durch einen Punkt J halbieren und an diesen eine Tangente anlegen. Diese wird von der Fläche GAH wieder mehr als die Hälfte abspalten. Diesen Prozess wiederholen wir so lange, bis wir durch die Tangenten und die verbliebenen Quadratseiten ein Polygon erhalten, dessen Flächenunterschied zum Kreis kleiner ist als $A(K) - A(Q)$.

Das Polygon ist also kleiner als K . (*)

Jede Senkrechte durch O auf eine beliebige Seite des Polygons ist genau so lang wie der Radius der Kreises Q . Der Umfang des Polygons ist allerdings größer als der des Kreises, woraus wir

$$A(Polygon) = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot U(Polygon) > \frac{1}{2} \cdot r \cdot U(Q) = A(K) \quad (4)$$

erhalten, was ein Widerspruch zu (*) ist. Q ist demnach nicht kleiner als K .

Also ist Q weder kleiner noch größer als K , weshalb Gleichheit gelten muss. $\square$

2.2 Approximation von π

Proposition 2.2. Die Fläche eines Kreises im Verhältnis zum Quadrat seines Durchmessers ist wie 11 zu 14.

$$\boxed{\frac{A}{d^2} = \frac{11}{14}} \quad (5)$$

Durch Einsetzen der Formeln für den Flächeninhalt des Kreises erhalten wir eine Näherung an π :

$$\frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{11}{14} \Leftrightarrow \pi = \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7} \quad (6)$$

Der Beweis dieser Proposition wurde nicht überliefert.

Proposition 2.3. Das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser ist weniger als $3\frac{1}{7}$, aber mehr als $3\frac{10}{71}$.

$$\boxed{3\frac{10}{71} < \frac{U}{d} < 3\frac{1}{7}} \quad (7)$$

In dieser Proposition könnte man $\frac{U}{d}$ wegen der Formel für den Umfang auch durch π ersetzen und erhält dadurch eine obere und untere Schranke.

Beweis. Zu $\frac{U}{d} < 3\frac{1}{7}$:

Sei AB der Durchmesser eines Kreises, O sein Mittelpunkt, AC die Tangente an A und $\angle AOC$ ein Drittel eines rechten Winkels wie in Abbildung 4 gezeichnet.

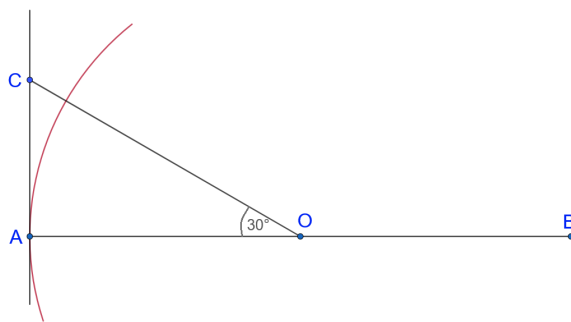


Abbildung 4: Ausgangslage für die erste Ungleichung

Dann gilt

$$AO : AC = \sqrt{3} : 1 > 265 : 153 \quad (8)$$

$$CO : AC = 2 : 1 = 306 : 153. \quad (9)$$

Diese Gleichungen kann man trigonometrisch herleiten aus

$$\frac{AO}{AC} = \frac{1}{\tan(30^\circ)} = \sqrt{3} \quad \text{und} \quad \frac{CO}{AC} = \frac{1}{\sin(30^\circ)} = 2.$$

Als ersten Schritt zeichnen wir wie in Abbildung 5 in grün eine Gerade DO , die $\angle AOC$ halbiert und deren Endpunkt D ihr Schnittpunkt mit AC ist.

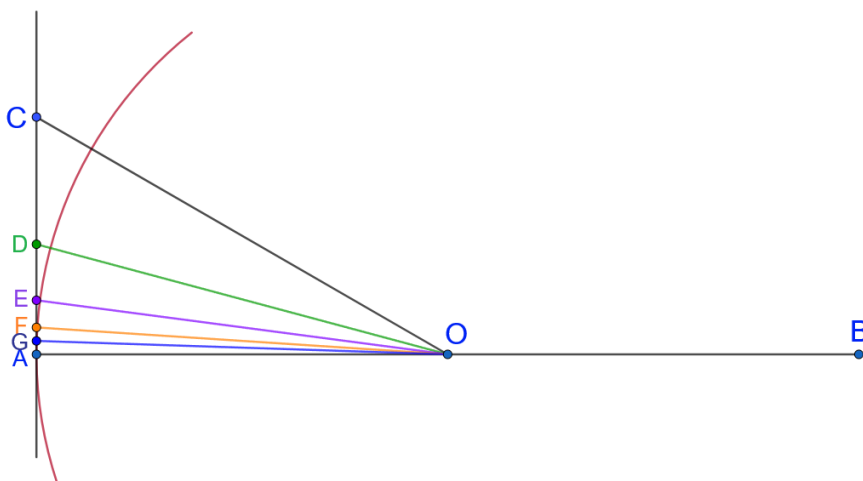


Abbildung 5: Figur mit den Winkelhalbierenden

Nun gilt

$$CO : AO = CD : AD \quad (10)$$

aus den Strahlensätzen und somit durch Addieren einer 1 auf beiden Seiten

$$(CO + AO) : AO = AC : AD, \quad (11)$$

woraus wir nach Multiplizieren von $\frac{AO}{AC}$

$$(CO + AO) : AC = AO : AD \quad (12)$$

erhalten. Durch Einsetzen von (8) und (9) erhalten wir

$$AO : AD > (306 + 265) : 153 = 571 : 153. \quad (13)$$

Wegen

$$\begin{aligned} DO^2 : AD^2 &= (AO^2 + AD^2) : AD^2 \\ &> (571^2 + 153^2) : 153^2 \\ &= 349.450 : 23.409 \end{aligned} \quad (14)$$

gilt schließlich

$$DO : AD > 591\frac{1}{8} : 153. \quad (15)$$

Im zweiten Schritt ergänzen wir das Bild um die Winkelhalbierende von $\angle AOD$, die in O beginnt und im Schnittpunkt E mit AD endet. Dieser Schritt ist in Abbildung 5 lila eingezeichnet. Analog zu (10) und (12) gilt

$$DO : AO = DE : AE \quad (16)$$

$$(DO + AO) : AD = AO : AE. \quad (17)$$

Mit (13) und (15) erhalten wir

$$AO : AE > \left(591\frac{1}{8} + 571\right) : 153 = 1.162\frac{1}{8} : 153. \quad (18)$$

Dann folgt aus

$$\begin{aligned} EO^2 : AE^2 &> \left[\left(1.162\frac{1}{8}\right)^2 + 153^2 \right] : 153^2 \\ &> \left(1.350.534\frac{33}{64} + 23.409 \right) : 23.409 \\ &= 1.373.943\frac{33}{64} : 23.409 \end{aligned} \quad (19)$$

die Ungleichung

$$EO : AE > 1.172\frac{1}{8} : 153. \quad (20)$$

In Schritt 3 halbieren wir, wie in Abbildung 5 orange eingezeichnet, den Winkel $\angle AOE$ durch die Gerade FO , die AE in F schneidet. Analog zu den vorherigen Schritten erhalten wir mit (18) und (20)

$$AO : AF > \left[\left(1.162\frac{1}{8} + 1.172\frac{1}{8}\right) \right] : 153 = 2.334\frac{1}{4} : 153 \quad (21)$$

und

$$FO^2 : AF^2 > \left[\left(2.334\frac{1}{4} \right)^2 + 153^2 \right] : 153^2 > 5.472.132\frac{1}{16} : 23.409, \quad (22)$$

woraus wir

$$FO : AF > 2.339\frac{1}{4} : 153 \quad (23)$$

schließen können.

Im vierten Schritt halbieren wir ein letztes Mal den Winkel $\angle AOF$ durch die Gerade, die in O beginnt und in ihrem Schnittpunkt G mit AF endet. In Abbildung 5 ist dieser Schritt dunkelblau eingezeichnet. Es gilt mit (21) und (23), dass

$$AO : AG > \left(2.334\frac{1}{4} + 2.339\frac{1}{4} \right) : 153 = 4.673\frac{1}{2} : 153. \quad (24)$$

Der Winkel $\angle AOC$, der so groß wie ein Drittel eines rechten Winkels ist, wurde nun viermal halbiert, es gilt also

$$\angle AOG = \left(\frac{1}{2} \right)^4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 90^\circ = \frac{1}{48} \cdot 90^\circ. \quad (25)$$

Durch Spiegelung von GO an AO erhalten wir die Gerade HO , deren Endpunkt H auf AC liegt wie in Abbildung 6 pink dargestellt. Insbesondere ist $\angle AOG = \angle AOH$, weshalb

$$\angle GOH = \frac{1}{24} \cdot 90^\circ \quad (26)$$

gilt.

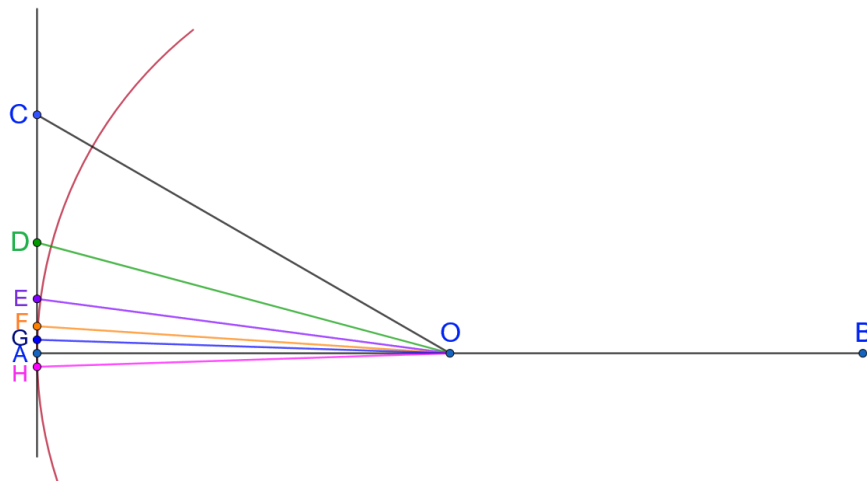


Abbildung 6: Konstruktion mit Gerade HO

GH ist also eine Seite des regulären 96-Ecks, das den gegebenen Kreis umschreibt. Mit $AB = 2 \cdot AO$, $GH = 2 \cdot AG$ und Ungleichung (24) erhalten wir

$$\begin{aligned} AB : U(96\text{-Eck}) &= AB : (96 \cdot GH) \\ &= AO : (96 \cdot AG) > 4.673\frac{1}{2} : (153 \cdot 96) = 4.673\frac{1}{2} : 14.688, \end{aligned} \quad (27)$$

wobei AB der Durchmesser des Kreises und der Umfang des 96-Ecks eine Approximation an den Umfang des Kreises ist. Insgesamt gilt

$$\frac{U}{d} < \frac{U(96\text{-Eck})}{AB} < \frac{14.688}{4.673\frac{1}{2}} < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4.672\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7}. \quad (28)$$

Zu $3\frac{10}{71} < \frac{U}{d}$:

Sei AB der Durchmesser eines Kreises und AC eine Strecke, deren Endpunkt C ein Schnittpunkt mit dem Kreis ist, sodass der Winkel $\angle CAB$ einem Drittel eines rechten Winkels entspricht. Weiter zeichnen wir die Strecke BC ein. Diese Konstruktion ist in Abbildung 7 dargestellt.

