Extremalpunkte von Mengen von Matrizen mit vorgegebener Randverteilung

Diplomarbeit von Peter Philip
korrigierte Version 1.0

Betreut von
Prof. Dr. Ehrhard Behrends

Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
25. Juni 1997

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einleitung

Das Thema dieser Arbeit „Extremalpunkte von Mengen von Matrizen mit vorgegebener Randverteilung“ hat folgende Vorgeschichte: Im Sommer 1995 beschäftigten sich Herr Prof. Dr. E. Behrends und Herr U. Voll mit dem Problemkreis „optimaler Couplings“. Dabei wird ein Paar (X, Y) von meßbaren Abbildungen

$$X, Y : \Omega \longrightarrow \{1, \ldots, n\} \tag{0.1}$$

auf einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω als Coupling bezeichnet, falls $P_X = \mu$ und $P_Y = \nu$, wobei $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ und $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ gegebene Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\{1, \ldots, n\}$ sind. Man kann zeigen, daß dann immer

$$P\{X \neq Y\} \geq \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |\mu_i - \nu_i| \tag{0.2}$$

gilt. (X, Y) wird als optimales Coupling bezeichnet, falls in (0.2) Gleichheit gilt. Die Aufgabe, ein optimales Coupling zu finden, ist also identisch mit dem Problem, (X, Y) so zu bestimmen, daß $P\{X \neq Y\}$ minimiert wird, das heißt, daß $P\{X = Y\}$ maximiert wird. Anders ausgedrückt, geht es darum, ein Maß M auf $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ zu finden, so daß die Randverteilungen μ und ν sind (die Menge solcher Maße wird mit $\mathcal{D}(\mu, \nu)$ bezeichnet) und $\sum_{i=1}^{n} M(i, i)$ maximiert wird. Aufgrund der speziellen Gestalt der Menge $\mathcal{D}(\mu, \nu)$ genügt es dazu, $\sum_{i=1}^{n} M(i, i)$ auf den Extremalpunkten von $\mathcal{D}(\mu, \nu)$ zu maximieren.

Somit war das Interesse an der Kenntnis der Extremalpunkte von Mengen von Maßen mit vorgegebener Randverteilung geweckt. Einige Literaturrecherchen ergaben, daß das Problem der Charakterisierung solcher Extremalpunktmengen seit der Arbeit von Birkhoff 1946 (siehe [1]) in einer Vielzahl von Arbeiten untersucht worden ist und es viele gelöste und ungelöste Probleme zu diesem Thema gibt. Von den Untersuchungsmethoden her ist dabei zwischen den Fällen diskreter Maße und den Fällen kontinuierlicher Maße zu unterscheiden. Wärend seit der Arbeit von Grząślewicz 1987 (siehe [4]) eine Charakterisierung der Extremalpunkte im diskreten Fall existiert, ist das Problem im kontinuierlichen Fall noch weitgehend ungelöst (die von Lindenstrauss gegebene Charakterisierung (siehe [9] und Abschnitt 1.4) erweist sich nicht als sehr hilfreich, wenn man für ein vorgegebenes Maß entscheiden möchte, ob es extremal ist oder nicht).

In dieser Arbeit (respektive in Kapitel 2) werden die bekannten Charakterisierungen im diskreten Fall (traditionell werden dabei Produktmaße mit Matrizen identifiziert) zusammengestellt und in einigen Fällen verallgemeinert und ergänzt (zum Beispiel werden auch überabzählbare diskrete Maßräume betrachtet). Dabei wird zunächst in Abschnitt 2.2 der Satz von LINDENSTRAUSS auf diskrete Maße angewendet. In Abschnitt 2.4 werden dann die Charakterisierungen aus [4] zusammengestellt, wobei hier konsequent die Sprache der Graphentheorie verwendet wird (neu sind die Sätze 2.4.11 und 2.4.27). In Abschnitt 2.6 werden einige Aspekte des anscheinend sehr schwierigen Problems exponierter Punkte von Mengen von Matrizen mit vorgegebener Randverteilung betrachtet.

Am leichtesten ist die Charakterisierung der Extremalpunkte erwartungsgemäß für endliche diskrete Maße. Dieser Fall wird in Abschnitt 2.5 behandelt. Man kennt in diesem Fall sogar einen Algorithmus, der die Extremalpunkte erzeugt (siehe Abschnitt A.1 für eine Implementation).

In Kapitel 3 wird in verschiedenen Fällen die Kardinalität der Extremalpunktmengen bestimmt. Schon im endlichen Fall gibt es hier noch viele offene Fragen. Zum Beispiel scheint es bisher keinen Algorithmus zu geben, der die Anzahl der Extremalpunkte berechnet, ohne sie alle explizit zu bestimmen. Für den $2 \times n$-Fall ist es gelungen, einen solchen Algorithmus zu finden (siehe Definition 3.2.1, Satz 3.2.3 und Abschnitt A.2). Allerdings muß für diesen Algorithmus das sogenannte „Knapsack-Problem“ gelöst werden, von dem bekannt ist, daß es NP-vollständig ist (siehe zum Beispiel [3, S. 247]).

Als Ausblick sei erwähnt, daß eine Fortführung der Arbeit in verschiedene Richtungen interessant erscheint. Zum einen stellt sich die Frage, wie sich die Theorie verändert, wenn die Maße nicht länger reellwertig sind (man könnte sich vorstellen, Werte in einem Banachraum zuzulassen, auf dem ein spitzer Kegel eine Ordnungsstruktur liefert). In der anderen Richtung kann man Produktmaße mit vorgegebener Randverteilung mit mehr als zwei Komponenten betrachten. Schließlich bleibt noch das weite Feld kontinuierlicher Maße.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. E. BEHRENDS für die Betreuung dieser Arbeit danken, sowie für viele hilfreiche Anregungen und Gespräche. Ebenso gilt mein Dank den Mitgliedern der „Montagsarbeitsgruppe“, die ebenfalls gute Anregungen für meine Arbeit lieferten.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Definition von konvex und extremal

Definition 1.1.1. Eine Teilmenge M eines reellen Vektorraums heißt *konvex* genau dann, wenn

$$\forall_{x,y\in M}\ \forall_{0\le\alpha\le 1}\ \alpha\, x + (1-\alpha)y \in M. \tag{1.1}$$

Definition 1.1.2. Sei M eine konvexe Menge gemäß Definition 1.1.1 und $x \in M$. Man nennt x einen *Extremalpunkt* von M genau dann, wenn

$$\forall_{x_1,x_2\in M}\ \forall_{0<\alpha<1} (x = \alpha\, x_1 + (1-\alpha)x_2 \quad \Rightarrow \quad x = x_1 = x_2). \tag{1.2}$$

Die Menge der Extremalpunkte von M bezeichne mit $\mathrm{E}(M)$.

Es ist manchmal nützlich zu wissen, daß es für konvexes M und einen als Konvexkombination $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ gegebenen Punkt $x \in M$ mit $x_1, x_2 \in M$ und $\alpha \in]0,1[$ immer Punkte $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in M$ gibt, so daß $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$. Es gilt das folgende Lemma:

Lemma 1.1.3. *Sei M eine konvexe Menge und $x \in M$. Dann ist*

$$x \in \mathrm{E}(M) \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{x_1,x_2\in M} \left(x = \frac{1}{2}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_2 \quad \Rightarrow \quad x = x_1 = x_2 \right). \tag{1.3}$$

Beweis. Der „$\Rightarrow$"-Teil folgt, indem man in (1.2) $\alpha = \frac{1}{2}$ setzt. Bleibt „$\Leftarrow$" zu zeigen. Angenommen es gibt $x_1, x_2 \in M$ und $0 < \alpha < 1$, so daß $x = \alpha\, x_1 + (1-\alpha)x_2$. Indem man zur Not die Indizes von x_1 und x_2 vertauscht, kann man $\alpha \ge \frac{1}{2}$ annehmen. Setze

$$y_1 = x_1 \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{2\alpha-1}{\alpha}x + \left(1 - \frac{2\alpha-1}{\alpha}\right)x_2.$$

Im Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ ist $\frac{2\alpha-1}{\alpha}$ streng monoton steigend (die Ableitung ist $\frac{1}{\alpha^2}$), und die Randwerte sind 0 für $\alpha = \frac{1}{2}$ beziehungsweise 1 für $\alpha = 1$. Also ist $0 \le \frac{2\alpha-1}{\alpha} \le 1$ für $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$. Da M konvex ist, folgt $y_2 \in M$. Nun erhält man, wie gewünscht, x als Konvexkombination von y_1 und y_2:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + \left(1 - \frac{2\alpha-1}{\alpha}\right)x_2\right) \\ &= \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{2\alpha-1}{2\alpha}\right) = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = x.\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist damit $x = y_1 = y_2$, das heißt $x = x_1$. Daraus folgt dann auch $x = x_2$. ■

Bemerkung 1.1.4. Sind M, $\tilde{M}$ konvexe Mengen und $L : M \longrightarrow \tilde{M}$ eine affine, bijektive Abbildung, so ist $L(\mathrm{E}(M)) = \mathrm{E}(\tilde{M})$.

1.2 Einige Begriffe aus der Graphentheorie

Definition 1.2.1. Ein *Graph* $G = (V, E)$ ist ein Paar aus einer Menge $V = V(G)$ von *Ecken* (Vertices) und einer Menge $E = E(G) \subseteq \binom{V}{2}$ von *Kanten* (Edges). $\binom{V}{2}$ ist die Menge der zweielementigen Teilmengen von V. Ein *gewichteter Graph* $G = (V, E, w)$ besteht aus einem Graph (V, E) zusammen mit einer *Gewichtsfunktion* $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definition 1.2.2. Ein Graph $G' = (V', E')$ ist ein *Sub-* oder *Teilgraph* eines Graphen $G = (V, E)$ genau dann, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. In diesem Fall schreibe $G' \leq G$ (im Fall gewichteter Graphen $G = (V, E, w)$ und $G' = (V', E', w')$ wird zusätzlich verlangt, daß $w' = w\restriction_{E'}$). Ist $U \subseteq V$, so heißt $G\restriction_U := (U, E \cap \binom{U}{2})$ der von U *induzierte Teilgraph* von G (beziehungsweise $G\restriction_U := (U, E \cap \binom{U}{2}), w\restriction_{E\cap\binom{U}{2}})$ im gewichteten Fall).

Definition 1.2.3. Seien $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$, $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ Graphen, so daß $\hat{G} \leq G$, $V' \cap V = \emptyset$, $E' \cap E = \emptyset$.

(a) Definiere $G - \hat{V} := G\restriction_{V\setminus\hat{V}}$, $G - \hat{E} := (V, E \setminus \hat{E})$, $G - \hat{G} := G - \hat{E} - \hat{V}$ (im Fall eines gewichteten Graphen $G = (V, E, w)$ erfolgen die Definitionen genauso, nur daß dann $G - \hat{E} := (V, E \setminus \hat{E}, w\restriction_{E\setminus\hat{E}})$. Für $\hat{V} = \{v\}$ können die Mengenklammern auch weggelassen werden, das heißt, man schreibt $G - v$ für $G - \{v\}$.

(b) Definiere $G + G' := (V \dot\cup V', E \dot\cup E')$,

$$G +_v V' := (V \dot\cup V', E), \quad G +_e E' := (V \cup \bigcup_{e\in E'} e, E \dot\cup E')$$

(im Fall gewichteter Graphen $G = (V, E, w)$ und $G' = (V', E', w')$ definiere entsprechend $G + G' := (V \dot\cup V', E \dot\cup E', w_+)$,

$$G +_v V' := (V \dot\cup V', E, w), \quad G +_e E' := (V \cup \bigcup_{e\in E'} e, E \dot\cup E', w_+),$$

wobei $w_+ : E \dot\cup E' \longrightarrow \mathbb{R}$, $w_+(e) := \begin{cases} w(e) & \text{für } e \in E, \\ w'(e) & \text{für } e \in E' \end{cases}$).

Definition 1.2.4. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Jeder Ecke $v \in V$ wird ihr *Grad* $d_G(v)$ zugeordnet. Es ist $d_G(v) := \#\{e \in E : v \in e\}$. Wenn es aus dem Zusammenhang klar ist, welcher Graph gemeint ist, so schreibt man auch $d(v)$ statt $d_G(v)$.

Definition 1.2.5. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein *Kantenzug* K ist eine Abbildung $K : A \longrightarrow V$, wobei A ein (möglicherweise unendlicher) Abschnitt von $\mathbb{Z}$ ist, und für $i, i+1 \in A$ ist $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. $l(K) := \#A$ ist die *Länge* des Kantenzuges. Ist $A = (i_0, i_0+1, \ldots, i_0+k)$ endlich und $v_{i_0} = v_{i_0+k}$, so heißt K ein *geschlossener Kantenzug*, ansonsten ein *offener Kantenzug*. Ein injektiver Kantenzug heißt ein *Weg*. Seien $u, v \in V$. Ein *uv-Weg* ist ein endlicher Weg $W : (i_0, i_0+1, \ldots, i_0+k) \longrightarrow V$ mit $W(i_0) = u$ und $W(i_0+k) = v$. Häufig wird ein Kantenzug K mit seinem Bild identifiziert (z.B. $K = (v_0, \ldots, v_k)$) oder auch mit dem von seinem Bild induzierten Teilgraphen (z.B. $K = (V(K), E(K))$).

Definition 1.2.6. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Der *Abstand* zweier Ecken $u, v \in V$ ist definiert durch $d_G(u, v) = d(u, v) := \inf\{l(W) : W \text{ ist ein } uv\text{-Weg}\}$. Die *Zusammenhangskomponente* einer Ecke $v \in V$ ist

$$\mathrm{Zhk}_G(v) = \mathrm{Zhk}(v) := \{u \in V : d(u, v) < \infty\}.$$

Oft wird auch der von $\mathrm{Zhk}(v)$ induzierte Teilgraph mit $\mathrm{Zhk}(v)$ identifiziert.

Bemerkung 1.2.7. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Durch

$$v \sim w \quad \Leftrightarrow \quad w \in \mathrm{Zhk}(v)$$

wird eine Äquivalenzrelation auf V definiert.