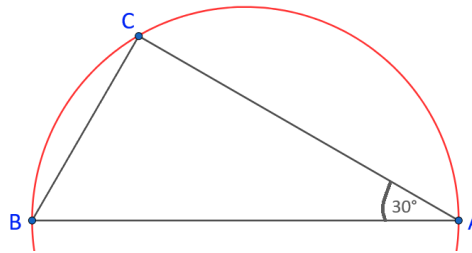


Abbildung 7: Ausgangslage für die zweite Ungleichung

Analog zu (8) gilt dann

$$AC : BC = \sqrt{3} : 1 < 1.351 : 780, \quad (29)$$

wobei $\sqrt{3}$ diesmal von oben abgeschätzt wird.

Im ersten Schritt ergänzen wir die Konstruktion wie in Abbildung 8 grün eingezeichnet um eine Strecke AD , die $\angle BAC$ halbiert und deren Endpunkt D der Schnittpunkt mit dem Kreis ist. Den Schnittpunkt von AD und BC bezeichnen wir mit d . Außerdem zeichnen wir BD ein.

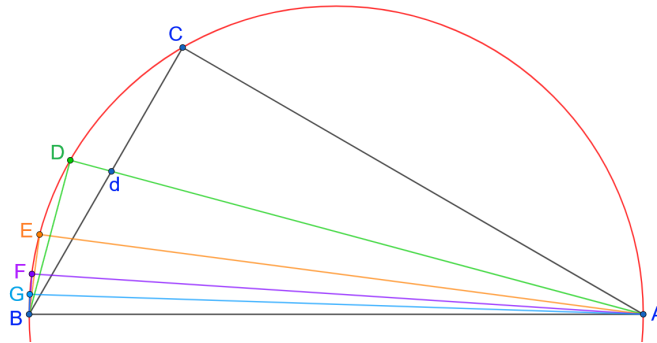


Abbildung 8: Figur mit den Winkelhalbierenden

Dann gilt

$$\angle BAD = \angle dAC = \angle dBD \quad (30)$$

und die Winkel an C und D sind rechte Winkel. Daraus folgt, dass die Dreiecke ADB , ACd und BDd ähnlich sind. Dann ist

$$\begin{aligned} AD : BD &= BD : Dd \\ &= AC : Cd \\ &= AB : Bd \\ &= (AB + AC) : (Bd + Cd) \\ &= (AB + AC) : BC. \end{aligned} \quad (31)$$

Durch Einsetzen von Ungleichung (29) und $AB : BC = 2 : 1 = 1.560 : 780$ folgt

$$AD : BD < (1.560 + 1.351) : 780 = 2.911 : 780. \quad (32)$$

Aus

$$\begin{aligned} AB^2 : BD^2 &= (AD^2 + BD^2) : BD^2 \\ &< (2.911^2 + 780^2) : 780^2 \\ &= 9.082.321 : 608.400 \end{aligned} \quad (33)$$

erhalten wir

$$AB : BD < 3.013\frac{3}{4} : 780. \quad (34)$$

Als zweiten Schritt fügen wir eine Strecke AE ein, die $\angle BAD$ halbiert und den Kreis im Punkt E schneidet. Außerdem ergänzen wir BE . Dieser Schritt ist in

Abbildung 8 orange eingezeichnet. Analog zum ersten Schritt erhalten wir mit den Ungleichungen (32) und (34), dass

$$\begin{aligned}
 AE : BE &= (AB + AD) : BD \\
 &< \left(3.013\frac{3}{4} + 2.911 \right) : 780 \\
 &= 5.924\frac{3}{4} : 780 \\
 &= 1.823 : 240.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
 AB^2 : BE^2 &< (1.823^2 + 240^2) : 240^2 \\
 &= 3.380.929 : 57.600
 \end{aligned} \tag{36}$$

gilt

$$AB : BE < 1.838\frac{9}{11} : 240. \tag{37}$$

Im dritten Schritt zeichnen wir die Winkelhalbierende von $\angle BAE$, die den Kreis im Punkt F trifft, und die Strecke BF ein. Dies ist in Abbildung 8 pink gezeichnet. Mit (35) und (37) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 AF : BF &< \left(1.838\frac{9}{11} + 1.823 \right) : 240 \\
 &= 3.661\frac{9}{11} : 240 \\
 &= 1.007 : 66
 \end{aligned} \tag{38}$$

und mit

$$\begin{aligned}
 AB^2 : BF^2 &< (1.007^2 + 66^2) : 66^2 \\
 &= 1.018.405 : 4.356
 \end{aligned} \tag{39}$$

kommen wir auf

$$AB : BF < 1.009\frac{1}{6} : 66. \tag{40}$$

In Schritt 4 halbieren wir den Winkel $\angle BAF$ durch AG , wobei G auf dem Kreis liegt. Außerdem ergänzen wir wie in Abbildung 8 hellblau eingezeichnet die Strecke BG . Mit (38) und (40) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 AG : BG &< \left(1.009\frac{1}{6} + 1.007 \right) : 66 \\
 &= 2.016\frac{1}{6} : 66.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} AB^2 : BG^2 &< \left[\left(2016\frac{1}{6} \right)^2 + 66^2 \right] : 66^2 \\ &< 4.069.284\frac{1}{36} : 4.356 \end{aligned} \quad (42)$$

und damit

$$AB : BG < 2.017\frac{1}{4} : 66. \quad (43)$$

Der Winkel $\angle BAG$ ist so groß wie $\angle BAC$ nach vier Halbierungen, also

$$\angle BAG = \left(\frac{1}{2} \right)^4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 90^\circ = \frac{1}{48} \cdot 90^\circ, \quad (44)$$

woraus wir, da O der Mittelpunkt von AB ist,

$$\angle BOG = \frac{1}{24} \cdot 90^\circ \quad (45)$$

erhalten. BG ist also eine Seite des in den Kreis eingeschriebenen regelmäßigen 96-Ecks. AB ist der Durchmesser des Kreises und der Umfang des Polygons ist kleiner als der Umfang des Kreises. Mit Ungleichung (43) erhalten wir schließlich

$$\frac{U}{d} > \frac{U(96\text{-Eck})}{AB} > \frac{96 \cdot 66}{2.017\frac{1}{4}} = \frac{6.336}{2.017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}. \quad (46)$$

□

3 Die Quadratur der Parabel

Archimedes beginnt seine Arbeit zur Parabelquadratur mit einem Anschreiben an Dositheos, in dem hervorgeht, dass es bald nach dem Tod von Konon, den Archimedes als seinen Freund bezeichnet, verfasst wurde. Das Werk lässt sich also etwa um das Jahr 240 vor Christus einordnen. Archimedes teilt in der Einleitung außerdem mit, dass ihm der Beweis zunächst mechanisch gelungen ist, er dann aber durch Resultate aus seinem Buch über Kugel und Zylinder die Quadratur auch rein geometrisch beweisen konnte.

Zunächst gibt Archimedes in der Parabelquadratur drei Sätze von Euklid ohne Beweis wieder, denen er einen vierten bewiesenen Satz hinzufügt. Anschließend wird in den Sätzen V bis XVI der Beweis für den in Proposition XVII gegebenen Satz vom Flächeninhalt des Parabelsegments mechanisch durch die Betrachtung des Gleichgewichts von Flächen aufgebaut. Schließlich wird die Parabelquadratur in den Sätzen XVIII bis XXIV rein geometrisch durch eingeschriebene Polygone bewiesen. (vgl. [Hop13])

Wir betrachten hier nur den geometrischen Beweis der Parabelquadratur.

Archimedes füllt hierfür ein Parabelsegment D , also die Fläche zwischen einer Parabel und einer Gerade, die diese in den Punkten A und B schneidet, sukzessive mit Dreiecken auf. Im ersten Schritt schreibt er in D ein Dreieck „mit gleicher Grundseite und Höhe“ ein. Um dieses zu konstruieren, legt man eine Tangente an die Parabel an, die parallel zu AB ist. Den Berührungspunkt der Tangente bezeichnen wir mit C . Dann ist ABC das gesuchte Dreieck mit gleicher Grundseite und Höhe wie D . Diese Konstruktion ist in Abbildung 9 dargestellt.

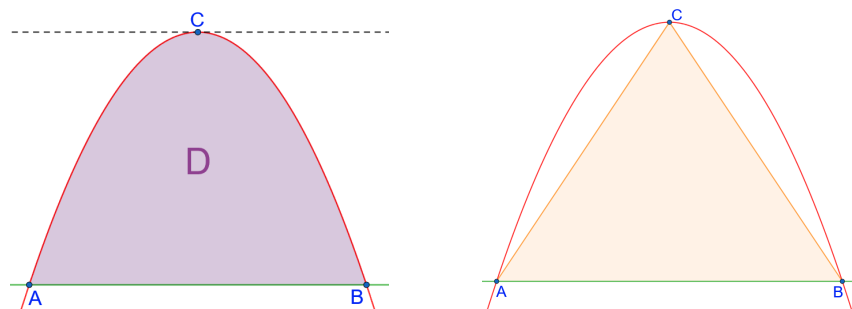


Abbildung 9: Konstruktion des eingeschriebenen Dreiecks

Nun sehen wir, dass über AC und BC jeweils ein Parabelsegment entstanden ist, in welches wir wieder ein Dreieck mit gleicher Grundseite und Höhe einsetzen. Im dritten Schritt haben wir dann vier Parabelsegmente, in die wir Dreiecke einschreiben können. Wir setzen im n -ten Schritt also 2^{n-1} Dreiecke ein.

Archimedes konnte hierbei einen Zusammenhang zwischen der Größe des Parabelsegments und des ersten Dreiecks feststellen. Zuvor beweist er einige Hilfssätze.

Die Sätze und Bemerkungen in diesem Kapitel folgen [Her14]. Die Beweise von Lemma 3.7 und Satz 3.9 stammen aus [Hea97], die übrigen Beweise sind wiederum aus [Her14].

Zunächst müssen wir für unsere Hilfsaussagen in unserer Ausgangslage in Abbildung 9 (rechts) einige Hilfslinien und -punkte konstruieren. Hierzu ergänzen wir das Bild um den Mittelpunkt M der Strecke AB . Durch diesen zeichnen wir die Parallele CM zur Parabelachse. Weiter sei P der Mittelpunkt von AM und wir zeichnen eine Gerade durch P , die parallel zu CM verläuft, den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Parabel bezeichnen wir mit S und den mit der Gerade AC mit U . Diese Konstruktion führen wir analog auf der rechten Seite aus, wobei wir den Mittelpunkt von BM mit Q , den Schnittpunkt der zur Parabelachse parallelen Gerade mit der Parabel mit T und den Schnittpunkt mit BC mit V bezeichnen. Weiter ergänzen wir die Strecke ST . O sei der Schnittpunkt von CM und ST . Diese Hilfskonstruktionen sind in Abbildung 10 ergänzt.

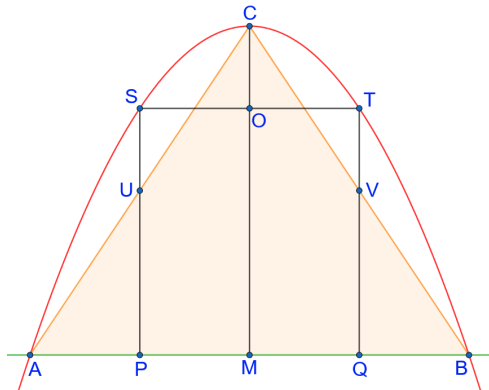


Abbildung 10: Figur mit Hilfskonstruktionen

Lemma 3.1. $CM = \frac{4}{3}PS$

Beweis. Aus der Definition der Parabel gilt

$$\frac{CM}{CO} = \frac{AM^2}{OS^2} = \frac{AM^2}{MP^2} = \frac{(2MP)^2}{MP^2} = 4, \quad (47)$$

woraus wir durch Umformen

$$CO = \frac{1}{4}CM \quad (48)$$

erhalten. Damit und mit $CO = CM - MO$ gilt dann

$$PS = MO = CM - CO = CM - \frac{1}{4}CM = \frac{3}{4}CM \quad (49)$$

und äquivalent

$$CM = \frac{4}{3}PS. \quad (50)$$

□

Lemma 3.2. $A(ABC) > \frac{1}{2}A(D)$

Für den Beweis des Lemmas konstruieren wir ein Parallelogramm um das Parabelsegment. Eine Seite des Parallelogramms ist die Gerade AB , die zweite ist die Parallele zur Parabelachse, die die gleiche Länge hat und in B beginnt. Die übrigen Seiten erhalten wir aus der Definition eines Parallelogramms. Die Ecken bezeichnen wir mit E und F wie in Abbildung 11 dargestellt.

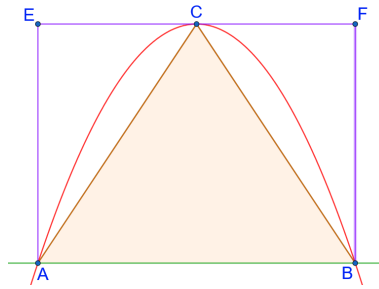


Abbildung 11: Parallelogramm um das Parabelsegment

Beweis. Wir haben das Parallelogramm $AEFB$ konstruiert, für das

$$A(AEFB) = 2 \cdot A(ABC) \quad (51)$$

gilt. Da D vollständig in $AEFB$ liegt, folgt

$$A(D) < A(AEFB) = 2 \cdot A(ABC) \quad (52)$$

und damit

$$\frac{1}{2} \cdot A(D) < A(ABC). \quad (53)$$

□

Bemerkung 3.3. Für die Fläche von D , die wir bestimmen wollen, haben wir damit eine untere und obere Schranke gefunden:

$$A(ABC) < A(D) < A(AEFB) \quad (54)$$

Für unser nächstes Lemma legen wir in die neu entstandenen Parabelsegmente, die über AC und BC liegen, die Dreiecke mit gleicher Grundseite und Höhe zu den jeweiligen Segmenten ein. Dadurch erhalten wir die Dreiecke ACS und BCT wie in Abbildung 12 eingezeichnet.

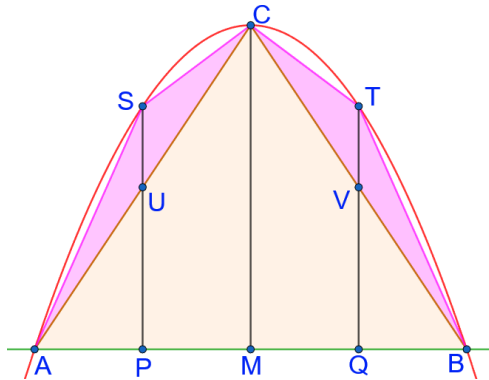


Abbildung 12: Dreiecke im zweiten Schritt

Lemma 3.4. $8 \cdot A(ACS) = A(ABC) = 8 \cdot A(BCT)$

Beweis. Wir beweisen nur die erste Gleichung, die zweite folgt analog. Wir bemerken zunächst, dass U der Mittelpunkt von AC ist, es gilt also

$$CM = 2PU, \quad (55)$$

woraus wir nach Teilen durch 2 und Einsetzen von (50)

$$PU = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}PS = \frac{2}{3}PS \quad (56)$$

erhalten. Insgesamt gilt also

$$PU = 2SU. \quad (57)$$

Daraus erhalten wir

$$A(APU) = \frac{1}{2}AP \cdot PU = \frac{1}{2}AP \cdot 2SU = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}AP \cdot SU \right) = 2 \cdot A(ASU) \quad (58)$$

und außerdem gilt

$$A(ABC) = 8 \cdot A(APU). \quad (59)$$

Durch Zusammenbauen dieser Gleichungen folgt schließlich

$$\begin{aligned} A(ABC) &= 8 \cdot A(APU) = 8 \cdot 2 \cdot A(ASU) \\ &= 8 \cdot (A(ASU) + A(CSU)) = 8 \cdot A(ACS). \end{aligned} \quad (60)$$

□

Bemerkung 3.5. Mit Lemma 3.4 ist außerdem gezeigt:

i) $A(ACS) = A(BCT)$

Interpretation: Die beiden Dreiecke, die in die zwei neuen Parabelsegmente eingeschrieben werden, haben die gleiche Größe.

ii) $A(ABC) = 4(A(ACS) + A(BCT))$

Interpretation: Die Summe der Flächen der Dreiecke im Schritt n ist viermal so groß wie im Schritt $n + 1$.

Lemma 3.6. Sei $A_1, A_2, \dots, A_n$ eine Reihe von Flächen, von denen jede viermal so groß ist wie die folgende und die größte Fläche A_1 die Fläche des Dreiecks ABC ist, dann gilt

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n < A(D). \quad (61)$$

Beweis. Wir setzen $A_1 = A(ABC)$ und A_i als die Summe der Flächen der Dreiecke, die im Schritt i in das Parabelsegment eingeschrieben werden. Nach Bemerkung 3.5 ii) ist dann die Bedingung $A_i = 4A_{i+1}$ erfüllt. Da alle A_i innerhalb von D liegen und sich nicht überschneiden, ist ihre Summe kleiner als die Fläche von D . □

Lemma 3.7. Sei $A_1, A_2, \dots, A_n$ eine Folge von Flächen, von denen jede viermal so groß ist wie die folgende und die größte Fläche ist A_1 , dann gilt

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \frac{1}{3}A_n = \frac{4}{3}A_1. \quad (62)$$

Beweis. Wir setzen $a_1 := \frac{1}{3}A_1, \dots, a_n := \frac{1}{3}A_n$, also allgemein

$$a_i := \frac{1}{3}A_i. \quad (63)$$

Aus der Definition der a_i und der Voraussetzung $A_i = \frac{1}{4}A_{i-1}$ erhalten wir

$$A_i + a_i = A_i + \frac{1}{3}A_i = \frac{4}{3}A_i = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}A_{i-1} = \frac{1}{3}A_{i-1}. \quad (64)$$

Damit folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} A_2 + \dots + A_n + a_2 + \dots + a_n &= (A_2 + a_2) + \dots + (A_n + a_n) \\ &= \frac{1}{3}(A_1 + \dots A_{n-1}) \end{aligned} \quad (65)$$

und

$$a_2 + \dots + a_{n-1} = \frac{1}{3}(A_2 + \dots + A_{n-1}). \quad (66)$$

Subtrahieren wir (66) von (65), so gilt

$$A_2 + \dots + A_n + a_n = \frac{1}{3}A_1, \quad (67)$$

woraus wir schließlich durch Addieren von A_1 auf beiden Seiten

$$A_1 + \dots + A_n + \frac{1}{3}A_n = \frac{4}{3}A_1 \quad (68)$$

erhalten. □

Bemerkung 3.8. Algebraisch könnte man Lemma 3.7 auch mit der endlichen geometrischen Reihe

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (69)$$

beweisen. Hierfür formen wir Formel (62) durch Umschreiben mit $A_i = \left(\frac{1}{4}\right)^i A_1$ und Teilen durch A_1 (möglich, da wir $A_1 \neq 0$ annehmen dürfen, da (62) für $A_1 = 0$ trivial ist) zu

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}. \quad (70)$$

um. Für die Summe $1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^n}$ erhalten wir mit (69)

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n. \quad (71)$$

Durch Einsetzen in die linke Seite von der zu (62) äquivalenten Gleichung (70) folgt dann

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^i - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}. \quad (72)$$

Satz 3.9. Quadratur der Parabel

Sei D ein Parabelsegment und ABC das Dreieck mit gleicher Grundseite und Höhe wie D . Dann gilt

$$A(D) = \frac{4}{3}A(ABC) \quad (73)$$

Beweis. Wir setzen $K := \frac{4}{3}A(ABC)$.

Wir nehmen zunächst an, dass $A(D) > K$ gilt.