Definition 1.2.8. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die induzierten Graphen der Äquivalenzklassen der in Bemerkung 1.2.7 definierten Relation heißen *Zusammenhangskomponenten* von G. Die Menge der Zusammenhangskomponenten von G werde mit $\mathrm{Zhk}(G)$ bezeichnet. G heißt *zusammenhängend* genau dann, wenn $\#\,\mathrm{Zhk}(G) = 1$.

Definition 1.2.9. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein *Kreis* ist ein geschlossener Kantenzug $C = (v_{i_0}, \dots, v_{i_0+k})$ mit $l(C) \geq 3$, so daß $(v_{i_1}, \dots, v_{i_0+k})$ ein Weg ist. Enthält G keinen Kreis, so heißt G *kreisfrei*. Dann wird G auch als *Wald* bezeichnet. Ist G außerdem zusammenhängend, so heißt G ein *Baum*.

Lemma 1.2.10. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. G ist genau dann ein Wald, wenn alle Zusammenhangskomponenten von G Bäume sind.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Gäbe es einen Kreis C in einer Zusammenhangskomponente von G, so wäre C auch ein Kreis in G, das heißt G wäre kein Wald. „$\Leftarrow$“: Hat G einen Kreis C, so liegen alle zu C gehörenden Ecken in der selben Zusammenhangskomponente, welche also kein Baum sein kann. ∎

Lemma 1.2.11. *Sei $G = (V, E)$ ein Baum. Für $u, v \in V$ gibt es genau einen uv-Weg in G.*

Beweis. Für $u = v$ ist nichts zu zeigen. Sei also $u \neq v$. Da G zusammenhängend ist, gibt es einen uv-Weg. Angenommen es gibt zwei verschiedene uv-Wege

$$W_1 = (u_1, \dots, u_k), \quad W_2 = (v_1, \dots, v_l),$$

mit $u_1 = v_1 = u$, $u_k = v_l = v$ (siehe Abbildung 1.1). Sei $i_0 := \min\{i : u_i \notin W_2\}$, $i_1 := \min\{i > i_0 : u_i \in W_2\}$. Dann gibt es $1 \leq j_0 < j_1 \leq l$, so daß $(v_{j_0}, \dots, v_{j_1})$ ein $u_{i_0-1}u_{i_1}$-Weg ist. Nun ist $K := (u_{i_0}, \dots, u_{i_1} = v_{j_1}, \dots, v_{j_0} = u_{i_0-1}, u_{i_0})$ ein Kreis, das heißt, G ist kein Baum. ∎

Definition 1.2.12. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit* genau dann, wenn

$$V = S \,\dot{\cup}\, T \text{ und } \underset{e \in E}{\forall} \; \underset{s,t \in e}{\exists} \; (s \in S \text{ und } t \in T).$$

1.3 Maßtheoretische Grundlagen

Definition 1.3.1. $(I_1, \mathcal{E}_1, m_1)$, $(I_2, \mathcal{E}_2, m_2)$ seien Maßräume (hier und im folgenden sind Maße immer nichtnegativ, ansonsten heißen sie signierte Maße). Weiter sei

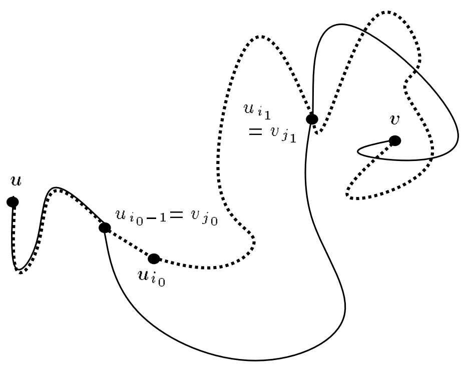

Abbildung 1.1: Zum Beweis von Lemma 1.2.11

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ die Produkt-σ-Algebra von $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$. Ein Maß μ auf $(I_1 \times I_2, \mathcal{E})$ heißt *doppelt stochastisch*[1] bezüglich m_1, m_2 genau dann, wenn

$$\forall_{A_1 \in \mathcal{E}_1} \mu(A_1 \times I_2) = m_1(A_1) \qquad \text{und} \qquad \forall_{A_2 \in \mathcal{E}_2} \mu(I_1 \times A_2) = m_2(A_2). \tag{1.4}$$

Mit $\mathcal{D}(m_1, m_2)$ (gelegentlich auch mit $\mathcal{D}(= m_1, = m_2)$) bezeichne die Menge aller doppelt stochastischen Maße bezüglich m_1, m_2. Man sagt auch, $\mu \in \mathcal{D}(m_1, m_2)$ hat die *Randverteilungen* m_1, m_2.

Ein Maß μ auf $(I_1 \times I_2, \mathcal{E})$ heißt *doppelt substochastisch*[2] bezüglich m_1, m_2 genau dann, wenn

$$\forall_{A_1 \in \mathcal{E}_1} \mu(A_1 \times I_2) \leq m_1(A_1) \qquad \text{und} \qquad \forall_{A_2 \in \mathcal{E}_2} \mu(I_1 \times A_2) \leq m_2(A_2). \tag{1.5}$$

Mit $\mathcal{D}(\leq m_1, \leq m_2)$ bezeichne die Menge aller doppelt substochastischen Maße bezüglich m_1, m_2.

Bemerkung 1.3.2. Sind Maßräume $(I_1, \mathcal{E}_1, m_1)$, $(I_2, \mathcal{E}_2, m_2)$ und $\mu \in \mathcal{D}(m_1, m_2)$ gegeben, so gilt wegen (1.4), daß

$$\mu(I_1 \times I_2) = m_1(I_1) = m_2(I_2). \tag{1.6}$$

Insbesondere gilt

$$\mathcal{D}(m_1, m_2) \neq \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad m_1(I_1) = m_2(I_2). \tag{1.7}$$

Bemerkung 1.3.3. Für Maßräume $(I_1, \mathcal{E}_1, m_1)$, $(I_2, \mathcal{E}_2, m_2)$ sind $\mathcal{D}(m_1, m_2)$ und $\mathcal{D}(\leq m_1, \leq m_2)$ konvexe Mengen.

Eines der Hauptanliegen der folgenden Kapitel wird sein, die Mengen der Extremalpunkte $\mathrm{E}(\mathcal{D}(m_1, m_2))$ und $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq m_1, \leq m_2))$ zu untersuchen.

Definition 1.3.4. Ein Maßraum $(I, m) := (I, \mathcal{E}, m)$ heißt *diskret* genau dann, wenn $\mathcal{E} = 2^I$, $\forall_{i \in I}\, m(i) < \infty$, $\forall_{A \in \mathcal{E}}\, m(A) = \sum_{i \in A} m(i)$, mit der Konvention, daß Summen über überabzählbar viele positive Elemente unendlich sind. Durch

$$\#_{nt} I := \#\{i \in I : m(i) > 0\}$$

werde die Kardinalität der „nichttrivialen" Punkte in I bezeichnet.

[1] Obwohl die Bezeichnung „stochastisch" eigentlich nur für Wahrscheinlichkeitsmaße zulässig ist, soll sie Grząślewicz folgend (siehe [4]) hier und im folgenden in etwas allgemeinerem Sinne verwendet werden.

[2] Die Bemerkung der vohergehenden Fußnote gilt hier entsprechend.

Beispiel 1.3.5. Seien (I_1, m_1), (I_2, m_2) diskrete Maßräume, so daß $\#I_1, \#I_2 \leq \omega$, und $m_1(I_1) = m_2(I_2) < \infty$. $\#I_1, \#I_2 \leq \omega$ stellt hier keine wirkliche Einschränkung dar, da bei endlichem Maß höchstens abzählbar viele Elemente positives Maß haben können. In diesem Fall hat man

$$L_1(m_1) = \left\{ f \in \mathbb{R}^{I_1} : \sum_{i \in I_1} |f(i)| m_1(i) < \infty \right\} \tag{1.8}$$

und

$$L_1(m_2) = \left\{ f \in \mathbb{R}^{I_2} : \sum_{j \in I_2} |f(j)| m_2(j) < \infty \right\}. \tag{1.9}$$

Die Elemente von $L_1(m_1)$ beziehungsweise $L_1(m_2)$ sind also reelle Familien, indiziert mit Elementen aus I_1 beziehungsweise I_2. Dabei werden, wie üblich, Familien, die fast überall gleich sind (das heißt sich nur an Stellen i beziehungsweise j mit $m_1(i) = 0$ beziehungsweise $m_2(j) = 0$ unterscheiden), als äquivalent angesehen. Entsprechend bekommt man für $\mu \in \mathcal{D}(m_1, m_2)$

$$L_1(\mu) = \left\{ f \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2} : \sum_{(i,j) \in I_1 \times I_2} |f(i,j)| \mu(i,j) < \infty \right\}. \tag{1.10}$$

Die Elemente von $L_1(\mu)$ kann man auffassen als (möglicherweise unendliche) reelle Matrizen mit $\#I_1$ Zeilen und $\#I_2$ Spalten. Dann ergibt sich für die durch $\mathcal{F} := L_1(m_1) + L_1(m_2)$ definierte Menge:

$$\mathcal{F} = \left\{ M \in L_1(\mu) : \underset{a \in L_1(m_1)}{\exists} \ \underset{b \in L_1(m_2)}{\exists} \ \underset{\substack{(i,j) \in I_1 \times I_2 \\ \text{mit } \mu(i,j) > 0}}{\forall} \ m_{i,j} = a_i + b_j \right\}. \tag{1.11}$$

1.4 Maßtheoretische Charakterisierung der Extremalpunkte

Satz 1.4.1 gibt eine erste Charakterisierung der Extremalpunkte. Der Satz und sein Beweis gehen zurück auf eine Arbeit von LINDENSTRAUSS (siehe [9]).

Satz 1.4.1. *Seien $(I_1, \mathcal{E}_1, m_1)$, $(I_2, \mathcal{E}_2, m_2)$ Maßräume mit endlichen Maßen m_1, m_2 und sei $\mu \in \mathcal{D}(m_1, m_2)$.*
Dann ist $\mu \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(m_1, m_2))$ genau dann, wenn $\overline{L_1(m_1) + L_1(m_2)} = L_1(\mu)$, das heißt, wenn $\mathcal{F} := \{h \in L_1(\mu) : h(x,y) = f(x) + g(y),\ f \in L_1(m_1),\ g \in L_1(m_2)\}$ in $(L_1(\mu), \| \ \|_1)$ dicht ist.

Beweis. Der Beweis wird in drei Schritte unterteilt. Es sei $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.
Behauptung 1. $\mu \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(m_1, m_2))$ genau dann, wenn es ein endliches signiertes Maß $\nu \neq 0$ auf $(I_1 \times I_2, \mathcal{E})$ gibt, so daß

$$\begin{aligned} &\underset{S \in \mathcal{E}}{\forall} \ |\nu|(S) \leq \mu(S) \quad \text{und} \quad \underset{A \in \mathcal{E}_1}{\forall} \ \nu(A \times I_2) = 0 \quad \text{und} \\ &\underset{B \in \mathcal{E}_2}{\forall} \ \nu(I_1 \times B) = 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Angenommen, es gibt $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{D}(m_1, m_2)$, so daß $\mu \neq \mu_1, \mu_2$ und $\mu = \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2$. Dann setze $\nu = \frac{1}{2}\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_2$. μ_1 und μ_2 sind endliche Maße (wegen $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{D}(m_1, m_2)$ und Bemerkung 1.3.2). Also ist ν ein endliches signiertes Maß. Für $S \in \mathcal{E}$, gilt

$$|\nu|(S) \leq \tfrac{1}{2}\mu_1(S) + \tfrac{1}{2}\mu_2(S) = \mu(S). \tag{1.13}$$

Ist $A \in \mathcal{E}_1$, so gilt

$$\nu(A \times I_2) = \tfrac{1}{2}\mu_1(A \times I_2) - \tfrac{1}{2}\mu_2(A \times I_2) = \tfrac{1}{2}m_1(A) - \tfrac{1}{2}m_1(A) = 0. \tag{1.14}$$

Analog folgt $\nu(I_1 \times B) = 0$ für $B \in \mathcal{E}_2$.
„$\Leftarrow$“: Habe also ν die in der Behauptung verlangten Eigenschaften. Es gilt

$$\mu = \tfrac{1}{2}(\mu + \nu) + \tfrac{1}{2}(\mu - \nu). \tag{1.15}$$

$\mu \neq \mu \pm \nu$, da $\nu \neq 0$. Weiterhin ist $\mu \pm \nu \in \mathcal{D}(m_1, m_2)$:
Aus $|\nu| \leq \mu$ folgt $\mu \pm \nu \geq 0$. Sei nun $A \in \mathcal{E}_1$ und $B \in \mathcal{E}_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\mu \pm \nu)(A \times I_2) &= \mu(A \times I_2) = m_1(A), \\ (\mu \pm \nu)(I_1 \times B) &= \mu(I_1 \times B) = m_2(B), \end{aligned} \tag{1.16}$$

und der Beweis von Behauptung 1 ist vollständig. ▲

Behauptung 2. $\mu \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(m_1, m_2))$ genau dann, wenn es eine Funktion $F \in L_\infty(\mu)$ gibt, so daß $F \neq 0$, $\|F\|_\infty \leq 1$ und

$$\forall_{f \in L_1(m_1)} \forall_{g \in L_1(m_2)} \int_{I_1 \times I_2} (f(x) + g(y)) F(x, y)\, d\mu = 0. \tag{1.17}$$

$\| \; \|_\infty$ bezeichnet dabei die essentielle Supremumsnorm.