Wir fügen wie üblich eine Figur G ein, die aus Dreiecken besteht, die in D mit gleicher Grundfläche und Höhe eingeschrieben werden. Für die Fläche von G gilt dann

$$A(G) = A_1 + \dots + A_m \quad (74)$$

mit $A_1 := A(ABC)$ und $A_{i+1} = \frac{1}{4}A_i$. Wir wählen die Fläche von G so groß, dass D diese Figur um eine Restfläche R mit

$$A(R) < A(D) - K \quad (75)$$

überschreitet. Dann gilt

$$A(D) = A(G) + A(R) < A(G) + A(D) - K, \quad (76)$$

woraus $K < A(G)$ folgt. Außerdem gilt

$$A_1 + \dots + A_m < \frac{4}{3}A_1 = K \quad (77)$$

nach Lemma 3.7, woraus $A(G) < K$ folgt, was ein Widerspruch zu unserer Folgerung aus (76) ist.

Sei nun $A(D) < K$.

Seien $A_1 := A(ABC)$, $A_2 = \frac{1}{4}A_1, \dots, A_k = \frac{1}{4}A_{k-1}$, wobei A_k kleiner ist als der Überschuss von K über D , es gilt also

$$A_k < K - A(D). \quad (78)$$

Aus $A_k > \frac{1}{3}A_k$ und Lemma 3.7 erhalten wir, dass

$$A_1 + \dots + A_k + A_k > K \quad (79)$$

gilt, woraus

$$K < A_1 + \dots + A_k + K - A(D) \quad (80)$$

folgt. Damit erhalten wir

$$A(D) < A_1 + \dots + A_k, \quad (81)$$

was ein Widerspruch zu Lemma 3.6 ist.

Da D weder kleiner noch größer als $K = \frac{4}{3}A(ABC)$ ist, gilt Gleichheit. $\square$

Beispiel 3.10. Sei D das Parabelsegment, das von der x -Achse und dem Graphen von $f(x) = -x^2 + 4$ eingeschlossen wird.

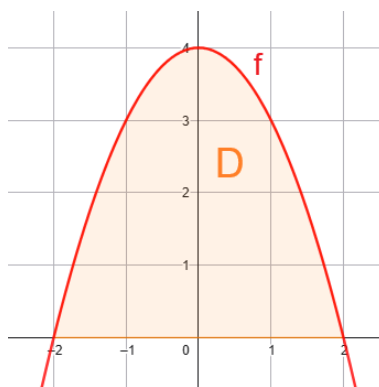


Abbildung 13: Fläche D zwischen dem Graphen von f und der x -Achse

Durch Integration erhalten wir

$$A(D) = \int_{-2}^2 -x^2 + 4 \, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_{-2}^2 = -\frac{8}{3} + 8 - \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) = \frac{32}{3}. \quad (82)$$

Schreiben wir ein Dreieck mit gleicher Grundseite und Höhe in D ein, dann ist die Höhe des Dreiecks $f(0) = 4$. Die Nullstellen von f sind -2 und 2 , die Grundseite hat also die Länge $2 - (-2) = 4$. Mit Satz 3.9 gilt dann

$$A(D) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \right) = \frac{32}{3} \quad (83)$$

und wir sehen, dass die beiden Methoden das gleiche Ergebnis liefern.

4 Kugel und Zylinder

In seinem Werk „Über Kugel und Zylinder I“ bestimmt Archimedes die Oberfläche einer Kugel durch die Fläche des größten Kreises in ihr und das Volumen einer Kugel durch das eines umschriebenen Zylinders.

Im Anschreiben an Dositheos erfahren wir, dass Archimedes in diesem Brief seine Ergebnisse erstmalig veröffentlichte. Er beginnt mit Definitionen und fünf Annahmen, die er für dieses Werk trifft. Daraufhin beweist Archimedes einige Propositionen, teilweise auch mit Sätzen von Euklid, die als unbewiesene Lemmata wiedergegeben werden. (vgl. [Hea21])

Hier beschränken wir uns auf die Sätze, Definitionen und Annahmen, die für die Beweise der Hauptresultate 4.26 und 4.29 nötig sind. Diese folgen [Hea97].

Wir beginnen mit einigen allgemeinen geometrischen Aussagen, betrachten dann in Kapitel 4.1 Kegel und Doppelkegel, woraufhin wir die Verhältnisse einer Kugel zu in- und umschriebenen Rotationskörpern in den Kapiteln 4.2 und 4.3 bestimmen. Im letzten Abschnitt beweisen wir mit den vorherigen Schritten die Sätze zu Oberfläche und Volumen der Kugel.

Lemma 4.1. Seien zwei ungleiche Größen gegeben. Dann kann man zwei unterschiedlich lange gerade Linien finden, sodass das Verhältnis der längeren zur kürzeren Linie kleiner ist als das der größeren zur kleineren Größe.

Beweis. Seien AB und D die gegebenen Größen, wobei D die kleinere ist. Seien BC ein Abschnitt von AB mit Länge D und GH eine beliebige gerade Linie. Wir addieren so lange die Strecke AC aneinander bis sie in der Summe länger ist als D und bezeichnen diese mit AF .

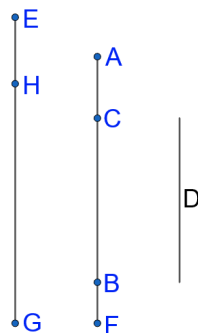


Abbildung 14: Konstruktion der gesuchten Linien

Nun wählen wir E auf GH , sodass

$$GH : EH = AF : AC \quad (84)$$

und äquivalent

$$EH : GH = AC : AF. \quad (85)$$

Aus $AF > D = BC$ erhalten wir

$$AC : AF < AC : D = AC : BC \quad (86)$$

und insgesamt

$$\begin{aligned} EG : GH &= (EH + GH) : GH \\ &= EH : GH + 1 = AC : AF + 1 \\ &< AC : BC + 1 = (AC + BC) : BC \\ &= AB : BC = AB : D. \end{aligned} \tag{87}$$

EG und GH sind also die gesuchten geraden Linien mit einem Verhältnis zueinander, das kleiner als $AB : D$ ist. $\square$

Lemma 4.2. Gegeben seien zwei ungleiche Größen und ein Kreis. Man kann ein Polygon in und eines um den Kreis legen, sodass das Verhältnis einer Seite des äußeren Polygons zu einer des inneren Polygons kleiner ist als das der größeren zur kleineren Größe.

Beweis. Seien A und B mit $A > B$ die gegebenen Größen. Nach Lemma 4.1 gibt es zwei gerade Linien $F > KL$ mit

$$F : KL < A : B. \quad (88)$$

Nun zeichnen wir ML senkrecht an KL , sodass KM so lang ist wie F .

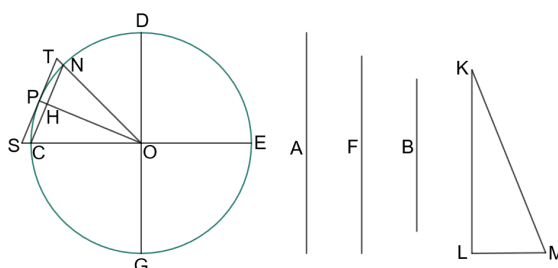


Abbildung 15: Konstruktion der gesuchten Polygone

Im gegebenen Kreis seien CE und DG zwei Durchmesser, die senkrecht aufeinander stehen. Durch Halbieren des Winkels $\angle DOC$, Halbieren des dadurch entstandenen Winkels etc. erhalten wir schließlich einen Winkel (in Abbildung 15 sei dieser $\angle NOC$), für den

$$\angle NOC < 2 \cdot \angle LKM \quad (89)$$

gilt. Verbinden wir nun noch CN , so haben wir eine Seite des gesuchten inneren Polygons gefunden. Sei OP der Radius des Kreises, der den Winkel $\angle NOC$ halbiert. H sei der Schnittpunkt von OP und NC . Wir legen eine Tangente durch P an den Kreis an und nennen S den Schnittpunkt mit CO und T den Schnittpunkt mit NO . Nun gilt

$$\angle HOC = \frac{1}{2} \cdot \angle NOC < \angle LKM \quad (90)$$

und die Winkel an H und L sind rechte Winkel. Damit gilt

$$KM : KL > CO : HO = OP : HO = ST : CN. \quad (91)$$

Mit (88) erhalten wir insgesamt

$$ST : CN < KM : KL = F : KL < A : B. \quad (92)$$

Die Polygone mit den Seiten CN bzw. ST (siehe Abb. 15) sind also die gesuchten inneren bzw. äußeren Polygone. $\square$

4.1 Kegel und Doppelkegel

Definiton 4.3.

- i) Ein **gerader Zylinder** ist ein Zylinder, dessen Mantelfläche senkrecht auf der Grundfläche steht.
- ii) Ein **gleichschenkliger Kegel** ist ein Kegel, der durch Rotation eines gleichschenkligen Dreiecks entsteht.
- iii) Das **geometrische Mittel** von zwei Zahlen a und b ist definiert als $\sqrt{ab}$.

Lemma 4.4. Die Mantelfläche eines geraden Zylinders ist so groß wie ein Kreis, dessen Radius das geometrische Mittel aus der Höhe des Zylinders und dem Durchmesser der Grundfläche ist.

Beweis. Seien der Kreis A die Grundfläche des Zylinders, CD so lang wie der Durchmesser von A und EF seine Höhe. Sei weiter H das geometrische Mittel von CD und EF . B sei der Kreis mit Radius H .

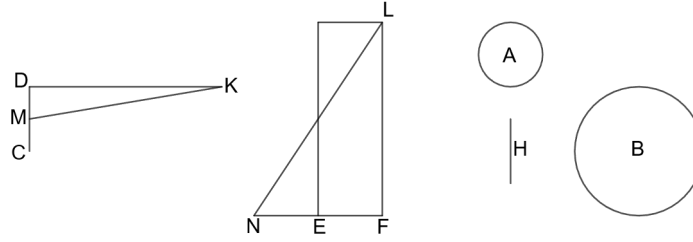


Abbildung 16: Figuren in diesem Beweis

Mit S bezeichnen wir den Flächeninhalt der Mantelfläche des Zylinders. Wir müssen also $A(B) = S$ zeigen.

Wir nehmen zunächst $A(B) < S$ an.