Beweis. „$\Leftarrow$“: Sei $F \in L_\infty(\mu)$ gegeben, so daß $0 \neq F$, $\|F\|_\infty \leq 1$ und (1.17) gilt. Für $S \in \mathcal{E}$, definiere

$$\nu(S) = \int_S F(x, y)\, d\mu. \tag{1.18}$$

Wegen $\|F\|_\infty > 0$, folgt $\nu \neq 0$. Da μ endlich ist und $F \in L_\infty(\mu)$, ist $\int_S F\, d\mu$ definiert und endlich. Also ist ν ein signiertes Maß auf $(I_1 \times I_2, \mathcal{E})$. Sei nun $A \in \mathcal{E}_1$ und $B \in \mathcal{E}_2$. Dann ist

$$\nu(A \times I_2) = \int_{I_1 \times I_2} 1_A(x) F(x, y)\, d\mu = 0 \tag{1.19}$$

und

$$\nu(I_1 \times B) = \int_{I_1 \times I_2} 1_B(y) F(x, y)\, d\mu = 0 \tag{1.20}$$

wegen (1.17). Außerdem ist für $S \in \mathcal{E}$,

$$|\nu| S = \int_S |F|\, d\mu \leq \int_S d\mu = \mu(S), \tag{1.21}$$

da $\|F\|_\infty \leq 1$. $\mu \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(m_1, m_2))$ folgt nun wegen Behauptung 1.

„$\Rightarrow$“: Nun sei also $\mu \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(m_1, m_2))$. ν sei das durch Behauptung 1 gegebene signierte Maß auf $(I_1 \times I_2, \mathcal{E})$. Da $|\nu| = \nu^+ + \nu^- \leq \mu$ ist, folgt $\nu^+, \nu^- \leq \mu$. Das

Radon-Nikodym-Theorem (siehe zum Beispiel [13, S. 121ff]) liefert nun eine Funktion $F\colon I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F \in L_1(\mu)$, so daß

$$\underset{S\in\mathcal{E}}{\forall}\ \nu S = \int_S F\,d\mu \tag{1.22}$$

und für alle $S \in \mathcal{E}$

$$\int_S |F|\,d\mu = |\nu|S \le \mu(S) = \int_S d\mu. \tag{1.23}$$

Daraus folgt $\|F\|_\infty \le 1$, das heißt insbesondere ist $F \in L_\infty(\mu)$.
Seien $\phi : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktionen (simple functions: Definition siehe zum Beispiel [12, S. 260]). Wegen (1.12) folgt

$$\int_{I_1\times I_2} \phi(x)F(x,y)\,d\mu = 0 \text{ und } \int_{I_1\times I_2} \psi(y)F(x,y)\,d\mu = 0, \tag{1.24}$$

das heißt

$$\begin{aligned} \int_{I_1\times I_2} (\phi F)^+(x,y)\,d\mu &= \int_{I_1\times I_2} (\phi F)^-(x,y)\,d\mu \quad \text{und} \\ \int_{I_1\times I_2} (\psi F)^+(x,y)\,d\mu &= \int_{I_1\times I_2} (\psi F)^-(x,y)\,d\mu. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Die folgenden Funktionenlimites bedeuten punktweise Konvergenz. Es seien gegeben $f \in L_1(m_1)$, $g \in L_1(m_2)$. Dann gibt es Treppenfunktionen $\phi_n^+, \phi_n^- : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, und $\psi_n^+, \psi_n^- : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n^+ = f^+,\ \lim_{n\to\infty} \phi_n^- = f^- \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \psi_n^+ = g^+,\ \lim_{n\to\infty} \psi_n^- = g^-,$$

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad 0 \le \phi_n^+ \le f^+, \quad 0 \le \phi_n^- \le f^-, \quad 0 \le \psi_n^+ \le g^+, \quad 0 \le \psi_n^- \le g^-.$$

Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} (\phi_n^+ - \phi_n^-) = f, \quad \lim_{n\to\infty} (\phi_n^+ - \phi_n^-)F = fF,$$

und

$$\lim_{n\to\infty} (\psi_n^+ - \psi_n^-) = g, \quad \lim_{n\to\infty} (\psi_n^+ - \psi_n^-)F = gF.$$

Dabei gilt außerdem

$$|(\phi_n^+ - \phi_n^-)F| \le (|\phi_n^+| + |\phi_n^-|)|F| \le (f^+ + f^-)|F|$$

und

$$|(\psi_n^+ - \psi_n^-)F| \le (|\psi_n^+| + |\psi_n^-|)|F| \le (g^+ + g^-)|F|.$$

Da $(f^+ + f^-)|F|$, $(g^+ + g^-)|F| \in L_1(\mu)$, kann das Lebesguesche Konvergenztheorem (siehe zum Beispiel [12, S. 267]) angewendet werden, und man bekommt

$$\begin{aligned} \int_{I_1\times I_2} fF\,d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_{I_1\times I_2} (\phi_n^+ - \phi_n^-)F\,d\mu = 0 \quad \text{und} \\ \int_{I_1\times I_2} gF\,d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_{I_1\times I_2} (\psi_n^+ - \psi_n^-)F\,d\mu = 0 \end{aligned} \tag{1.26}$$

wegen (1.24). Durch (1.26) ist der Beweis von „$\Rightarrow$“ und damit auch der Beweis von Behauptung 2 vollständig. ▲

Der letzte Schritt im Beweis des Satzes ist die folgende Behauptung 3.

Behauptung 3. $\mu \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(m_1, m_2)) \Leftrightarrow \mathcal{F} \subseteq L_1(\mu)$ ist nicht dicht in $L_1(\mu)$.

Beweis. Nach dem Darstellungssatz von Riesz, ist $L_1(\mu)^*$ isometrisch isomorph zu $L_\infty(\mu)$.
„$\Rightarrow$": Sei $F \in L_\infty(\mu)$ die durch Behauptung 2 gegebene Funktion. Das zugehörige Funktional in $L_1(\mu)^*$ bezeichne wieder mit F. Wegen (1.17) gilt für dieses Funktional F, daß $F(h) = 0$ für alle $h \in \mathcal{F}$. Wäre $L_1(\mu)$ gleich dem Abschluß von $\mathcal{F}$, so würde die Stetigkeit von F implizieren, daß $F(h) = 0$ für alle $h \in L_1(\mu)$, das heißt $F = 0$ im Widerspruch zu $F \neq 0$ in Behauptung 2.

„$\Leftarrow$": Angenommen $\mathcal{F}$ ist nicht dicht in $L_1(\mu)$. Es gibt also $h_0 \in L_1 \setminus \overline{\mathcal{F}}$. Nach Proposition 6 in [12, S. 226] (eine Anwendung des Satzes von Hahn-Banach) gibt es ein $F \in L_1(\mu)^*$, so daß $F\restriction_{\mathcal{F}} = 0$ und $\|F\|_\infty = 1$, also insbesondere $F \neq 0$. Die zugehörige Funktion $F \in L_\infty(\mu)$ erfüllt (1.17) und wegen Behauptung 2 ist daher $\mu \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(m_1, m_2))$. ▲

Damit ist Satz 1.4.1 bewiesen. ■

Kapitel 2

Doppelt stochastische Matrizen

2.1 Definition und erste Eigenschaften

Sind die Maßräume in Definition 1.3.1 diskret, so entsprechen die Mengen der doppelt (sub-)stochastischen Maße gerade den Mengen der doppelt (sub-)stochastischen (möglicherweise doppelt unendlichen) Matrizen. Während in der Literatur meistens Randverteilungen auf den natürlichen Zahlen und deren Teilmengen betrachtet werden, sollen im folgenden diskrete Verteilungen auf beliebigen Mengen zugelassen werden. Dadurch wird herausgestellt, daß die Ordnungsstruktur der natürlichen Zahlen für die meisten Ergebnisse ohne Bedeutung ist.

Definition 2.1.1. Seien I_1, I_2, K Mengen. Mit $\mathcal{M}_K(I_1, I_2) := K^{I_1 \times I_2}$ bezeichne die Menge aller Matrizen, indiziert mit Elementen aus $I_1 \times I_2$ und Koeffizienten in K (im folgenden wird praktisch immer $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{R}_0^+$ gelten). Die Elemente von I_1 beziehungsweise I_2 heißen *Zeilenindizes* beziehungsweise *Spaltenindizes*. Die Matrizen haben also $\#I_1$ viele Zeilen und $\#I_2$ viele Spalten. Eine Zeile oder Spalte werde als *Linie* bezeichnet.

Matrizen, die in jeder Linie höchstens eine Eins stehen haben und sonst nur Nullen, werden als *Subpermutationsmatrizen* bezeichnet. Die Menge der Subpermutationsmatrizen mit Zeilenindizes aus I_1 und Spaltenindizes aus I_2 bezeichne man mit $\mathcal{M}_{sp}(I_1, I_2)$.
Matrizen, die in jeder Zeile genau eine Eins stehen haben und sonst nur Nullen, werden als *Permutationsmatrizen* bezeichnet. Die Menge der Permutationsmatrizen mit Zeilenindizes aus I_1 und Spaltenindizes aus I_2 bezeichne man mit $\mathcal{M}_p(I_1, I_2)$. Gelegentlich wird auch die Bezeichnung $\mathcal{M}_{sp}(I_1) := \mathcal{M}_{sp}(I_1, I_1)$ beziehungsweise $\mathcal{M}_p(I_1) := \mathcal{M}_p(I_1, I_1)$ benutzt werden.

In Beispielen werden des öfteren „Doppeldiagonalmatrizen“ auftreten, die jetzt definiert werden sollen.

Definition 2.1.2. Es sei $I_1 = I_2 = (1, 2, \ldots)$. $P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2)$ heißt eine *Doppeldiagonalmatrix* der Form $((a_0, a_1, \ldots), (b_1, b_2, \ldots))$ genau dann, wenn

$$p_{i,j} = \begin{cases} a_0 & \text{für } i = j = 1, \\ a_i & \text{für } j = i + 1, \\ b_j & \text{für } i = j + 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

das heißt

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & & \\ b_1 & & a_2 & \\ & b_2 & & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Im folgenden werden die von Null verschiedenen Elemente einer Matrix oft eine ausgezeichnete Rolle spielen. In der folgenden Definition 2.1.3 werden daher der Träger einer Matrix definiert und jeder Matrix ein bipartiter Graph zugeordnet, der die Verteilung der von Null verschiedenen Elemente in der Matrix beschreibt.

Definition 2.1.3. I_1, I_2 seien Mengen, $P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2)$.

(a) Definiere den *Träger* $\operatorname{supp}(P)$ von P durch

$$\operatorname{supp}(P) := \{(i,j) \in I_1 \times I_2 : p_{i,j} \neq 0\}. \tag{2.1}$$

(b) Für $i \in I_1$, $j \in I_2$ sei $x_i := (i, 0)$ und $y_j := (j, 1)$. Der *gewichtete Graph*

$$G(P) = (V, E, w)$$

der Matrix P sei definiert durch

$$\begin{aligned} V &:= \{x_i : i \in I_1\} \,\dot\cup\, \{y_j : j \in I_2\}, \\ E &:= \{x_i, y_j\} : p_{i,j} \neq 0\}, \\ w : E(G(P)) &\longrightarrow \mathbb{R},\ w\{x_i, y_j\} := p_{i,j}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

(c) Definiere die *Trägermatrix* $S(P) = S = (s_{i,j})_{(i,j)\in I_1 \times I_2}$ durch

$$s_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{für } (i,j) \in \operatorname{supp}(P), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Bemerkung 2.1.4. Für Mengen I_1, I_2 und $P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2)$ ist nach den Definitionen 1.2.12 und 2.1.3 (b) der Graph $G(P)$ bipartit.

Manchmal ist es übersichtlicher, eine Matrix nicht direkt, sondern mittels ihres Graphen zu definieren. Daß dies legitim ist, besagt die folgende Bemerkung 2.1.5.

Bemerkung 2.1.5. Sind I_1, I_2 Mengen, $K \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathcal{B}$ die Menge aller bipartiten gewichteten Graphen $(\{x_i : i \in I_1\} \dot\cup \{y_j : j \in I_2\}, E, w)$ mit Gewichtsfunktionen $w : E \longrightarrow K \setminus \{0\}$, so ist die durch Definition 2.1.3 (b) gegebene Abbildung

$$G : \mathcal{M}_K(I_1, I_2) \longrightarrow \mathcal{B}, \qquad P \mapsto G(P) \tag{2.4}$$

eine Bijektion.

Gemäß Bemerkung 2.1.5 werde bei gegebenem bipartiten Graphen H die zugehörige Matrix mit $G^{-1}(H)$ bezeichnet.

Lemma 2.1.6. *Seien I_1, I_2 Mengen und $P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2)$ eine Doppeldiagonalmatrix der Form $((a_0, a_1, \ldots), (b_1, b_2, \ldots))$ nach Definition 2.1.2. Dann ist $G(P)$ ein Wald.*

Beweis. $G(P)$ ist ein Subgraph des Kantenzugs $(\ldots, x_3, y_2, x_1, y_1, x_2, y_3, \ldots)$ und kann daher keinen Kreis haben. ■

Definition 2.1.7. Ein $\leq$-*Randsystem* ist ein 4-Tupel $\mathcal{I} = (I_1, I_2, r, s)$ aus zwei Mengen I_1, I_2 und nichtnegativen, reellen Familien $r = (r_i)_{i \in I_1}$, $s = (s_j)_{j \in I_2}$. Nenne $i \in I_1$ ($j \in I_2$) einen *nichttrivialen* Index genau dann, wenn $r_i > 0$ ($s_j > 0$). Es seien $I_{1,nt} := \{i \in I_1 : r_i > 0\}$, $I_{2,nt} := \{j \in I_2 : s_j > 0\}$ die Mengen der nichttrivialen Indizes. Ein $\leq$-Randsystem heiße *Randsystem* genau dann, wenn

$$\sum_{i \in I_1} r_i = \sum_{j \in I_2} s_j.$$

Mit $l(r) := \#I_1$ beziehungsweise $l(s) := \#I_2$ bezeichne die *Länge* von s beziehungsweise r. r, s heißen *endlich* genau dann, wenn ihre Länge endlich ist. In diesem Fall nenne auch das $\leq$-Randsystem *endlich*. Für ein $\leq$-Randsystem $\tilde{\mathcal{I}} = (\tilde{I_1}, \tilde{I_2}, \tilde{r}, \tilde{s})$ schreibe $\tilde{\mathcal{I}} \leq \mathcal{I}$ genau dann, wenn $\tilde{I_1} \subseteq I_1$, $\tilde{I_2} \subseteq I_2$, $\tilde{r} = r\restriction_{\tilde{I_1}}$, $\tilde{s} = s\restriction_{\tilde{I_2}}$.