Wir legen jeweils ein regelmäßiges Polygon in und um den Kreis B , sodass

$$A(\text{Polygon um } B) : A(\text{Polygon in } B) < S : A(B) \quad (93)$$

gilt. Um A legen wir auch ein Polygon, das ähnlich zu dem um B ist. Dieses richten wir zu einem Prisma mit der gleichen Höhe wie der Zylinder auf, das Prisma umschreibt diesen also. Seien DK , senkrecht auf CD , und FL , senkrecht auf EF , beide so lang wie der Umfang des Polygons um A . Wir halbieren CD in M und ergänzen KM . Dann gilt

$$A(KDM) = A(\text{Polygon um } A) \quad (94)$$

und

$$A(\square EL) = A(\text{Mantelfläche des Prismas}). \quad (95)$$

Wir verlängern EF zu FN , sodass $EF = EN$ gilt und ergänzen LN . Da die Polygone um A und B ähnlich sind, gilt

$$\begin{aligned} A(KDM) : A(\text{Polygon um } B) &= A(\text{Polygon um } A) : A(\text{Polygon um } B) \\ &= DM^2 : H^2 = DM^2 : (CD \cdot EF) \\ &= DM : FN = A(KDM) : A(LFN), \end{aligned} \quad (96)$$

woraus wir

$$A(\text{Polygon um } B) = A(LFN) = A(\square EL) = A(\text{Mantelfläche des Prismas}) \quad (97)$$

erhalten. Daraus folgt mit (93)

$$A(\text{Mantelfläche des Prismas}) : A(\text{Polygon in } B) < S : A(B) \quad (98)$$

und äquivalent

$$A(\text{Mantelfläche des Prismas}) : S < A(\text{Polygon in } B) : A(B), \quad (99)$$

was nicht möglich ist, da die linke Seite größer und die rechte kleiner als 1 ist.

Sei nun $S < A(B)$.

Wir legen jeweils ein Polygon in und um B , sodass

$$A(\text{Polygon um } B) : A(\text{Polygon in } B) < A(B) : S \quad (100)$$

gilt. Diesmal schreiben wir ein ähnliches Polygon in A ein, das wir zu einem Prisma innerhalb des Zylinders aufspannen. Wir zeichnen wie zuvor DK und FL , die so lang sind wie der Umfang des Polygons in A . Dann gilt

$$A(KDM) > A(\text{Polygon in } A) \quad (101)$$

und

$$A(LFN) = A(\square EL) = A(\text{Mantelfläche des Prismas}). \quad (102)$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} A(\text{Polygon in } A) : A(\text{Polygon in } B) &= DM^2 : H^2 \\ &= A(KDM) : A(LFN), \end{aligned} \quad (103)$$

woraus wir mit (102)

$$A(\text{Mantelfläche des Prismas}) = A(LFN) > A(\text{Polygon in } B) \quad (104)$$

erhalten. Das ist aber nicht möglich, da außerdem

$$A(\text{Polygon um } B) : A(\text{Polygon in } B) < A(B) : S < A(\text{Polygon um } B) : S \quad (105)$$

und damit

$$A(\text{Polygon in } B) > S > A(\text{Mantelfläche des Prismas}) \quad (106)$$

gilt. Insgesamt erhalten wir also $A(B) = S$. □

Lemma 4.5. Die Mantelfläche eines gleichschenkligen Kegels ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius das geometrische Mittel aus der Mantellinie des Kegels und dem Radius der Grundfläche ist.

Beweis. Seien der Kreis A die Grundfläche des Kegels, C so lang wie der Radius von A , D so lang wie die Mantellinie des Kegels und E das geometrische Mittel von C und D . Weiter sei B der Kreis mit Radius E und S bezeichnet die Größe der Mantelfläche des Kegels.

Angenommen es gilt $A(B) < S$.

Wir legen in und um $\overline{B}$ jeweils ein Polygon, die ähnlich zueinander sind und für die

$$A(\text{Polygon um } B) : A(\text{Polygon in } B) < S : A(B) \quad (107)$$

gilt. Wir umschreiben auch A mit einem Polygon, das ähnlich zu dem um B ist, und spannen es zu einer Pyramide auf, deren Spitze die gleiche wie die des Kegels ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} A(\text{Polygon um } A) : A(\text{Polygon um } B) &= C^2 : E^2 = C : D \\ &= A(\text{Polygon um } A) : A(\text{Mantelfläche der Pyramide}), \end{aligned} \quad (108)$$

woraus wir

$$A(\text{Polygon um } B) = A(\text{Mantelfläche der Pyramide}) \quad (109)$$

folgern. Wenn wir das in (107) einsetzen, erhalten wir

$$A(\text{Mantelfläche der Pyramide}) : A(\text{Polygon in } B) < S : A(B) \quad (110)$$

und durch Umformen

$$A(\text{Mantelfläche der Pyramide}) : S < A(\text{Polygon in } B) : A(B), \quad (111)$$

was aber nicht möglich ist, da die linke Seite größer und die rechte Seite kleiner als 1 ist.

Nun nehmen wir $S < A(B)$ an.

Wir legen wieder Polygone in und um B , sodass

$$A(\text{Polygon um } B) : A(\text{Polygon in } B) < A(B) : S \quad (112)$$

gilt. Außerdem legen wir ein zu dem in B ähnliches Polygon in A , das wir zu einer Pyramide mit gleicher Spitze wie der Kegel aufspannen. Dann gilt (108), wobei es hier um die Polygone in A bzw. B geht und das letzte Gleichheitszeichen durch ein größer ersetzt werden muss. Damit gilt

$$A(\text{Mantelfläche der Pyramide}) > A(\text{Polygon in } B), \quad (113)$$

woraus wir durch Einsetzen in (112)

$$A(\text{Polygon um } B) : A(\text{Mantelfläche der Pyramide}) < A(B) : S \quad (114)$$

erhalten. Das führt wie im ersten Teil zu einem Widerspruch.

Insgesamt gilt also $A(B) = S$. □

Lemma 4.6. Das Verhältnis der Mantelfläche eines gleichschenkligen Kegels zum Flächeninhalt seiner Grundfläche ist gleich dem Verhältnis von Mantellinie des Kegels zum Radius der Grundfläche.

Beweis. Aus Lemma 4.5 wissen wir, dass die Mantelfläche eines gleichschenkligen Kegels so groß ist wie ein Kreis, dessen Radius das geometrische Mittel aus der Mantellinie und dem Radius ist. Es reicht also, diesen Kreis mit der Grundfläche zu vergleichen. Da sich aber zwei Kreise zueinander so verhalten wie die Quadrate ihrer Radien, gilt

$$A(\text{Kreis } B \text{ wie in 4.5}) : A(\text{Grundfläche}) = (m \cdot r) : r^2 = m : r, \quad (115)$$

wobei m die Mantellinie und r den Radius der Grundfläche bezeichnet. $\square$

Lemma 4.7. Wird ein Kegel von einer Ebene geschnitten, die parallel zur Grundfläche ist, dann ist die Oberfläche des Kegelsegments zwischen der Ebene und der Grundfläche so groß wie ein Kreis, dessen Radius das geometrische Mittel aus dem Anteil der Mantellinie zwischen den Ebenen und der Summe der Radien der Kreise in den Ebenen ist.

Beweis. Sei OAB der Schnitt des Kegels durch seine Spitze, DE sein Schnitt mit der Ebene und OFC die Achse des Kegels wie in Abbildung 17 dargestellt.

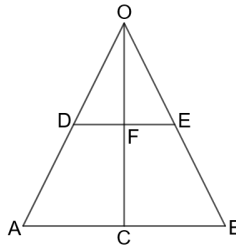


Abbildung 17: Kegelschnitt

Nach Lemma 4.5 ist die Mantelfläche des Kegels OAB so groß wie ein Kreis mit Radius $\sqrt{AO \cdot AC}$. Analog ist die Mantelfläche des Kegels ODE so groß wie ein Kreis mit Radius $\sqrt{DO \cdot DF}$. Die Oberfläche des Kegelsegments zwischen Ebene und Grundfläche ist dann durch die Differenz dieser Kreise gegeben. Es gilt

$$AO \cdot AC - DO \cdot DF = AD \cdot AC + DO \cdot AC - DO \cdot DF. \quad (116)$$

Mit den Strahlensätzen erhalten wir $AO : AC = DO : DF$ oder äquivalent

$$DO \cdot AC = AO \cdot DF, \quad (117)$$

was wir in (116) einsetzen können und so

$$\begin{aligned} AO \cdot AC - DO \cdot DF &= AD \cdot AC + AO \cdot DF - DO \cdot DF \\ &= AD \cdot AC + AD \cdot DF \\ &= AD \cdot (AC + DF) \end{aligned} \quad (118)$$

erhalten. Da die Kreise zueinander wie die Quadrate ihrer Radien sind, ist der Unterschied der Kreise mit den Radien $\sqrt{AO \cdot AC}$ und $\sqrt{DO \cdot DF}$ so groß wie ein Kreis mit Radius $\sqrt{AD \cdot (AC + DF)}$. Da AD der Anteil der Mantellinie und $AC + DF$ die Summe der Radien in den Ebenen ist, gilt die Behauptung. $\square$

Im Folgenden brauchen wir eine nicht erneut bewiesene Aussage von Euklid.

Lemma 4.8. (Eucl. XII. 11) Die Volumen von Kegeln mit gleicher Höhe haben zueinander das gleiche Verhältnis wie ihre Grundflächen. Die Volumen von Kegeln mit gleicher Grundfläche haben zueinander das gleiche Verhältnis wie ihre Höhen.

Außerdem definieren wir den Doppelkegel, mit dessen Oberfläche und Volumen sich die nächsten Lemmata beschäftigen.

Definiton 4.9. Seien zwei Kegel mit gleicher Grundfläche gegeben. Legen wir die Grundflächen aneinander, sodass die Kegelachsen auf einer geraden Linie liegen, bezeichnen wir diese Figur als **Doppelkegel**.

Lemma 4.10. Jeder Doppelkegel, der aus zwei gleichschenkligen Kegeln besteht, hat das gleiche Volumen wie ein Kegel, dessen Grundfläche so groß wie die Oberfläche eines Kegels des Doppelkegels und die Höhe so lang wie die Senkrechte von der Spitze dieses Kegels auf die Mantellinie des anderen ist.

Notation. $G(X)$ bezeichnet den Flächeninhalt der Grundfläche einer Figur X

Beweis. Sei $OABD$ der Doppelkegel, der aus zwei Kegeln mit Spitzen O und D besteht, die eine gemeinsame Grundfläche mit Radius AB haben.

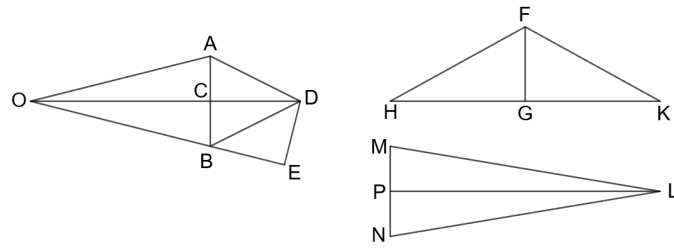


Abbildung 18: Doppelkegel und konstruierte Kegel

Sei FHK ein Kegel, dessen Grundfläche so groß ist wie die Oberfläche des Kegels OAB und die Höhe FG so lang wie DE , der Senkrechten von D auf BO . Dann müssen wir $V(OABD) = V(FHK)$ zeigen.