Definition 2.1.8. Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\leq$-Randsystem. Dann werde $\mathcal{I}$ eine Gruppe $\mathcal{G}$ zugeornet durch

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{I}) := \langle \{r_i : i \in I_1\} \cup \{s_j : j \in I_2\} \rangle \tag{2.5}$$

(durch $\langle M \rangle$ werde die von $M \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ erzeugte additive Untergruppe bezeichnet).

Definition 2.1.9. Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\leq$-Randsystem nach Definition 2.1.7. Eine Matrix $P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_0^+}(I_1, I_2)$ heißt *doppelt stochastisch*[1] bezüglich $\mathcal{I}$ genau dann, wenn

$$\forall_{(i,j) \in I_1 \times I_2} \sum_{k \in I_1} p_{k,j} = s_j \quad \text{und} \quad \sum_{l \in I_2} p_{i,l} = r_i, \tag{2.6}$$

(das heißt insbesondere sind in jeder Linie höchstens abzählbar viele Elemente von Null verschieden). Die Menge der doppelt stochastischen Matrizen bezüglich $\mathcal{I}$ bezeichne mit $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ (gelegentlich auch mit $\mathcal{D}(= \mathcal{I})$).

Definition 2.1.10. Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\leq$-Randsystem. Eine Matrix

$$P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_0^+}(I_1, I_2)$$

heißt *doppelt substochastisch*[2] bezüglich $\mathcal{I}$ genau dann, wenn

$$\forall_{(i,j) \in I_1 \times I_2} \sum_{k \in I_1} p_{k,j} \leq s_j \quad \text{und} \quad \sum_{l \in I_2} p_{i,l} \leq r_i. \tag{2.7}$$

Die Menge der doppelt substochastischen Matrizen bezüglich $\mathcal{I}$ wird im folgenden mit $\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$ bezeichnet.

Beispiel 2.1.11. Seien I_1, I_2 Mengen und $P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_0^+}(I_1, I_2)$. Dann definiere $\mathcal{I}(P)$ durch $\mathcal{I}(P) := (I_1, I_2, r, s)$ mit $r_i := \sum_{j \in I_2} p_{i,j}$ für alle $i \in I_1$ und $s_j := \sum_{i \in I_1} p_{i,j}$ für alle $j \in I_2$. Dann ist $\mathcal{I}(P)$ genau dann ein Randsystem, wenn alle r_i, s_j endlich sind. In diesem Fall ist $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I}(P))$.

Bemerkung 2.1.12. Für ein $\leq$-Randsystem $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ sind die Mengen $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ und $\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$ konvex.

Wieder werden es die Extremalpunktmengen $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ beziehungsweise $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$ sein, die im folgenden von besonderem Interesse sind.

Lemma 2.1.13. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\leq$-Randsystem.*

[1] Siehe entsprechende Fußnote zu Definition 1.3.1.
[2] Siehe entsprechende Fußnote zu Definition 1.3.1.

(a) *Ist $P \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$, so gilt $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$ genau dann, wenn es eine Matrix $E \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2) \setminus \{0\}$ gibt, so daß*

$$\forall_{i \in I_1} \, |\sum_{j \in I_2} e_{i,j}| \in [0, \, r_i - \sum_{j \in I_2} p_{i,j}], \qquad \forall_{j \in I_2} \, |\sum_{i \in I_1} e_{i,j}| \in [0, \, s_j - \sum_{i \in I_1} p_{i,j}] \tag{2.8}$$

$$\text{und} \qquad P \pm E \geq 0. \tag{2.9}$$

(b) *Ist $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$, so gilt $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ genau dann, wenn es eine Matrix*

$$E \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2) \setminus \{0\}$$

gibt, deren Linien sich alle zu Null summieren und $P \pm E \geq 0$.

Beweis. (a) „$\Leftarrow$“: Wegen $E \neq 0$, ist $P \pm E \neq P$, und wegen (2.8) und (2.9) ist $P \pm E \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$. Die Behauptung folgt nun aus $\frac{1}{2}(P+E) + \frac{1}{2}(P-E) = P$. „$\Rightarrow$“: Angenommen, es ist $P = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2$ mit $P_1, P_2 \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$, $P_1, P_2 \neq P$. Setze $E := P - P_1 = P_2 - P$. Dann gilt $P + E = P_2 \geq 0$ und $P - E = P_1 \geq 0$. Also müssen wegen $P_1, P_2 \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$ (2.8) und (2.9) gelten.
(b) folgt genau wie (a), wenn man dort im Beweis die „$\leq$“-Zeichen wegläßt und beachtet, daß in diesem Fall (2.8) gerade die Aussage ist, daß sich alle Linien von E zu Null summieren. ■

Lemma 2.1.14. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\leq$-Randsystem.*

(a) *Für $P \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$ ist $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$ genau dann, wenn für alle Submatrizen Q von P gilt, daß $Q \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \tilde{\mathcal{I}}))$. Hierbei ist $\tilde{\mathcal{I}} := (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{r}, \tilde{s})$ mit*

$$\forall_{i \in \tilde{I}_1} \; \tilde{r}_i := \sum_{j \in \tilde{I}_2} q_{i,j} + r_i - \sum_{j \in I_2} p_{i,j}, \qquad \forall_{j \in \tilde{I}_2} \; \tilde{s}_j := \sum_{i \in \tilde{I}_1} q_{i,j} + s_j - \sum_{i \in I_1} p_{i,j}$$

und $Q \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_0^+}(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$.

(b) *Für $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ ist $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ genau dann, wenn für alle Submatrizen Q von P gilt, daß $Q \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}(Q)))$.*

Beweis. (a) Zu zeigen ist nur „$\Rightarrow$“. Sei also $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$. Angenommen

$$Q = \tfrac{1}{2}Q^{(1)} + \tfrac{1}{2}Q^{(2)}$$

mit $Q^{(1)}, Q^{(2)} \in \mathcal{D}(\leq \tilde{\mathcal{I}})$. Für $k = 1, 2$ definiere $P^{(k)} = (p_{i,j}^{(k)})_{(i,j) \in I_1 \times I_2}$ durch

$$p_{i,j}^{(k)} := \begin{cases} q_{i,j}^{(k)} & \text{für } (i,j) \in \tilde{I}_1 \times \tilde{I}_2, \\ p_{i,j} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.10}$$

Dann ist $P^{(1)}, P^{(2)} \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$ und $P = \frac{1}{2}P^{(1)} + \frac{1}{2}P^{(2)}$, das heißt $P = P^{(1)} = P^{(2)}$, also auch $Q^{(1)} = Q^{(2)} = Q$ und damit $Q \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \tilde{\mathcal{I}}))$.
Erneut erhält man den Beweis von (b) durch Fortlassen der „$\leq$“-Zeichen im Beweis von (a). ■

Den Zusammenhang der doppelt (sub-)stochastischen Matrizen mit den doppelt (sub-)stochastischen Maßen beschreibt folgender Satz 2.1.15.

Satz 2.1.15. *$\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ sei ein $\leq$-Randsystem, (I_1, m_1) und (I_2, m_2) seien diskrete Maße, so daß*

$$\forall_{(i,j)\in I_1\times I_2} \quad m_1(i) = r_i \quad \text{und} \quad m_2(j) = s_j. \tag{2.11}$$

Die Abbildungen

$$h := h_= : \mathcal{D}(m_1, m_2) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{I}), \quad (h(\mu))_{i,j} := \mu(i,j) \quad \text{und}$$

$$h_\leq : \mathcal{D}(\leq m_1, \leq m_2) \longrightarrow \mathcal{D}(\leq \mathcal{I}), \quad (h_\leq(\mu))_{i,j} := \mu(i,j),$$

sind affine Isomorphismen.

Beweis. Der Beweis, daß $h_\leq$ und h wohldefiniert, injektiv, surjektiv und linear sind, macht keinerlei Schwierigkeiten. Daher soll hier nur exemplarisch die Surjektivität von $h_\leq$ gezeigt werden. Für gegebenes $P \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$ definiere ein diskretes Maß μ auf $I_1 \times I_2$ durch $\mu(i,j) := p_{i,j}$. Es ist $\mu \in \mathcal{D}(\leq m_1, \leq m_2)$, denn für $A_1 \subseteq I_1$ ist

$$\mu(A_1 \times I_2) = \sum_{i\in A_1}\sum_{l\in I_2} \mu(i,l) = \sum_{i\in A_1}\sum_{l\in I_2} p_{i,l} \leq \sum_{i\in A_1} r_i = \sum_{i\in A_1} m_1(i) = m_1(A_1).$$

Analog folgt $\mu(I_1 \times A_2) = m_2(A_2)$ für $A_2 \subseteq I_2$. Aus den Definitionen von $h_\leq$ und μ liest man unmittelbar ab, daß $h_\leq(\mu) = P$. Die anderen Verifikationen sind noch einfacher. ■

Korollar 2.1.16. *Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien dieselben wie in Satz 2.1.15.*

(a) $h(\mathrm{E}(\mathcal{D}(m_1, m_2))) = \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ *und*
$h_\leq(\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq m_1, \leq m_2))) = \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$.

(b) $\sum_{i\in I_1} r_i = m_1(I_1)$ *und* $\sum_{j\in I_2} s_j = m_2(I_2)$.

(c) $\forall_{P\in\mathcal{D}(\mathcal{I})} \sum_{(i,j)\in I_1\times I_2} p_{i,j} = \mu(I_1 \times I_2) = \sum_{i\in I_1} r_i = \sum_{j\in I_2} s_j$, *mit* $\mu = h^{-1}(P)$.

(d) $\forall_{P\in\mathcal{D}(\leq\mathcal{I})} \sum_{(i,j)\in I_1\times I_2} p_{i,j} \leq \min\left\{\sum_{i\in I_1} r_i, \sum_{j\in I_2} s_j\right\} = \min\{m_1(I_1), m_2(I_2)\}$.

(e) $\mathcal{D}(\mathcal{I}) \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \sum_{i\in I_1} r_i = \sum_{j\in I_2} s_j$, *das heißt, $\mathcal{I}$ ist ein Randsystem.* ■

Gemäß Satz 2.1.15 und dem ihm folgenden Korollar 2.1.16 werden im folgenden oft diskrete Maße mit Matrizen identifiziert und umgekehrt. Aussagen wie $\mu \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ oder $P \in \mathcal{D}(m_1, m_2)$ sind in diesem Sinne zu interpretieren.

Während es wegen $0 \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$ klar ist, daß $\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$ und sogar $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$ nicht leer sind, ist das für $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ und $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ nicht so unmittelbar einsichtig, und es ist auch nicht für alle Randsysteme richtig (siehe Satz 2.1.18). Im folgenden Beispiel 2.1.17 wird ein Standardelement von $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ für den Fall abzählbarer Randsysteme konstruiert, welches sich sogar als extremal erweisen wird.

Beispiel 2.1.17. Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem mit $\#I_1 = \#I_2 = \omega$ und $\sum_{i\in I_1} r_i = \sum_{j\in I_2} s_j > 0$ (für „$= 0$" ist $\mathcal{D}(\mathcal{I}) = \{0\}$). Indem man Abzählungen von I_1, I_2 wählt, kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $I_1 = I_2 = \mathbb{N}$ (das

Standardelement ist damit also von der Wahl der Abzählungen abhängig). Dann werde das Standardelement $P = P(\mathcal{I})$ von $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ wie folgt definiert:

$$p_{i,j} := \min\left\{ r_i - \sum_{l=1}^{j-1} p_{i,l},\ s_j - \sum_{k=1}^{i-1} p_{k,j} \right\}. \tag{2.12}$$

Dadurch werden alle $p_{i,j}$ rekursiv definiert (kennt man alle $p_{k,l}$ mit $k < i$ oder $l < j$, so kann man $p_{i,j}$ berechnen).

Behauptung 1. $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$.

Beweis. $p_{1,1} = \min\{r_1, s_1\} \geq 0$. Für $j > 1$ ist

$$r_i - \sum_{l=1}^{j-1} p_{i,l} = \left(r_i - \sum_{l=1}^{j-2} p_{i,l} \right) - p_{i,j-1} \geq 0$$

und für $i > 1$ ist

$$s_j - \sum_{k=1}^{i-1} p_{k,j} = \left(s_j - \sum_{k=1}^{i-2} p_{k,j} \right) - p_{i-1,k} \geq 0.$$

Also sind alle $p_{i,j} \geq 0$.
Nun wird durch vollständige Induktion nach i gezeigt, daß $\sum_{l=1}^{\infty} p_{i,l} = r_i$. Sei $i \in I_1$ fest. Angenommen, es gibt ein l_0, so daß $p_{i,l_0} = r_i - \sum_{l=1}^{l_0-1} p_{i,l}$. Dann folgt $p_{i,l} = 0$ für alle $l > l_0$ und

$$\sum_{l=1}^{\infty} p_{i,l} = \sum_{l=1}^{l_0} p_{i,l} = r_i - \sum_{l=1}^{l_0-1} p_{i,l} + \sum_{l=1}^{l_0-1} p_{i,l} = r_i.$$

Angenommen, es gibt kein solches l_0, das heißt, für alle l gilt $p_{i,l} = s_l - \sum_{k=1}^{i-1} p_{k,l}$. Dann folgt

$$\sum_{l=1}^{\infty} p_{i,l} = \sum_{l=1}^{\infty} s_l - \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i-1} p_{k,l} \overset{(*)}{=} \sum_{l=1}^{\infty} s_l - \sum_{k=1}^{i-1} r_k \overset{(**)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} r_k - \sum_{k=1}^{i-1} r_k = \sum_{k=i}^{\infty} r_k \geq r_i. \tag{2.13}$$

Ist $i = 1$, so ist (2.13) trivialerweise richtig. Für $i > 1$, stimmt „$\overset{(*)}{=}$“ in (2.13) wegen der Induktionsvoraussetzung und „$\overset{(**)}{=}$“, da $\mathcal{I}$ ein Randsystem ist. Da alle $p_{i,j} \geq 0$, folgt aus (2.12), daß $\sum_{l=1}^{\infty} p_{i,l} \leq r_i$. Also folgt $\sum_{l=1}^{\infty} p_{i,l} = r_i$.
Analog zeigt man durch vollständige Induktion nach j, daß $\sum_{k=1}^{\infty} p_{k,j} = s_j$. ▲

Behauptung 2. $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.