Wir konstruieren einen weiteren Kegel LMN , dessen Grundfläche so groß wie die von OAB und Höhe LP so lang wie DO ist. Dann gilt

$$LP : CD = DO : CD. \quad (119)$$

Aus Lemma 4.8 erhalten wir

$$DO : CD = V(OADB) : V(DAB) \quad (120)$$

und

$$LP : CD = V(LMN) : V(DAB), \quad (121)$$

woraus mit (119) die Gleichheit

$$V(OABD) = V(LMN) \quad (122)$$

folgt. Wegen $AB = MN$ und der Konstruktion von FHK gilt dann

$$\begin{aligned} G(FHK) : G(LMN) &= O(OAB) : G(OAB) \\ &= BO : BC = DO : DE = LP : FG \end{aligned} \quad (123)$$

wobei wir in der zweiten Gleichheit Lemma 4.6 verwendet haben. In den Kegeln FHK und LMN ist also das Verhältnis der Grundseiten umgekehrt proportional zum Verhältnis der Höhen. Damit haben FHK und LMN das gleiche Volumen und nach (122) haben dann auch FHK und $OABD$ das gleiche Volumen. $\square$

Lemma 4.11. Sei ein Doppelkegel aus zwei gleichschenkligen Kegeln gegeben. Wir schneiden einen der Kegel mit einer Ebene parallel zur Grundfläche und behalten den Teil mit der Spitze, dadurch haben wir eine neue Grundfläche. Auf

dieser neuen Grundfläche konstruieren wir einen Kegel, der die gleiche Spitze wie der ursprüngliche andere Kegel hat. Durch das Kegelsegment und den neu konstruierten Kegel haben wir nun einen neuen Doppelkegel. Der Volumenunterschied der beiden Doppelkegel ist dann so groß wie das Volumen eines Kegels, dessen Grundseite so groß ist wie die Oberfläche des weggelassenen Kegelsegments und die Höhe so lang wie die Senkrechte von der Spitze des zweiten Kegels auf die Mantelfläche des ersten Kegels.

Beweis. Sei $OACB$ der ursprüngliche Doppelkegel. Der Kegel OAB wird von einer Ebene parallel zu seiner Grundfläche geschnitten, wodurch wir als Schnitt den Kreis mit Durchmesser DE erhalten. Dieser Kreis sei nun die neue Grundfläche der Kegel, vom oberen Kegel behalten wir also den Abschnitt ODE und unten konstruieren wir den Kegel CDE und erhalten so den Doppelkegel $ODCE$.

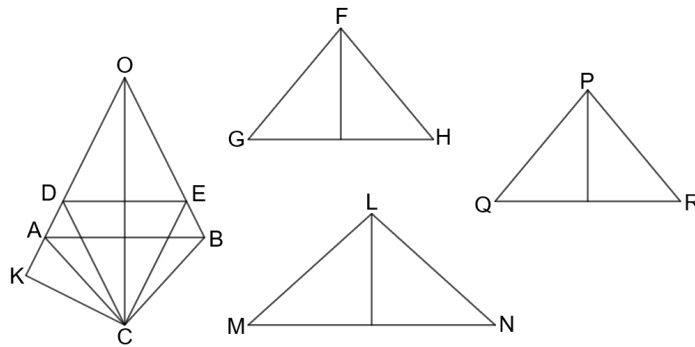


Abbildung 19: Konstruktion des neuen Doppelkegels und der Hilfskegel

Wir betrachten außerdem den Kegel FGH , dessen Grundfläche so groß wie die Oberfläche des Kegelsegments $DABE$ ist und seine Höhe so lang wie die Senkrechte CK von C auf AO . Mit Lemma 4.10 sollte dann also gelten, dass das Volumen von FGH so groß ist wie die Differenz der Doppelkegel $OACB$ und $ODCE$. Wir konstruieren weiter den Kegel LMN , dessen Grundfläche so groß wie die Oberfläche von OAB ist und die Höhe so lang wie CK . Der Kegel PQR habe eine Grundfläche mit der gleichen Größe wie die Oberfläche von ODE und einer Höhe so lang wie CK . Da die Oberfläche von OAB so groß ist wie die von ODE zusammen mit der von $DABE$, gilt nach Konstruktion

$$G(LMN) = G(PQR) + G(FGH) \quad (124)$$

und die Kegel haben die gleiche Höhe, womit

$$V(LMN) = V(PQR) + V(FGH) \quad (125)$$

gilt. Nach Lemma 4.10 gilt $V(LMN) = V(OACB)$ und $V(PQR) = V(ODCE)$, woraus wir nach Einsetzen in (125) und Umstellen

$$V(FGH) = V(OACB) - V(ODCE) \quad (126)$$

erhalten, was wir zeigen wollten. $\square$

4.2 Rotationskörper in der Kugel

In diesem Kapitel betrachten wir das Volumen- und Oberflächenverhältnis einer Kugel zu einem Rotationskörper, der in die Kugel eingeschrieben wurde. Zunächst behandeln wir eine Aussage, die wir dafür brauchen werden.

Lemma 4.12. Sei $ABC...A'...C'B'A$ ein regelmäßiges $2n$ -Eck, das in einen Kreis eingelegt ist, sodass AA' der Durchmesser ist. Wir verbinden $B, C, \dots, E$ mit ihren bezüglich AA' jeweils gegenüberliegenden Punkten $B', C', \dots, E'$. Dann gilt

$$(BB' + CC' + \dots) : AA' = A'B : AB. \quad (127)$$

Beweis. Die Schnittpunkte von $BB', CC', \dots, EE'$ mit AA' bezeichnen wir mit $F, G, H, \dots, I$. Außerdem ergänzen wir die Linien $CB', DC', \dots$, deren Schnittpunkte mit AA' wir $K, L, \dots, N$ nennen wie in Abbildung 20 dargestellt.

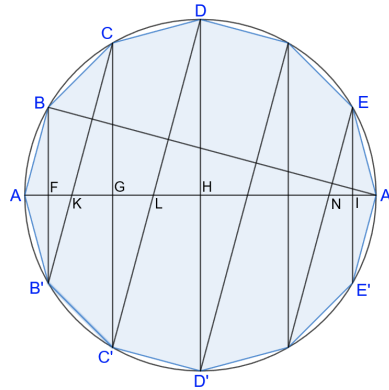


Abbildung 20: Polygon im Kreis mit Hilfslinien

$CB', DC', \dots$ sind dann parallel zueinander und auch zu AB . Da nun $BFA, B'FK, \dots, E'IA'$ ähnliche Dreiecke sind, gilt

$$BF : AF = B'F : FK = CG : GK = C'G : GL = \dots = E'I : IA' \quad (128)$$

und wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned}(BB' + CC' + \dots) : AA' &= (BF + B'F + \dots) : (AF + FK + \dots) \\ &= BF : AF = A'B : AB.\end{aligned}\tag{129}$$

□

In diesem Kapitel betrachten wir folgende Situation:

Sei $AB\dots M\dots Y A' Y' \dots M' \dots B' A$ der größte Kreis einer Kugel, in welchen wir ein regelmäßiges $4n$ -Eck einlegen. Seien AA' und MM' zwei Durchmesser des Kreises, die senkrecht aufeinanderstehen (siehe Abb. 20).

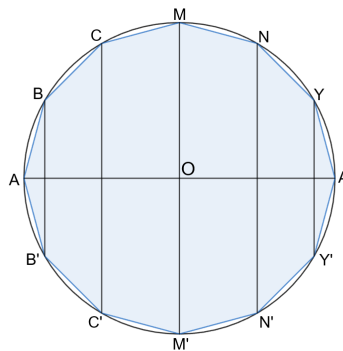


Abbildung 21: Polygon im Kreis

Nun drehen wir das Polygon und den Kreis zusammen um AA' und erhalten eine Figur in der Kugel, die wir als **inneren Rotationskörper** bezeichnen.

Lemma 4.13. Die Kugel hat eine größere Oberfläche als der innere Rotationskörper.

Für den Beweis brauchen wir eine Definition und eine Annahme, die Archimedes für dieses Buch festlegte.

Definiton 4.14. Oberflächen sind **konkav in die gleiche Richtung**, falls jede Gerade, die zwei beliebige Punkte auf ihnen verbindet, auf der gleichen Seite der Oberflächen liegt.

Modern könnte man auch sagen, dass zwei Oberflächen konkav in die gleiche Richtung sind, falls sie in die gleiche Richtung gekrümmt sind.

Annahme 4.15. Wenn zwei Oberflächen konkav in die gleiche Richtung sind und die eine vollständig in der anderen liegt, dann ist diese kleiner als die äußere.

Beweis. Vergleichen wir die Halbkugel MAM' und die darin liegende Hälfte des Rotationskörpers, sehen wir, dass sie in dem Kreis, der aus MM' entstand, einen gemeinsamen Rand haben. Für den Rest ihrer Oberflächen gilt, dass sie beide konkav in eine Richtung sind und die des halben Rotationskörpers vollständig in der Halbkugel liegt. Nach Annahme 4.15 ist die Oberfläche des Halbkreises größer als die des halben Rotationskörpers. Insgesamt ist also die Oberfläche der Kugel größer als die des Rotationskörpers. $\square$

Lemma 4.16. Die Oberfläche des inneren Rotationskörpers ist gleich dem Flächeninhalt eines Kreises, dessen Radius die Länge $\sqrt{AB(BB' + CC' + \dots + YY')}$ hat.

Beweis. Die Oberfläche des Rotationskörpers kann man durch die Summe der Mantelflächen der Kegelsegmente $ABB', BB'C'C, \dots$ bestimmen. Nach Lemma 4.5 ist die Mantelfläche von ABB' so groß wie ein Kreis mit Radius $\sqrt{AB \cdot \frac{1}{2}BB'}$. Die Mantelfläche des Kegelsegments $BB'C'C$ ist nach Lemma 4.7 so groß wie ein Kreis mit Radius $\sqrt{BC \cdot \frac{1}{2}(BB' + CC')}$. Wegen $AB = BC = \dots$ ist die gesamte Oberfläche des Rotationskörpers so groß wie ein Kreis mit Radius

$$\begin{aligned} & \sqrt{AB \cdot \frac{1}{2}BB' + BC \cdot \frac{1}{2}(BB' + CC') + \dots + NY \cdot \frac{1}{2}(NN' + YY') + YA' \cdot \frac{1}{2}YY'} \\ &= \sqrt{AB \cdot (BB' + CC' + \dots + YY')}. \end{aligned} \quad (130)$$

$\square$

Lemma 4.17. Die Oberfläche des inneren Rotationskörpers ist kleiner als viermal die Fläche des größten Kreises in der Kugel.