Beweis. Angenommen, es wäre $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. Dann gäbe es nach Lemma 2.1.13 (b) eine Matrix $E \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2) \setminus \{0\}$, deren Linien sich alle zu Null summieren und mit $P \pm E \geq 0$.

Def. 1. Definiere rekursiv eine Folge von Indizes durch

$$\mathcal{P} := ((i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots) \subseteq I_1 \times I_2,$$

wobei $i_1 := j_1 := 1$ und für bereits definiertes (i_n, j_n) sei

$$(i_{n+1}, j_{n+1}) = \begin{cases} (i_n + 1, j_n), & \text{falls } \underset{j > j_n}{\forall}\ p_{i_n,j} = 0, \\ (i_n, j_n + 1), & \text{falls } \underset{i > i_n}{\forall}\ p_{i,j_n} = 0, \\ (i_n + 1, j_n + 1), & \text{falls } \underset{\substack{i > i_n,\\ j > j_n}}{\forall}\ p_{i,j} = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Wegen (2.12) tritt immer genau eine der Bedingungen in (2.14) ein.

Def. 2. Nenne $(i_n, j_n) \in \mathcal{P}$ Eckpunkt genau dann, wenn $n > 1$ und

$$(i_{n-1} < i_n = i_{n+1} \quad \text{oder} \quad j_{n-1} < j_n = j_{n+1}).$$

Die Teilfolge der Eckpunkte von $\mathcal{P}$ bezeichne mit

$$\mathcal{P}_E = ((E_1, F_1), (E_2, F_2), \dots).$$

Beh. 2.1. $\operatorname{supp}(P) \subseteq \mathcal{P}$.

Beweis. Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei $T_{m,n} := \{(i,j) \in \operatorname{supp}(P) : i \le m, j \le n\}$. Man zeigt durch vollständige Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, $T_{i_n, j_n} \subseteq \{(i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)\}$. $T_{i_1, j_1} = T_{1,1} \subseteq \{(1,1)\} = \{(i_1, j_1)\}$ per Definition von $\mathcal{P}$. Den Induktionsschritt bekommt man, da wegen (2.14) $T_{i_{n+1}, j_{n+1}} \subseteq T_{i_n, j_n} \cup \{(i_{n+1}, j_{n+1})\}$ (im ersten Fall von (2.14) ist $p_{i_{n+1}, j} = 0$ für $j < j_{n+1}$, im zweiten Fall von (2.14) ist $p_{i, j_{n+1}} = 0$ für $i < i_{n+1}$, im dritten Fall von (2.14) ist $p_{i,j} = 0$ für $i < i_{n+1}$ und $j < j_{n+1}$). Nun folgt Beh. 2.1, denn sind $\tilde{i}, \tilde{j}$ die Suprema der in $\mathcal{P}$ auftretenden Indizes i_n beziehungsweise j_n (eventuell ∞), so folgt $\underset{\substack{i > \tilde{i},\\ j \in \mathbb{N}}}{\forall} p_{i,j} = 0$ beziehungsweise $\underset{\substack{i \in \mathbb{N},\\ j > \tilde{j}}}{\forall} p_{i,j} = 0$ und $\operatorname{supp}(P) = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} T_{m,n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_{i_n, j_n} \subseteq \mathcal{P}$. △

Nach (2.14) sind die Elemente der Folge $\mathcal{P}$ alle verschieden. Wegen $P \pm E \ge 0$, folgt aus $e_{i,j} \neq 0$, daß $(i,j) \in \mathcal{P}$. Da sich alle Linien von E zu Null addieren, gilt sogar

$$e_{i,j} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (i,j) = (E_n, F_n) \in \mathcal{P}_E$$

sowie $e_{E_{n-1}, F_{n-1}} \neq 0$ und $e_{E_{n+1}, F_{n+1}} \neq 0$. Insbesondere hat jedes Element von $\mathcal{P}_E$ einen Vorgänger und einen Nachfolger. Das steht im Widerspruch dazu, daß (E_1, F_1) keinen Vorgänger hat. Die Matrix E kann also keine von Null verschiedenen Elemente besitzen, das heißt, die Annahme $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ war falsch. ▲

Satz 2.1.18. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\le$-Randsystem.*

(a) *$\mathcal{D}(\le \mathcal{I})$ und $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\le \mathcal{I}))$ sind nicht leer.*

(b) *Ist $\mathcal{I}$ ein Randsystem, so gilt*

$$\mathcal{D}(\mathcal{I}), \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \omega \cdot \#I_{1,nt} = \omega \cdot \#I_{2,nt}.$$

(c) *Für diskrete Maßräume $(I_1, m_1), (I_2, m_2)$ gilt*

$$\mathcal{D}(m_1, m_2), \mathrm{E}(\mathcal{D}(m_1, m_2)) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \omega \cdot \#I_{1,nt} = \omega \cdot \#I_{2,nt}.$$

Beweis. (a) Es ist $0 \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\le \mathcal{I})) \subseteq \mathcal{D}(\le \mathcal{I})$.

(b) Setze $\alpha := \#I_{1,nt}$ und $\beta := \#I_{2,nt}$.

„$\Rightarrow$": Angenommen $\alpha \neq \beta$. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha > \beta > 0$ und $\alpha > \omega$. Gibt es dann $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$, so ist wegen $\alpha = \#I_{1,nt}$ auch $\#\operatorname{supp}(P) = \alpha$. Andererseits ist aber $\#\operatorname{supp}(P) \le \beta\omega < \alpha$. Daher kann es kein $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ geben.

„$\Leftarrow$": Für $\alpha, \beta \le \omega$ ist in Beispiel 2.1.17 bereits ein $P(\mathcal{I}) \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ konstruiert worden (es ist klar, daß man den Fall „$< \omega$" durch Auffüllen mit Nullinien auf den Fall „$= \omega$" zurückführen kann). Bleibt der Fall $\alpha = \beta > \omega$.

Behauptung 1. Es gibt Randsysteme $(\mathcal{I}_k = (I_{1,k}, I_{2,k}, r^k, s^k))_{k\in\alpha}$, so daß für alle $k \in \alpha$, $\mathcal{I}_k \leq \mathcal{I}$, $I_1 = \dot{\bigcup}_{k\in\alpha} I_{1,k}$, $I_2 = \dot{\bigcup}_{k\in\alpha} I_{2,k}$, $r^0 = s^0 = 0$, und für alle $0 \neq k \in \alpha$ ist $\# I_{1,k} = \# I_{2,k} = \omega$ sowie $\sum_{i\in I_{1,k}} r_i = \sum_{j\in I_{2,k}} s_j = \infty$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$\begin{aligned} R_n &:= \{i \in I_1 : \frac{1}{n+1} < r_i \leq \frac{1}{n}\}, \quad R_0 := \{i \in I_1 : 1 < r_i\}, \\ S_n &:= \{j \in I_2 : \frac{1}{n+1} < s_j \leq \frac{1}{n}\}, \quad S_0 := \{j \in I_2 : 1 < s_j\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Nun werden die endlichen Mengen in R_e beziehungsweise S_e und die unendlichen Mengen in R_∞ beziehungsweise S_∞ zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} R_e &:= \{R_n : \# R_n < \infty\}, \quad S_e := \{S_n : \# S_n < \infty\}, \\ R_\infty &:= \{R_n : \# R_n = \infty\}, \quad S_\infty := \{S_n : \# S_n = \infty\}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ist $R_n \in R_\infty$ mit $\kappa_{R,n} := \# R_n \geq \omega$, so ist R_n wegen $\kappa_{R,n}\omega = \kappa_{R,n}$ eine disjunkte Vereinigung von $\kappa_{R,n}$ vielen abzählbaren Mengen $R_{n,k}$, $k \in \kappa_{R,n}$ und genauso, wenn man jeweils R durch S ersetzt. Setze

$$n_R := \min\{n : R_n \in R_\infty\}, \quad n_S := \min\{n : S_n \in S_\infty\}, \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} K_R &:= \{(n,k) : (n,k) \neq (n_R, 0),\, R_n \in R_\infty,\, k \in \kappa_{R,n}\}, \\ K_S &:= \{(n,k) : (n,k) \neq (n_S, 0),\, S_n \in S_\infty,\, k \in \kappa_{S,n}\}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} &I_{1,1} := R_{n_R,0} \cup \bigcup_{R_n\in R_e} R_n, \quad I_{2,1} := S_{n_S,0} \cup \bigcup_{S_n \in S_e} S_n, \\ &I_{1,0} := \{i \in I_1 : r_i = 0\}, \quad I_{2,0} := \{j \in I_2 : s_j = 0\}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Sei $\alpha' := \alpha \setminus \{0,1\}$. Wegen $\# K_R = \# K_S = \alpha$, gibt es Bijektionen $B_R : \alpha' \longrightarrow K_R$, $B_S : \alpha' \longrightarrow K_S$. Für $k \in \alpha'$ setze $I_{1,k} := R_{B_R(k)}$, $I_{2,k} := S_{B_S(k)}$. Wegen (2.15) ist $I_1 = \dot{\bigcup}_{k\in\alpha} I_{1,k}$ und $I_2 = \dot{\bigcup}_{k\in\alpha} I_{2,k}$ klar. Setzt man noch für $k \in \alpha$, $r^k := r\restriction_{I_{1,k}}$, $s^k := s\restriction_{I_{2,k}}$, so ist klar, daß die $(I_{1,k}, I_{2,k}, r^k, s^k)_{k\in\alpha}$ alle Bedingungen der Behauptung erfüllen. ▲

Gegeben die Zerlegung aus Behauptung 1, setze für $k \in \alpha \setminus \{0\}$: $P^{(k)} := P(\mathcal{I}_k)$ und dann $P = (p_{i,j})_{(i,j)\in I_1\times I_2}$ mit $p_{i,j} := \begin{cases} p^{(k)}_{i,j} & \text{für } (i,j) \in I_{1,k} \times I_{2,k}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Der Beweis von (b) wird vollständig durch die folgende Behauptung 2.

Behauptung 2. $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.

Beweis. Wäre $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$, so gäbe es nach Lemma 2.1.13 (b) $0 \neq E \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2)$ mit $P \pm E \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Wähle (i_0, j_0), so daß $e_{i_0,j_0} \neq 0$. Nach Definition von P gibt es dann ein k, so daß $(i_0, j_0) \in I_{1,k} \times I_{2,k}$. Nun sei $E^{(k)} := E\restriction_{I_{1,k}\times I_{2,k}}$. Dann summieren sich wegen der Definition von P alle Linien von $E^{(k)}$ zu Null, das heißt $P^{(k)} \pm E^{(k)} \in \mathcal{D}(\mathcal{I}_k)$, was nach Lemma 2.1.13 (b) im Widerspruch zu $P^{(k)} \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}_k))$ steht. ▲

(c) Folgt aus (b) und Satz 2.1.15. ■

Satz 2.1.19. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\leq$-Randsystem.*

(a) *Sei $P \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$. Dann ist $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$ genau dann, wenn für alle abzählbaren $I_{1,k} \subseteq I_1$, $I_{2,k} \subseteq I_2$ die Submatrix $P\lceil_{I_{1,k}\times I_{2,k}}$ in $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}_k))$ liegt. Hierbei sei $\mathcal{I}_k := (I_{1,k}, I_{2,k}, r^k, s^k)$ mit*

$$\underset{i\in I_{1,k}}{\forall}\ r_i^k := r_i - \sum_{\nu\in I_2\setminus I_{2,k}} p_{i,\nu}, \qquad \underset{j\in I_{2,k}}{\forall}\ s_j^k := s_j - \sum_{\mu\in I_1\setminus I_{1,k}} p_{\mu,j}.$$

(b) *Sei $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Dann ist $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ genau dann, wenn für alle abzählbaren $I_{1,k} \subseteq I_1$, $I_{2,k} \subseteq I_2$ die Submatrix $P\lceil_{I_{1,k}\times I_{2,k}}$ in $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}_k))$ liegt. Dabei sei diesmal $\mathcal{I}_k := \mathcal{I}(P\lceil_{I_{1,k}\times I_{2,k}})$.*

Beweis. (a) „$\Rightarrow$“ gilt nach Lemma 2.1.14.
„$\Leftarrow$“: Zunächst bemerke, daß alle Zusammenhangskomponenten von $G(P)$ aus höchstens abzählbar vielen Ecken bestehen: Sei $v \in V(G(P))$. Dann ist

$$\mathrm{Zhk}(v) = \dot{\bigcup}_{\nu=0}^{\infty} D_\nu(v),$$

mit $D_\nu(v) = \{u \in V(G(P)) : d(u,v) = \nu\}$, und da alle $u \in V(G(P))$ höchstens abzählbaren Grad haben, sieht man wegen

$$D_{\nu+1}(v) \subseteq \{u \in V(G(P)) : \underset{v\in D_\nu(v)}{\exists} d(u,v) = 1\}$$

induktiv, daß alle $D_\nu(v)$ abzählbar sind. Ist $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$, so sei $0 \neq E$ wieder die durch Lemma 2.1.13 gegebene Matrix mit $P \pm E \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$. Wähle (i_0, j_0) mit $e_{i_0,j_0} \neq 0$ und setze für $x_{i_0} \in V(G(P))$, $Z := \mathrm{Zhk}_{G(P)}(x_{i_0})$,

$$I_{1,k} := \{i \in I_1 : x_i \in Z\}, \quad I_{2,k} := \{j \in I_2 : y_j \in Z\}.$$

Wegen der obigen Bemerkung sind $I_{1,k}$, $I_{2,k}$ abzählbar. Nun setze

$$E^{(k)} := E\lceil_{I_{1,k}\times I_{2,k}} \quad \text{und} \quad P^{(k)} := P\lceil_{I_{1,k}\times I_{2,k}}.$$

Dann ist nach Definition von Z

$$\underset{i\in I_{1,k}}{\forall} \sum_{\nu\in I_{2,k}} e_{i,\nu} = \sum_{\nu\in I_2} e_{i,\nu}, \quad \underset{j\in I_{2,k}}{\forall} \sum_{\mu\in I_{1,k}} e_{\mu,j} = \sum_{\mu\in I_1} e_{\mu,j},$$

das heißt, es muß $P^{(k)} \pm E^{(k)} \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I}_k)$ sein. Also ist $P^{(k)} \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}_k))$.
(b) folgt analog zu (a), wenn man dort im Beweis die „$\leq$“-Zeichen wegläßt und beachtet, daß in diesem Fall das $\leq$-Randsystem $\mathcal{I}_k$ aus (a), dem Randsystem $\mathcal{I}_k$ aus (b) entspricht. ∎

Das Fazit von Satz 2.1.19 ist, daß man sich für die Charakterisierung der Extremalpunkte auf abzählbare $\leq$-Randsysteme beschränken kann.

2.2 Anwendung der maßtheoretischen Charakterisierung der Extremalpunkte

Im folgenden soll Satz 1.4.1 auf doppelt stochastische Matrizen angewendet werden. Im Fall endlicher Maße m_1, m_2, läßt sich die Frage, ob eine Matrix P extremal ist, auf die Frage zurückführen, ob $G(P)$ kreisfrei ist (siehe Satz 2.2.6).

Lemma 2.2.1. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem mit $\min\{\#I_1, \#I_2\} < \infty$ und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ (zu P gehört nach Satz 2.1.15 ein Maß $\mu := h^{-1}(P)$; m_1, m_2 seien wie in Satz 2.1.15). Dann gilt mit den Bezeichnungen von Beispiel 1.3.5*

$$\mathcal{F} \text{ ist dicht in } L_1(\mu) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F} = L_1(\mu).$$

Beweis. Es ist per Definition $\mathcal{F} = L_1(m_1) + L_1(m_2)$. Wegen $\min\{\#I_1, \#I_2\} < \infty$ ist auch $\min\{\dim L_1(m_1), \dim L_1(m_2)\} < \infty$. Da weiterhin $L_1(m_1)$, $L_1(m_2)$ beide abgeschlossen sind, folgt aus Proposition 20.1 in [6], daß auch $\mathcal{F}$ abgeschlossen ist, und das ist gerade die Behauptung. ∎

Satz 2.2.2. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein endliches Randsystem, $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$,*

$$\mu := h^{-1}(P),$$

m_1, m_2 seien wie in Satz 2.1.15 und $\mathcal{F} := L_1(m_1) + L_1(m_2)$. Dann gilt

$$\mathcal{F} = L_1(\mu) \quad \Leftrightarrow \quad G(P) \text{ ist ein Wald.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Angenommen, $G(P)$ hat einen Kreis $K = (x_{i_1}, y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}, x_{i_1})$ oder $K = (y_{j_1}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}, y_{j_1})$. Nun betrachte $M \in L_1(\mu)$ (siehe Beispiel 1.3.5 für die Bezeichnungen) mit

$$m_{i_1 j_1} = m_{i_2 j_1} = m_{i_2 j_2} = \cdots = m_{i_n j_n} = 0, \; m_{i_1 j_n} = 1. \tag{2.20}$$

Wäre $M \in \mathcal{F}$, so gäbe es $a \in L_1(m_1)$ und $b \in L_1(m_2)$, so daß $m_{i,j} = a_i + b_j$ für alle $(i,j) \in I_1 \times I_2$ mit $\mu(i,j) > 0$. Mit $\alpha := a_{i_1} \in \mathbb{R}$ folgte dann wegen (2.20), daß $b_{j_1} = \cdots = b_{j_n} = -\alpha$ und daher $a_{i_1} = 1 + \alpha$, was $a_{i_1} = \alpha$ widerspricht. Also ist $M \notin \mathcal{F}$.

„$\Leftarrow$“: $G(P)$ sei also ein Wald, das heißt, alle Zusammenhangskomponenten von $G(P)$ sind (wegen $\#I_1, \#I_2 < \infty$ endliche) Bäume. Wähle aus jeder Zusammenhangskomponente Z von $G(P)$, die mindestens zwei Ecken enthält, eine Ecke x_{i_Z}. Da Z ein Baum ist, gibt es nach Lemma 1.2.11 zu $z_1, z_2 \in V(Z)$ genau einen z_1z_2-Weg $(z_1, \ldots, z_2)$ in Z. Sei nun $M \in L_1(\mu)$ gegeben. Führe folgende rekursive Konstruktion durch: $a_{i_Z} := 0$. Für gegebenes $y_j \in V(Z)$ mit $d(y_j, x_{i_Z}) = n$, sei a_i für alle $x_i \in V(Z)$ mit $d(x_i, x_{i_Z}) < n$ schon definiert. Zu $d(y_j, x_{i_Z}) = n$ gehört genau ein $y_j x_{i_Z}$-Weg $(z_1, \ldots, z_n)$ der Länge n, $z_1 = x_{i_Z}$, $z_n = y_j$, $z_{n-1} = x_i$ für ein i. Definiere $b_j := m_{i,j} - a_i$. Für gegebenes $x_i \in V(Z)$ mit $d(x_i, x_{i_Z}) = n$, sei b_j für alle $y_j \in V(Z)$ mit $d(y_j, x_{i_Z}) < n$ schon definiert. Zu $d(x_i, x_{i_Z}) = n$ gehört genau ein $x_i x_{i_Z}$-Weg $(z_1, \ldots, z_n)$ der Länge n, $z_1 = x_{i_Z}$, $z_n = x_i$, $z_{n-1} = y_j$ für ein j. Definiere $a_i := m_{i,j} - b_j$. Damit sind a_i, b_j für alle $(i,j) \in \operatorname{supp}(P)$ wohldefiniert (da die verbindenden Wege jeweils eindeutig sind), und es gilt $m_{i,j} = a_i + b_j$, denn so wurden die a_i, b_j ja gerade definiert. Bleibt zu zeigen, daß $(a_i)_{i \in I_1} \in L_1(m_1)$ sowie $(b_j)_{j \in I_2} \in L_1(m_2)$ gilt, was aber klar ist, da $(a_i)_{i \in I_1}$ und $(b_j)_{j \in I_2}$ endliche Folgen sind. ∎

Satz 2.2.2 gilt schon dann, wenn nur eine der Mengen I_1, I_2 endlich ist (siehe Korollar 2.2.5). Die folgenden Beispiele zeigen jedoch, daß es, wenn I_1, I_2 beide unendlich sind, vorkommen kann, daß es $M \in L_1(\mu) \setminus \mathcal{F}$ gibt, obwohl $G(P)$ ein Wald ist, und zwar sowohl für $m_1(I_1) = m_2(I_2) = \infty$ (siehe Beispiel 2.2.3 (a)) als auch für $m_1(I_1) = m_2(I_2) < \infty$ (siehe Beispiel 2.2.3 (b)).

Beispiel 2.2.3. Die Bezeichnungen $(m_1,\ m_2,\ a_i,\ b_j,\ \dots)$ seien wie in Satz 2.1.15 und Beispiel 1.3.5.

(a) Betrachte das Randsystem $\mathcal{I} := (\mathbb{N}, \mathbb{N}, r, s)$ mit $r = s = (1, 1, \dots)$, das heißt $m_1(\mathbb{N}) = m_2(\mathbb{N}) = \infty$. Definiere

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dann ist $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ und $G(P)$ ist ein Wald nach Lemma 2.1.6. Definiere weiter

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & \\ 1 & & 0 & & & & \\ & 0 & & 0 & & & \\ & & \frac{1}{2} & & 0 & & \\ & & & 0 & & 0 & \\ & & & & \frac{1}{4} & & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |m_{i,j}| p_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k < \infty,$$

also ist $M \in L_1(\mu)$. Ist $M \in \mathcal{F}$, so gibt es $a \in L_1(m_1)$ und $b \in L_1(m_2)$, so daß $m_{i,j} = a_i + b_j$ für alle $(i,j) \in I_1 \times I_2$ mit $\mu(i,j) > 0$. Setzt man $\alpha := b_1 \in \mathbb{R}$, so folgt $a_1 = -\alpha$, $b_2 = \alpha$, $a_2 = 1 - \alpha$ und so weiter. Das heißt, durch eine Induktion ergibt sich

$$b = \left(\alpha, \alpha, \alpha - 1, \alpha, \alpha - 1 - \tfrac{1}{2}, \dots, \alpha, \alpha - \sum_{j=0}^{n} (\tfrac{1}{2})^j, \dots \right),$$

$$a = \left(-\alpha, -\alpha + 1, -\alpha, -\alpha + 1 + \tfrac{1}{2}, \dots, -\alpha, -\alpha + \sum_{i=0}^{n} (\tfrac{1}{2})^i, \dots \right).$$

Wegen $b \in L_1(m_2)$ ist $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| s_j < \infty$. Daraus folgt $\alpha = 0$ und damit

$$\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| s_j = \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \geq \sum_{j=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

das heißt, die Annahme $M \in \mathcal{F}$ führt zum Widerspruch.

(b) Betrachte das Randsystem $\mathcal{I} := (\mathbb{N}, \mathbb{N}, r, s)$ mit $r = s = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$, das heißt $m_1(\mathbb{N}) = m_2(\mathbb{N}) < \infty$. Definiere

$$P := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & & \\ \frac{1}{4} & & \frac{1}{9} & \\ & \frac{1}{9} & & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dann ist $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ und $G(P)$ ist ein Wald nach Lemma 2.1.6. Definiere weiter

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & \\ 1 & & 0 & & & & \\ & 0 & & 0 & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & 0 & & 0 & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |m_{i,j}| p_{i,j} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

also ist $M \in L_1(\mu)$. Wäre $M \in \mathcal{F}$, so gäbe es wiederum $a \in L_1(m_1)$ und $b \in L_1(m_2)$, so daß $\underset{\substack{(i,j)\in I_1\times I_2 \\ \text{mit } \mu(i,j)>0}}{\forall} m_{i,j} = a_i + b_j$. Mit $\alpha := b_1 \in \mathbb{R}$ würde folgen $a_1 = -\alpha$, $b_2 = \alpha$, $a_2 = 1 - \alpha$ und so weiter. Das heißt, durch eine Induktion erhielte man

$$b = (\alpha, \alpha, \alpha - 1, \alpha, \alpha - 1 - 1, \ldots, \alpha, \alpha - n, \ldots),$$

$$a = (-\alpha, -\alpha + 1, -\alpha, -\alpha + 1 + 1, \ldots, -\alpha, -\alpha + n, \ldots).$$

Daraus würde

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| r_i &\geq \sum_{i=1}^{\infty} |i - \alpha| \left(\frac{1}{(2i)^2} + \frac{1}{(2i+1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} |i - \alpha| \left(\frac{1}{i^2} + \frac{4}{(2i+1)^2} \right) \\ &\geq \frac{1}{4} \sum_{i=\lceil |\alpha|+1 \rceil}^{\infty} \frac{i-\alpha}{i^2} = \frac{1}{4} \sum_{i=\lceil |\alpha|+1 \rceil}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{\alpha}{i^2} \right) = \infty \end{aligned}$$

folgen, im Widerspruch zu $a \in L_1(m_1)$.

Satz 2.2.4. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem, $\#I_1, \#I_2 \leq \omega$; die Endlichkeit einer der Mengen I_1, I_2 beziehungsweise der Maße m_1, m_2 wird nicht länger vorausgesetzt. Sei wieder $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$, m_1, m_2, $\mu := h^{-1}(P)$ wie in Satz 2.1.15 und $\mathcal{F} := L_1(m_1) + L_1(m_2)$. Dann gilt*

$$\overline{\mathcal{F}} = L_1(\mu) \quad \Leftrightarrow \quad G(P) \textit{ ist ein Wald.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$": Angenommen $G(P)$ hat einen Kreis. Dann gibt es eine endliche Submatrix $\tilde{P}$ von P und ein endliches Randsystem $\tilde{\mathcal{I}} = (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{r}, \tilde{s}) \leq \mathcal{I}$, so daß $G(\tilde{P})$ einen Kreis hat und $\tilde{P} \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}})$. Setze $\tilde{\mu} := h^{-1}(\tilde{P})$. Wegen Lemma 2.2.1 und Satz 2.2.2 gibt es $\tilde{M} \in L_1(\tilde{\mu}) \setminus \tilde{\mathcal{F}} = L_1(\tilde{\mu}) \setminus \overline{\tilde{\mathcal{F}}}$ (hierbei sind $\tilde{\mathcal{F}} := L_1(\tilde{m}_1) + L_1(\tilde{m}_2)$, $\tilde{m}_1$, $\tilde{m}_2$ gemäß Satz 2.1.15). Definiert man dann $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in I_1 \times I_2}$ mit

$$m_{i,j} := \begin{cases} \tilde{m}_{i,j} & \text{für } (i,j) \in \tilde{I}_1 \times \tilde{I}_2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so gilt $\tilde{M} = M\restriction_{\tilde{I}_1 \times \tilde{I}_2}$.

Behauptung 1. $M \in L_1(\mu) \setminus \overline{\mathcal{F}}$.

Beweis. Wäre $(M^{(n)})$ eine Folge in $L_1(\mu)$, die in $L_1(\mu)$ gegen M konvergiert, so bedeutete dies, daß

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{(i,j)\in I_1\times I_2} |m_{i,j}^{(n)} - m_{i,j}|p_{i,j} = 0.$$

Daher hätte man auch

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{(i,j)\in \tilde{I}_1\times \tilde{I}_2} |m_{i,j}^{(n)} - m_{i,j}|p_{i,j} = 0,$$

und damit würde $\tilde{M}^{(n)} := M^{(n)}\lceil_{\tilde{I}_1\times\tilde{I}_2}$ in $L_1(\tilde{\mu})$ gegen $\tilde{M}$ konvergieren, was im Widerspruch zu $\tilde{M} \in L_1(\tilde{\mu}) \setminus \overline{\tilde{\mathcal{F}}}$ stünde. ▲

Damit ist „$\Rightarrow$" bewiesen.