Beweis. Sei R ein Kreis mit Radius $\sqrt{AB \cdot (BB' + CC' + \dots + YY')}$, seine Fläche ist also so groß wie die Oberfläche des Rotationskörpers nach Lemma 4.16. Aus Lemma 4.12 erhalten wir

$$AB \cdot (BB' + CC' + \dots + YY') = AA' \cdot BA' \quad (131)$$

und daraus

$$(\text{Radius von } R)^2 = AA' \cdot BA' < (AA')^2. \quad (132)$$

Damit ist die Fläche von R und so auch die Oberfläche des Rotationskörpers kleiner als viermal die Fläche des Kreises $AMA'M'$, der der größte Kreis in der Kugel ist. $\square$

Lemma 4.18. Das Volumen des inneren Rotationskörpers ist gleich dem eines Kegels, dessen Grundfläche so groß wie die Oberfläche des Rotationskörpers ist und dessen Höhe so lang wie die Senkrechte vom Kreismittelpunkt auf eine Seite des Polygons ist.

Beweis. Sei $AB...A'...B'A$ das Polygon, das in den größten Kreis eingeschrieben ist. Wir ergänzen die Linien $BB', CC', \dots$ wie in Abbildung 22 dargestellt. Wir konstruieren durch Rotation um AA' Kegel mit Spitze O und deren Grundflächen die Kreise mit Durchmesser $BB', CC', \dots$ sind. Dann ist $OBAB'$ ein Doppelkegel, dessen Volumen nach Lemma 4.10 so groß ist wie das des Kegels mit der Grundfläche so groß wie die Oberfläche des Kegels ABB' und der Höhe p , die so lang wie die Senkrechte von O auf AB ist.

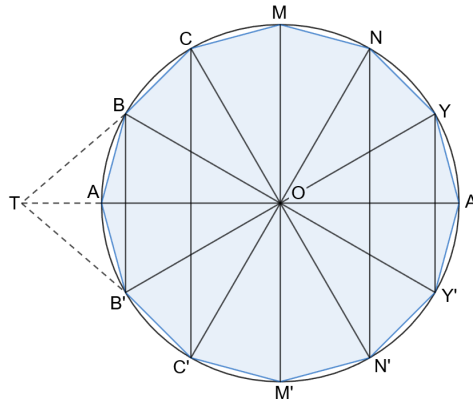


Abbildung 22: Polygon mit Hilfslinien

Sei T der Schnittpunkt von BC und $B'C'$. Das Volumen des Rotationskörpers, der durch Drehung von BOC entsteht, ist gegeben durch die Differenz der Volumen der Doppelkegel $OCTC'$ und $OBTB'$, also nach Lemma 4.11 durch das Volumen des Kegels, dessen Grundseite so groß ist wie die Oberfläche des Kegelsegments $BB'C'C$ und die Höhe so lang wie p . Führen wir dies fort und addieren die Volumen, zeigen wir, da Kegel gleicher Höhe sich wie ihre Grundseiten zueinander verhalten, dass das Volumen des Rotationskörpers so groß ist wie ein Kegel mit Höhe p und der Grundfläche so groß wie die Summe der Oberflächen des Kegels BAB' , des Kegelsegments $BB'C'C$ etc., also insgesamt der Oberfläche des Rotationskörpers. $\square$

Lemma 4.19. Das Volumen des inneren Rotationskörpers ist kleiner als viermal das Volumen eines Kegels, dessen Grundfläche der größte Kreis der Kugel und die Höhe der Radius der Kugel ist.

Beweis. Nach Lemma 4.18 gilt, dass der Rotationskörper so groß ist wie ein Kegel, dessen Grundseite so groß ist wie die Oberfläche des Rotationskörpers und die Höhe so lang wie p , was die Senkrechte vom Kreismittelpunkt auf eine Seite des Polygons bezeichnet. Sei R ein solcher Kegel. Weiter sei S ein Kegel mit dem größten Kreis als Grundseite und dem Radius der Kugel als Höhe. Aus Lemma 4.17 wissen wir, dass die Oberfläche des Rotationskörpers kleiner ist als viermal der größte Kreis der Kugel und damit gilt auch

$$G(R) < 4 \cdot G(S). \quad (133)$$

Außerdem ist die Höhe von R kleiner als die von S . Insgesamt ist dann das Volumen von R kleiner als viermal das von S , also per Konstruktion ist der Rotationskörper kleiner als viermal der beschriebene Kegel. $\square$

4.3 Rotationskörper um die Kugel

Im Vergleich zum vorherigen Kapitel geht es hier um die Verhältnisse einer Kugel zu einem Rotationskörper, der um die Kugel liegt.

Wir betrachten hierfür die folgende Situation:

Sei $AB...M...A'...M'...B'A$ ein regelmäßiges $4n$ -Eck, das um den größten Kreis einer Kugel gelegt wurde. AA' halbiere das Polygon und schneide den Kreis in a und a' (siehe Abb. 23).

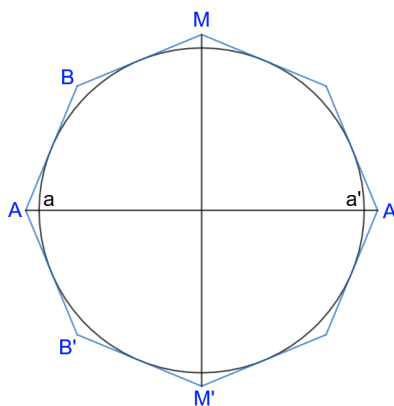


Abbildung 23: Polygon um den Kreis

Wir drehen den Kreis und das Polygon um AA' und erhalten so die Kugel und eine Figur, die wir als **äußeren Rotationskörper** bezeichnen.

Lemma 4.20. Die Oberfläche des äußeren Rotationskörpers ist größer als die der Kugel.

Beweis. Der Kreis aus MM' ist eine Seite der Halbkugel MaM' und des halben Rotationskörpers aus $M...BAB'...M'$. Die Reste der Oberflächen sind beide konkav in die gleiche Richtung und der halbe Rotationskörper enthält vollständig die Halbkugel. Nach Lemma 4.15 ist die Oberfläche des halben Rotationskörpers größer als die der Halbkugel und analog auf der anderen Seite. Also ist die Oberfläche des Rotationskörpers größer als die der Kugel. $\square$

Lemma 4.21. Die Oberfläche des äußeren Rotationskörpers ist so groß wie ein Kreis mit Radius $\sqrt{AB \cdot (BB' + CC' + \dots)}$.

Der Beweis ist identisch zu dem von Lemma 4.16.

Lemma 4.22. Die Oberfläche des äußeren Rotationskörpers ist größer als viermal die Fläche des größten Kreises der Kugel.

Beweis. Sei R der Kreis, der so groß ist wie der Rotationskörper. Aus Lemma 4.12 erhalten wir

$$AB \cdot (BB' + CC' + \dots) = AA' \cdot BA' \quad (134)$$

und

$$\text{Radius von } R > BA' \quad (135)$$

gilt nach Lemma 4.21. Außerdem ist $BA' = 2 \cdot OP$, wobei P der Berührungspunkt von AB mit dem Kreis ist. Zusammen erhalten wir dann

$$\text{Radius von } R > BA' = 2 \cdot OP = 2 \cdot \text{Radius des Kreises.} \quad (136)$$

R und damit die Oberfläche des Rotationskörpers ist also größer als viermal die Fläche des größten Kreises. $\square$

Lemma 4.23. Das Volumen des äußeren Rotationskörpers ist so groß wie das eines Kegels mit der Grundseite so groß wie die Oberfläche des Rotationskörpers und der Höhe so lang wie der Radius der Kugel.

Da der Rotationskörper auch ein Körper eingeschrieben in einer größeren Kugel ist und die Senkrechten auf die Seiten des Polygons so lang wie der Radius der inneren Kugel ist, beweist sich die Aussage identisch zu Lemma 4.18.

Lemma 4.24. Das Volumen des äußeren Rotationskörpers ist größer als viermal das Volumen des Kegels, dessen Grundfläche der größte Kreis der Kugel und Höhe der Radius ist.

Beweis. Nach Lemma 4.22 ist die Oberfläche des Rotationskörpers größer als viermal die Fläche des größten Kreises der Kugel. Das Volumen des Kegels mit der Oberfläche des Körpers als Grundfläche und dem Radius als Höhe ist also

größer als viermal das Volumen des Kegels mit gleicher Höhe und dem größten Kreis als Grundfläche nach Lemma 4.8. Nach Lemma 4.23 ist der erste Kegel so groß wie der Rotationskörper und damit ist dieser größer als der zweite Kegel, welcher der in der Aussage beschriebene ist. $\square$

4.4 Volumen und Oberfläche der Kugel

In diesem Kapitel wenden wir unsere vorherigen Beobachtungen an, um das Volumen und die Oberfläche der Kugel zu bestimmen. Zunächst bestimmen wir noch Verhältnisse des äußeren zum inneren Rotationskörpers.

Lemma 4.25. Seien zwei ähnliche regelmäßige $4n$ -Ecke gegeben, die in und um einen Kreis liegen. Das innere sei $ab...a'...b'a$ und das äußere $AB...A'...B'A$. Drehen sich nun die beiden Polygone und der Kreis um aa' bzw. AA' , erhalten wir eine Kugel und jeweils einen Rotationskörper innerhalb und außerhalb der Kugel. Dann gilt

$$\text{i) } O(\text{äußerer Körper}) : O(\text{innerer Körper}) = AB^2 : ab^2$$

$$\text{ii) } V(\text{äußerer Körper}) : V(\text{innerer Körper}) = AB^3 : ab^3$$

Beweis. zu i): Seien AA' und aa' auf der gleichen geraden Linie und sei $MmOm'M'$ der Durchmesser, der senkrecht auf $Aaa'A'$ steht.