„$\Leftarrow$": Angenommen, $G(P)$ ist ein Wald. Die Idee ist, $M \in L_1(\mu)$ durch endliche Matrizen zu approximieren. Hier ist es wieder günstig, I_1, I_2 abzuzählen, das heißt, ohne Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß $I_1 = I_2 = \mathbb{N}$. Dann definiere für $n \in \mathbb{N}$ Matrizen $M^{(n)} = (m_{i,j}^{(n)})_{(i,j)\in I_1\times I_2}$ durch

$$m_{i,j}^{(n)} := \begin{cases} m_{i,j} & \text{für } i \le n \text{ und } j \le n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen Satz 2.2.2 ist $M^{(n)} \in \mathcal{F}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin folgt aus

$$\sum_{(i,j)\in I_1\times I_2} |m_{i,j}|p_{i,j} < \infty,$$

daß

$$\lim_{n\to\infty} \|M^{(n)} - M\|_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j>n} |m_{i,j}|p_{i,j} = 0.$$

Damit ist $\overline{\mathcal{F}} = L_1(\mu)$ gezeigt. ■

Korollar 2.2.5. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem mit $\min\{\#I_1, \#I_2\} < \infty$ und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Weiterhin seien $\mu := h^{-1}(P)$, m_1, m_2 wie in Satz 2.1.15 und*

$$\mathcal{F} := L_1(m_1) + L_1(m_2).$$

Dann gilt

$$\mathcal{F} = L_1(\mu) \quad \Leftrightarrow \quad G(P) \textit{ ist ein Wald.}$$

Beweis. $\mathcal{F} = L_1(\mu) \overset{(2.2.2)}{\Leftrightarrow} \mathcal{F}$ ist dicht in $L_1(\mu) \overset{(2.2.4)}{\Leftrightarrow} G(P)$ ist ein Wald. ■

Satz 2.2.6. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem mit $\sum_{i\in I_1} r_i = \sum_{j\in I_2} s_j < \infty$, $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Dann gilt*

$$P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) \quad \Leftrightarrow \quad G(P) \quad \textit{ist ein Wald.}$$

Beweis. Wegen Satz 1.4.1 und Korollar 2.1.16 gilt $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ genau dann, wenn $\mathcal{F}$ in $L_1(\mu)$ dicht liegt, und das ist nach Satz 2.2.4 genau dann der Fall, wenn $G(P)$ ein Wald ist. ■

Das folgende Beispiel 2.2.7 zeigt, daß es im Fall $m_1(I_1) = m_2(I_2) = \infty$ passieren kann, daß $G(P)$ ein Wald ist, obwohl $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. Im Zusammenspiel mit Satz 2.2.4 zeigt das dann auch, daß sich Satz 1.4.1 nicht auf den Fall $m_1(I_1) = m_2(I_2) = \infty$ verallgemeinern läßt.

Beispiel 2.2.7. Betrachte die Doppeldiagonalmatrix

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Wegen Lemma 2.1.6 ist $G(P)$ ein Wald. Für das Randsystem $\mathcal{I} := (\mathbb{N}, \mathbb{N}, r, s)$ mit

$$r = s = (2, 2, \dots)$$

ist $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Jedoch ist $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$, denn mit

$$E := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & & 1 & & & \\ & 1 & & -1 & & \\ & & -1 & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

gilt

$$P = \tfrac{1}{2}(P + E) + \tfrac{1}{2}(P - E)$$

und $P \pm E \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$.

Eine weitere Anwendung von Satz 1.4.1 liefert der folgende Satz 2.2.8. Die folgenden Ergebnisse dieses Abschnitts stammen wiederum von Lindenstrauss (siehe [9]).

Satz 2.2.8. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein endliches Randsystem, $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$, m_1, m_2, $\mu := h^{-1}(P)$ wie in Satz 2.1.15, $\mathcal{F} := L_1(m_1) + L_1(m_2)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) \Leftrightarrow \underset{k\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{A_1\subseteq I_1}{\forall}\ \underset{A_2\subseteq I_2}{\forall} (\#A_1 = \#A_2 = k \quad \Rightarrow \\ \#\{(i,j) \in A_1 \times A_2 : p_{i,j} > 0\} < 2k). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Beweis. Für $k = 1$ ist $\#A_1 = \#A_2 = 1$, das heißt

$$\#\{(i,j) \in A_1 \times A_2 : p_{i,j} > 0\} \le 1 < 2.$$

Für $k > \min(\#I_1, \#I_2)$, kann $\#A_1 = \#A_2 = k$ nicht erfüllt werden. Demnach ist eigentlich nur zu zeigen:
$P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \underset{1<k\le\min(\#I_1,\#I_2)}{\forall}\ \underset{A_1\subseteq I_1}{\forall}\ \underset{A_2\subseteq I_2}{\forall} (\#A_1 = \#A_2 = k \quad \Rightarrow \\ \#\{(i,j) \in A_1 \times A_2 : p_{i,j} > 0\} < 2k). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Für $\min(\#I_1, \#I_2) = 1$, besteht $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ nur aus einem Element, welches auch in $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ liegt, so daß die Aussage des Satzes trivialerweise richtig ist. Ab jetzt sei daher $\min(\#I_1, \#I_2) \ge 2$.

„$\Rightarrow$“: Angenommen, es gibt $A_1 \subseteq I_1, A_2 \subseteq I_2$ mit $\#A_1 = \#A_2 = k$ und

$$1 < k \leq \min(\#I_1, \#I_2),$$

so daß $p_{i,j} > 0$ für mindestens $2k$ verschiedene Elemente von $(i,j) \in A_1 \times A_2$. Dann wähle eine Menge $I_{\neq 0} \subseteq A_1 \times A_2$ mit $\#I_{\neq 0} = 2k$ und $\underset{(i,j)\in I_{\neq 0}}{\forall} p_{i,j} > 0$. Man betrachte das lineare Gleichungssystem

$$a_i + b_j = n_{i,j} \tag{2.25}$$

in den $2k$ Unbekannten a_i, b_j mit $(i,j) \in I_{\neq 0}$ und beliebigen festen $n_{i,j} \in \mathbb{R}$. Es besteht also aus $2k$ Gleichungen, die zu den gegebenen $2k$ Elementen $(i,j) \in I_{\neq 0}$ mit $p_{i,j} > 0$ gehören. Das zu (2.25) gehörende homogene lineare Gleichungssystem hat die nichttriviale Lösung $a = (1, \ldots, 1)$, $b = (-1, \ldots, -1)$, das heißt, (2.25) ist nicht global lösbar. Es gibt also ein $N \in L_1(\mu)$ (vergleiche dazu (1.10)), so daß für die gegebenen $2k$ Elemente mit $p_{i,j} > 0$

$$a_i + b_j = n_{i,j} \tag{2.26}$$

nicht lösbar ist. Also ist $N \notin \mathcal{F}$, das heißt $L_1(\mu) \neq \mathcal{F}$. Wegen Lemma 2.2.1 ist also $\mathcal{F}$ nicht dicht in $L_1(\mu)$, das heißt, nach Korollar 2.2.5 und Satz 2.2.6 ist $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.

„$\Leftarrow$“: Vollständige Induktion über $p+q$ mit $p := \#I_1$, $q := \#I_2$. Für $p+q = 2$ ist nichts zu zeigen. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p \geq q$. Nun gibt es eine Zeile mit höchstens einem positiven Element, daß heißt, es gibt $(i_0, j_0) \in I_1 \times I_2$, so daß $p_{i_0,j} = 0$ für alle $j \neq j_0$ (ansonsten wäre die Voraussetzung für

$$k = \min(\#I_1, \#I_2).$$

nicht erfüllt). Setze

$$\tilde{I}_1 := I_1 \setminus \{i_0\},\ \tilde{r} := r\restriction_{\tilde{I}_1},\ \tilde{s}_j := \begin{cases} s_j - p_{i_0,j_0} & \text{für} \quad j = j_0, \\ s_j & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setze $\tilde{P} := P\restriction_{\tilde{I}_1 \times I_2}$ und $\tilde{\mathcal{I}} := (\tilde{I}_1, I_2, \tilde{r}, \tilde{s})$. Dann ist $\tilde{P} \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}})$ (wegen der Wahl von (i_0, j_0) und der Definition von $\tilde{s}$), und $\tilde{P}$ erfüllt die Bedingung der Voraussetzung (da P sie erfüllt). Nach Induktionsannahme ist daher $\tilde{P} \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}}))$. Nun sei $M \in L_1(\mu)$ gegeben. Sei $\tilde{M} := M\restriction_{\tilde{I}_1 \times I_2}$. Da $\tilde{P} \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}}))$ ist, folgt aus Korollar 2.2.5 und Satz 2.2.6, daß $\tilde{M} \in \tilde{\mathcal{F}}$. Also gibt es $\tilde{a} \in L_1(\tilde{m}_1)$ und $\tilde{b} \in L_1(\tilde{m}_2)$ (hierbei seien $\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{m}_1$, $\tilde{m}_2$ nach Satz 2.1.15 analog zu $\mathcal{F}$, m_1, m_2 definiert) mit

$$\underset{(i,j)\in \operatorname{supp}(\tilde{P})}{\forall} \tilde{m}_{i,j} = \tilde{a}_i + \tilde{b}_j.$$

Nun definiere a, b durch

$$a_i := \begin{cases} m_{i_0,j_0} - \tilde{b}_{j_0} & \text{für } i = i_0, \\ \tilde{a}_i & \text{sonst} \end{cases}, \quad b := \tilde{b}.$$

Dann gilt $a \in L_1(m_1)$, $b \in L_1(m_2)$, sowie

$$\underset{(i,j)\in \operatorname{supp}(P)}{\forall} m_{i,j} = a_i + b_j.$$

Daher ist $M \in \mathcal{F}$, und da M beliebig war, ist $\mathcal{F} = L_1(\mu)$. Korollar 2.2.5 und Satz 2.2.6 liefern nun $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. ∎

Korollar 2.2.9. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein endliches Randsystem. Ist $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$, so hat P mindestens eine Linie mit höchstens einem positiven Element.*

Beweis. Hätte jede Linie von P mindestens zwei positive Elemente, so hätte jede quadratische Submatrix von P der Dimension $k = \min\{\#I_1, \#I_2\}$ mindestens $2k$ positive Elemente, das heißt, wegen Satz 2.2.8 wäre $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. ∎

Satz 2.2.10. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein endliches Randsystem mit*

$$\#I_1 = \#I_2 = n < \infty$$

sowie $r = s = (1, \ldots, 1)$. Dann ist $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = \mathcal{M}_p(I_1, I_2)$.

Beweis. „$\supseteq$" folgt sofort, da $\{0, 1\}$ die Menge der Extremalpunkte vom Interval $[0, 1]$ ist.
„$\subseteq$": Vollständige Induktion nach n. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $n > 1$ und $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. Wegen Korollar 2.2.9 hat P eine Linie, die nur genau eine Eins enthält. Also gibt es je eine Zeile und eine Spalte, die genau eine Eins enthalten. Streicht man in P diese Zeile und Spalte, so bekommt man eine Matrix $\tilde{P} \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}})$, wobei $\tilde{\mathcal{I}} := (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{r}, \tilde{s})$ und $\tilde{I}_1$, $\tilde{I}_2$, $\tilde{r}$, $\tilde{s}$ jeweils eine um Eins kleinere Kardinalität beziehungsweise Länge haben als I_1, I_2, r, s. $\tilde{P} \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}}))$: Gäbe es $0 < \alpha < 1$, $\tilde{P} \neq \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}})$ mit $\tilde{P} = \alpha\tilde{P}_1 + (1-\alpha)\tilde{P}_2$, so könnte man die in P gestrichene Zeile und Spalte in $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$ einfügen und erhielte $P \neq P_1, P_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ mit $P = \alpha P_1 + (1-\alpha)P_2$. Aus $\tilde{P} \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}}))$ folgt mit der Induktionsvoraussetzung, daß $\tilde{P} \in \mathcal{M}_p(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$ und daher $P \in \mathcal{M}_p(I_1, I_2)$. ∎

Satz 2.2.10 wurde zuerst von Birkhoff bewiesen (siehe [1]).

2.3 Wurzelbäume und ϵ-Doppelbäume

Die Mengen $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ und $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$ lassen sich ohne Rückgriff auf die Maßtheorie und Satz 1.4.1 durch Eigenschaften von $G(P)$ charakterisieren. Der folgende Satz 2.4.3 stammt von Grząślewicz (siehe [4]) und stellt eine Verallgemeinerung von Satz 2.2.6 dar. Dazu müssen aber zunächst einige technische Hilfsmittel bereitgestellt werden, was in diesem Kapitel geschehen soll.

Definition 2.3.1. Ein *Wurzelbaum* ist ein Tripel $T = (V, E, q)$, so daß (V, E) ein Baum ist und $q \in V$ (im Fall, daß (V, E, w) ein gewichteter Baum ist, nenne $T = (V, E, q, w)$ einen *gewichteten Wurzelbaum*). q heißt die *Wurzel* des Baumes. Das n-te *Level* sei $L_n = L_n(q) = L_n(q, T) := \{v \in V : d(v, q) = n\}$. Für $v \in L_n$ definiere $N^+(v) = N_T^+(v) := \{u \in L_{n+1} : \{u, v\} \in E\}$, und für $v \neq q$ definiere

$$N^-(v) = N_T^-(v) := \{u \in L_{n-1} : \{u, v\} \in E\}.$$

Außerdem sei noch $E_n = E_n(q) = E_n(q, T) := \{e \in E : \underset{u \in L_{n-1}}{\exists} \underset{v \in L_n}{\exists} e = \{u, v\}\}$. Ist $T' = (V', E', q)$ ein weiterer Wurzelbaum, so schreibe $T' \leq T$ genau dann, wenn $(V', E') \leq (V, E)$ (ensprechend ist für $T' = (V', E', q, w')$, $T' \leq T$ genau dann, wenn $(V', E', w') \leq (V, E, w)$).