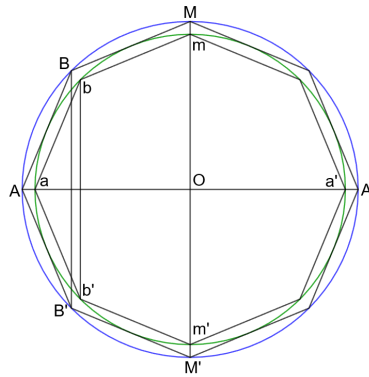


Abbildung 24: Polygon in und um den Kreis

Wir ergänzen $BB', CC', \dots$ und $bb', cc', \dots$, die alle parallel zueinander und zu MM' sind (siehe Abb. 24). Sei R ein Kreis, der so groß wie die Oberfläche des äußeren Körpers ist, und S sei ein Kreis mit dem gleichen Flächeninhalt wie die Oberfläche des inneren Körpers. Nach Lemma 4.21 gilt dann

$$(\text{Radius von } R)^2 = AB \cdot (BB' + CC' + \dots) \quad (137)$$

und nach Lemma 4.16

$$(\text{Radius von } S)^2 = ab \cdot (bb' + cc' + \dots). \quad (138)$$

Da die Polygone ähnlich sind, sind auch die rechten Seiten der Gleichungen ähnlich und haben das Verhältnis

$$AB(BB' + CC' + \dots) : ab(bb' + cc' + \dots) = AB^2 : ab^2. \quad (139)$$

Durch Einsetzen der ersten beiden Gleichungen in die dritte und aus der Definition von R und S folgt dann die Aussage.

zu ii): Sei U ein Kegel mit Grundseite R und Höhe Oa , W sei ein Kegel mit Grundseite S und der Höhe so lang wie die Senkrechte p von O auf ab . U und W haben das gleiche Volumen wie der äußere bzw. innere Rotationskörper nach den Lemmata 4.18 und 4.23. Da die Polygone ähnlich sind, gilt

$$AB : ab = Oa : p = \text{Höhe von } U : \text{Höhe von } W \quad (140)$$

und wie in i) gezeigt haben die Grundflächen das Verhältnis $AB^2 : ab^2$ zueinander. Insgesamt haben wir also

$$V(U) : V(W) = AB^3 : ab^3 \quad (141)$$

und da die Kegel das gleiche Volumen wie die Rotationskörper haben, folgt die Aussage. $\square$

Satz 4.26. Die Oberfläche einer Kugel ist so groß wie viermal die Fläche des größten Kreises in dieser Kugel.

$$\boxed{O(Kugel) = 4 \cdot A(\text{größter Kreis})} \quad (142)$$

Beweis. Sei C ein Kreis mit $A(C) = 4 \cdot A(\text{größter Kreis})$.

Wir nehmen zunächst $A(C) < O(Kugel)$ an.

Nach Lemma 4.1 können wir zwei gerade Linien β und γ mit $\beta > \gamma$ finden, sodass

$$\beta : \gamma < O(Kugel) : A(C) \quad (143)$$

gilt. Sei δ eine gerade Linie, die so lang wie das geometrische Mittel von β und γ ist. Seien weiter zwei ähnliche regelmäßige $4n$ -Ecke in und um den Kreis gegeben, für die

$$\text{äußere Seite} : \text{innere Seite} < \beta : \delta \quad (144)$$

wie in Lemma 4.2 gilt. Nun drehen wir die Polygone und den Kreis um den Durchmesser und erhalten dadurch Rotationskörper in und um die Kugel. Dann gilt

$$\begin{aligned}
O(\text{äußerer Körper}) : O(\text{innerer Körper}) \\
&= (\text{äußere Seite})^2 : (\text{innere Seite})^2 \\
&< \beta^2 : \delta^2 = \beta : \gamma \\
&< O(Kugel) : A(C),
\end{aligned} \tag{145}$$

wobei wir Lemma 4.25 i) in der zweiten Zeile, (144) und die Definition von δ in der dritten Zeile und (143) in der letzten Zeile benutzt haben. Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$O(\text{äußerer Körper}) : O(Kugel) < O(\text{innerer Körper}) : A(C). \tag{146}$$

Das ist aber nicht möglich, da die linke Seite nach Lemma 4.20 größer als 1 und die rechte Seite nach Lemma 4.17 kleiner als 1 ist.

Sei nun $O(Kugel) < A(C)$.

Wir finden wieder zwei gerade Linien β und γ mit $\beta > \gamma$, sodass

$$\beta : \gamma < A(C) : O(Kugel) \tag{147}$$

gilt. Wie zuvor legen wir zwei ähnliche Polygone in und um den Kreis, für deren Seitenverhältnis

$$\text{äußere Seite} : \text{innere Seite} < \beta : \delta \tag{148}$$

gilt und erhalten aus diesen durch Drehung um den Durchmesser zwei Rotationskörper. Dann gilt analog zu (145)

$$O(\text{äußerer Körper}) : O(\text{innerer Körper}) < A(C) : O(Kugel), \tag{149}$$

oder äquivalent

$$O(\text{äußerer Körper}) : A(C) < O(\text{innerer Körper}) : O(Kugel), \tag{150}$$

was aber nicht möglich ist, da die linke Seite größer als 1 nach Lemma 4.22 und die rechte Seite nach Lemma 4.13 kleiner als 1 ist.

Insgesamt ist also die Oberfläche der Kugel so groß wie C , also viermal der Fläche des größten Kreises. $\square$

Satz 4.27. Das Volumen einer Kugel ist viermal so groß wie das eines Kegels, dessen Grundseite der größte Kreis in der Kugel und dessen Höhe der Radius der Kugel ist.

$$V(Kugel) = 4 \cdot V(Kegel) \tag{151}$$

Beweis. Sei zuerst $V(Kugel) > 4 \cdot V(Kegel)$.

Sei W der Kegel, dessen Grundseite so groß wie viermal der größte Kreis und die Höhe so lang wie der Radius der Kugel ist. Dann ist die Kugel nach Annahme größer als W und wir finden nach Lemma 4.1 zwei gerade Linien β und γ mit $\beta > \gamma$, sodass

$$\beta : \gamma < V(Kugel) : V(W) \quad (152)$$

gilt. Sei δ das geometrische Mittel zwischen β und γ . Wir legen zwei ähnliche regelmäßige $4n$ -Ecke in und um den Kreis, für die

$$\text{äußere Seite} : \text{innere Seite} < \beta : \delta \quad (153)$$

gilt. Nun drehen wir die Polygone und den Kreis um den Durchmesser und erhalten die Kugel und zwei Rotationskörper, von denen einer in und einer um die Kugel liegt. Mit Lemma 4.25 ii) gilt dann

$$\begin{aligned} V(\text{äußerer Körper}) : V(\text{innerer Körper}) &< \beta^3 : \delta^3 \\ &< \beta : \gamma < V(Kugel) : V(W), \end{aligned} \quad (154)$$

wobei wir (152) in der letzten Ungleichung benutzt haben. Die zweite Ungleichung wurde von Archimedes nur angenommen und erst später in einem Kommentar von Eutocius bewiesen. Durch Umformung erhalten wir

$$V(\text{äußerer Körper}) : V(Kugel) < V(\text{innerer Körper}) : V(W), \quad (155)$$

was einen Widerspruch liefert, da die linke Seite kleiner als 1 nach Lemma 4.20 und die rechte Seite größer als 1 nach Lemma 4.19 ist.

Nun nehmen wir $V(Kugel) < V(W)$ an.

Wir wählen wieder zwei gerade Linien $\beta > \gamma$ mit

$$\beta : \gamma < V(W) : V(Kugel). \quad (156)$$

Analog zum ersten Fall erhalten wir schließlich

$$V(\text{äußerer Körper}) : V(W) < V(\text{innerer Körper}) : V(Kugel), \quad (157)$$

was wieder ein Widerspruch ist, da die linke Seite nach Lemma 4.24 größer als 1 und die rechte Seite kleiner als 1 ist.

Insgesamt ist das Volumen der Kugel so groß wie das des Kegels W , also wie viermal das Volumen des Kegels mit größtem Kreis als Grundfläche und Radius als Höhe. $\square$

Für den Beweis des zweiten Hauptresultats brauchen wir eine Aussage von Euklid, die nicht erneut bewiesen wurde.

Lemma 4.28. (Eucl. XII. 10) Das Volumen eines Zylinders ist dreimal so groß wie das eines Kegels mit gleicher Grundseite und Höhe.

$$V(\text{Zylinder}) = 3 \cdot V(\text{Kegel}) \quad (158)$$

Satz 4.29. Das Volumen eines Zylinders, dessen Grundseite der größte Kreis einer Kugel und Höhe der Durchmesser dieser Kugel ist, beträgt $\frac{3}{2}$ des Volumens der Kugel.

$$V(\text{Zylinder}) = \frac{3}{2} \cdot V(\text{Kugel}) \quad (159)$$

Beweis. Aus (158) erhalten wir, dass das Volumen eines Zylinders sechsmal so groß ist wie das eines Kegels mit gleicher Grundseite und dessen Höhe so lang wie der Radius der Kugel ist. Mit Satz 4.27 gilt dann

$$V(\text{Kugel}) = 4 \cdot V(\text{Kegel mit Höhe } r) = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot V(\text{Zylinder}) = \frac{2}{3} \cdot V(\text{Zylinder}), \quad (160)$$

was äquivalent zu (159) ist. □

5 Schlussbetrachtung

Archimedes erzielte mit den in dieser Arbeit vorgestellten Werken Meilensteine in der Berechnung von Volumen, Oberflächen und Flächeninhalten von geometrischen Figuren. So führte er kompliziertere Figuren wie den Kreis, das Parabelsegment und die Kugel auf die einfacheren Figuren Dreieck und Zylinder zurück und konnte aus diesen die genauen Werte für die ursprünglichen Figuren bestimmen.

Vor allem die Werke zu Kugel und Zylinder waren für Archimedes sehr wichtig, da sie im Vergleich zu den meisten seiner anderen Werke Formen behandelte, die auch die einfachen Bürger kannten. Während Parabeln etwas waren, wofür sich nur Mathematiker interessierten, waren die Kugel sowie der Zylinder Formen, denen man im Alltag begegnete. Deshalb soll auf dem Grabstein des Archimedes das Bild einer Kugel eingeschrieben in einen Zylinder abgebildet und das Verhältnis ihrer Volumen angegeben sein. (vgl. [Hea97])

6 Literaturverzeichnis

- [Hea21] Thomas Heath (1921): "A history of Greek Mathematics: Volume 2. From Aristarchus to Diophantus", Oxford At The Clarendon Press
- [Hea97] Thomas Heath (1897): "The works of Archimedes", University Press Cambridge
- [Her14] Dietmar Herrmann(2014): "Die antike Mathematik: Eine Geschichte der griechischen Mathematik, ihrer Probleme und Lösungen", Springer Spektrum
- [Hop13] Edmund Hoppe (2013): "Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum", Winter Verlag Heidelberg
- [Sch16] Ivo Schneider (2016): "Archimedes: Ingenieur, Naturwissenschaftler, Mathematiker", Springer Spektrum

Internetquellen

www.apophorismen.de/zitat/18536 (aufgerufen am 06.02.2026)

7 Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich meine Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

München, den 10. Februar 2026

David Höller