Lemma 2.3.2. *Sei $T = (V, E, q)$ ein Wurzelbaum.*

(a) $\underset{v \in V \setminus \{q\}}{\forall} \#N^-(v) = 1$ *(das Element von $N^-(v)$ bezeichne mit v^-).*

(b) $\underset{u,v \in V}{\forall} (u \neq v \quad \Rightarrow \quad N^+(u) \cap N^+(v) = \emptyset).$

Beweis. (a) Gäbe es $u_1, u_2 \in N^-(v)$, $u_1 \neq u_2$, so gäbe es zwei verschiedene qv-Wege, nämlich $(q, \ldots, u_1, v)$ und $(q, \ldots, u_2, v)$. Nach Lemma 1.2.11 wäre also T kein Baum. (b) Sind u, v aus verschiedenen Levels, so ist nichts zu zeigen. Wären $u, v \in L_n$ und $x \in N^+(u) \cap N^+(v)$, so wären $u, v \in N^-(x)$, was nach (a) nicht sein kann. ■

Definition 2.3.3. Sei $T = (V, E, q)$ ein Wurzelbaum, $\epsilon > 0$. Dann heißt eine Abbildung $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ ein *ϵ-Fluß* auf T genau dann, wenn

$$\sum_{u \in N^+(q)} f\{q, u\} = \epsilon \text{ und } \underset{v \in V \setminus \{q\}}{\forall} \sum_{u \in N^+(v)} f\{v, u\} = f\{v^-, v\}. \tag{2.27}$$

Lemma 2.3.4. *Sei $T = (V, E, q)$ ein Wurzelbaum, $\epsilon > 0$ und f ein ϵ-Fluß auf T. Dann ist $\sum_{e \in E} f(e) = \infty$. Insbesondere ist $\#V = \infty$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \sum_{e \in E_n} f(e) = \epsilon.$$

Das wird nun durch Induktion nach n bewiesen. Der Fall $n = 1$ steht in (2.27). Sei also $n > 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E_n} f(e) &= \sum_{\substack{v \in L_{n-1},\\ u \in L_n}} f\{u, v\} = \sum_{v \in L_{n-1}} \sum_{u \in N^+(v)} f\{u, v\} \overset{(2.27)}{=} \sum_{v \in L_{n-1}} f\{v^-, v\} \\ &= \sum_{\substack{v \in L_{n-1},\\ u \in L_{n-2}}} f\{u, v\} = \sum_{e \in E_{n-1}} f(e) \overset{\text{(Induktion)}}{=} \epsilon \end{aligned} \tag{2.28}$$

und der Induktionsbeweis ist vollständig. ■

Lemma 2.3.5. *Sei $\epsilon > 0$ und f ein ϵ-Fluß auf dem gewichteten Wurzelbaum*

$$T = (V, E, q, w).$$

Dann gibt es für alle $0 < \delta < \epsilon$ einen gewichteten Wurzelbaum $T' \leq T$ und einen δ-Fluß f' auf T', so daß alle Ecken von T' endlichen Grad haben und $f' < f\lceil_{E(T')}$.

Beweis. Behauptung 1. Sei I eine abzählbare Menge, $\mathcal{E} := (e_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}^+$ mit

$$\tilde{\epsilon} := \sum_{i\in I} e_i > 0.$$

Ist dann $0 < \tilde{\delta} < \tilde{\epsilon}$, so gibt es $I' \subseteq I$ endlich und $\mathcal{D} := (d_i)_{i\in I'} \subseteq \mathbb{R}^+$, so daß

$$\sum_{i\in I'} d_i = \tilde{\delta}$$

und $d_i < e_i$ für alle $i \in I'$.

Beweis. Ist I endlich, so setze $I' := I$, $\Delta := \frac{\tilde{\epsilon}-\tilde{\delta}}{\#I}$, $d_i := e_i - \Delta$ für alle $i \in I'$. Dann ist $\sum_{i\in I'} d_i = \tilde{\epsilon} - \#I\frac{\tilde{\epsilon}-\tilde{\delta}}{\#I} = \tilde{\delta}$. Nun sei I unendlich. Dann gibt es eine endliche Menge $I' \subseteq I$, so daß $\hat{\epsilon} := \sum_{i\in I'} e_i > \tilde{\delta}$. Damit befindet man sich wieder im Fall einer endlichen Indexmenge, und da dieser oben schon erledigt wurde, ist alles gezeigt. ▲

Nun zur Konstruktion von $T' = (V_{T'}, E_{T'}, q, w\lceil_{E_{T'}}) \leq T$ und $f' < f\lceil_{E(T')}$. Und zwar werden dazu Mengen $L'_n(q) \leq L_n(q)$ und $E'_n(q) \leq E_n(q)$ definiert. Die Definitionen von $L'_n(q)$, $E'_n(q)$ erfolgen rekursiv unter Benutzung von Behauptung 1. Im ersten Schritt setze zur Anwendung von Behauptung 1

$$I := \{u \in N^+(q) : f\{q,u\} > 0\},$$

$\mathcal{E} := (f\{q,u\})_{u\in I}$, $\tilde{\delta} := \delta$, $\tilde{\epsilon} := \epsilon$. Behauptung 1 liefert dann endliches I' und $\mathcal{D}$. Setze $N(q) := I' \subseteq N^+(q)$, $L'_0(q) := \{q\}$, $L'_1(q) := N(q)$, $E'_1(q) := \{\{q,u\} : u \in N(q)\}$, $f'\{q,u\} := d_u$ für alle $u \in N(q)$. Dann ist $\sum_{u\in N(q)} f'\{q,u\} = \delta$ und

$$\forall_{u\in N(q)} \; f'\{q,u\} < f\{q,u\}.$$

Nun sei $n \geq 1$, und für alle $m \leq n$ seien $L'_m(q) \subseteq L_m(q)$, $E'_m(q) \subseteq E_m(q)$,

$$f'\lceil_{E'_m(q)} < f\lceil_{E'_m(q)}$$

bereits konstruiert, so daß

$$\forall_{v\in L'_m(q),\, m\neq 0} \; v^- \in L'_{m-1}(q).$$

Sei $v \in L'_n(q_1)$. Zur Anwendung von Behauptung 1 setze diesmal

$$I := \{u \in N^+(v) : f\{u,v\} > 0\},$$

$\mathcal{E} := (f\{u,v\})_{u\in I}$, $\tilde{\delta} := f'\{v,v^-\}$, $\tilde{\epsilon} := f\{v,v^-\}$. Behauptung 1 liefert wieder endliches I', $\mathcal{D}$. Setze $N(v) := I' \subseteq N^+(v)$, $f'\{u,v\} := d_u < f\{u,v\}$ für alle $u \in N(v)$. Nach Lemma 2.3.2 (b) sind alle $N(v)$ disjunkt. Setze $L'_{n+1}(q) := \dot{\bigcup}_{v\in L'_n(q)} N(v)$, $E'_{n+1}(q) := \{\{u,v\} \in E_{n+1}(q) : u \in L'_n(q),\, v \in L'_{n+1}(q)\}$. Dann ist

$$\sum_{u\in N(v)} f'\{u,v\} = f'\{v,v^-\}.$$

Setze noch $V_{T'} := \dot{\bigcup}_{n=0}^{\infty} L'_n(q)$, $E_{T'} := \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} E'_n(q)$. Da f', wie schon während der Konstruktion gezeigt, die Bedingung (2.27) erfüllt (mit δ statt ϵ), ist f' ein δ-Fluß auf T'. ■

Definition 2.3.6. Ein *Doppelbaum* $B = (G, T_1, T_2)$ ist ein Baum $G = (V, E)$ zusammen mit zwei Wurzelbäumen $T_1 = (V_{T_1}, E_{T_1}, q_1)$, $T_2 = (V_{T_2}, E_{T_2}, q_2)$. Dabei soll gelten: $G = T_1 + T_2 +_e \{q_1, q_2\}$. Handelt es sich bei G um einen gewichteten Graphen $G = (V, E, w)$, und gilt $T_1 = (V_{T_1}, E_{T_1}, q_1, w\restriction_{E_{T_1}})$, $T_2 = (V_{T_2}, E_{T_2}, q_2, w\restriction_{E_{T_2}})$, so heißt B ein *gewichteter Doppelbaum*. Ist $B' = (G', T_1', T_2')$ ($B' = (G', T_1', T_2', w')$) ein weiterer (gewichteter) Doppelbaum, so schreibe $B' \leq B$ genau dann, wenn $G' \leq G$, $T_1' \leq T_1$ und $T_2' \leq T_2$.

Definition 2.3.7. Sei $B = (G, T_1, T_2)$, $G = (V, E, w)$, $T_1 = (V_{T_1}, E_{T_1}, q_1, w\restriction_{E_{T_1}})$, $T_2 = (V_{T_2}, E_{T_2}, q_2, w\restriction_{E_{T_2}})$ ein gewichteter Doppelbaum und $\epsilon > 0$. B heißt genau dann ein *ϵ-Doppelbaum*, wenn es ϵ-Flüsse f_1 auf T_1 und f_2 auf T_2 gibt, so daß $f_1 \leq w\restriction_{E_{T_1}}$, $f_2 \leq w\restriction_{E_{T_2}}$ und $\epsilon \leq w\{q_1, q_2\}$. Zur Veranschaulichung siehe folgende Abbildung 2.1.

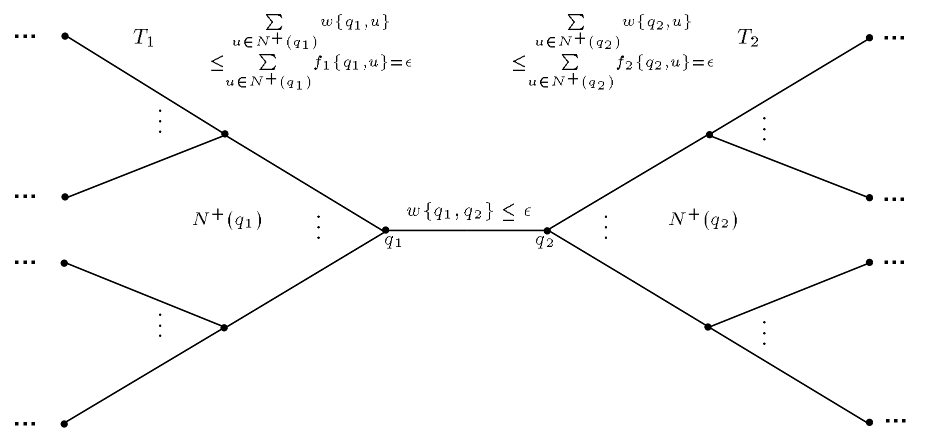

Abbildung 2.1: ϵ-Doppelbaum

Lemma 2.3.8. *Es sei B ein ϵ-Doppelbaum (die Bezeichnungen seien wie in Definition 2.3.7). Dann gibt es für alle $0 < \delta < \epsilon$ einen δ-Doppelbaum $B' \leq B$, so daß alle Ecken von B' endlichen Grad haben.*

Beweis. Zur Konstruktion von $B' = (G', T_1', T_2')$ wird Lemma 2.3.5 benutzt. Lemma 2.3.5 liefert $T_1' = (V_{T_1'}, E_{T_1'}, q_1, w\restriction_{E_{T_1'}}) \leq T_1$ und ein δ-Fluß f_1' auf T_1', sowie $T_2' = (V_{T_2'}, E_{T_2'}, q_2, w\restriction_{E_{T_2'}}) \leq T_2$ und ein δ-Fluß f_2' auf T_2'. Sei noch

$$V' := V_{T_1'} \dot\cup V_{T_2'}, \quad E' := E_{T_1'} \dot\cup E_{T_2'} \dot\cup \{\{q_1, q_2\}\}.$$

Da $f_1' < f_1\restriction_{E_{T_1'}} \leq w\restriction_{E_{T_1'}}$, $f_2' < f_2\restriction_{E_{T_2'}} \leq w\restriction_{E_{T_2'}}$ gilt, ist B' mit $G' = (V', E', w\restriction_{E'})$ nach Definition 2.3.7 ein δ-Doppelbaum, dessen Ecken alle endlichen Grad haben. Damit ist Lemma 2.3.8 bewiesen. ∎

Definition 2.3.9. Sei $G = (V, E, w)$ ein gewichteter Graph, $\epsilon > 0$. G hat einen ϵ-Doppelbaum genau dann, wenn es einen ϵ-Doppelbaum $B = (G', T_1, T_2)$ gibt, so daß $G' = (V', E', w\restriction_{E'})$ ein Subgraph von G ist.

Bemerkung 2.3.10. Ist G ein Graph, der einen ϵ-Doppelbaum B hat, so hat G nach Lemma 2.3.8 für alle $0 < \delta < \epsilon$ einen δ-Doppelbaum $B' \leq B$, und alle Ecken von B' haben endlichen Grad.

2.4 Graphentheoretische Charakterisierung der Extremalpunkte

Lemma 2.4.1. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem mit*

$$\#I_1, \#I_2 \leq \omega.$$

Ist $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ und existiert $\epsilon > 0$, so daß $G := G(P)$ einen ϵ-Doppelbaum B hat, so ist $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.

Beweis. Die Bezeichnungen seien wie in Definition 2.3.7. Nach Lemma 2.1.13 (b) genügt es, eine Matrix $0 \neq T \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2)$ mit $P \pm T \geq 0$ zu finden, deren Linien sich alle zu Null summieren. Indem man q_1, q_2 notfalls vertauscht, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es $(i_0, j_0) \in I_1 \times I_2$ gibt, mit $q_1 = x_{i_0}$, $q_2 = y_{j_0}$. Definiere $T = (t_{i,j})_{(i,j) \in I_1 \times I_2}$ mit

$$t_{i,j} := \begin{cases} \epsilon & \text{für } (i,j) = (i_0, j_0), \\ -f_1\{x_i, y_j\} & \text{für } \{x_i, y_j\} \in E_n(T_1), \quad n \text{ ungerade}, \\ f_1\{x_i, y_j\} & \text{für } \{x_i, y_j\} \in E_n(T_1), \quad n \text{ gerade}, \\ -f_2\{x_i, y_j\} & \text{für } \{x_i, y_j\} \in E_n(T_2), \quad n \text{ ungerade}, \\ f_2\{x_i, y_j\} & \text{für } \{x_i, y_j\} \in E_n(T_2), \quad n \text{ gerade}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.29}$$

Wegen $f_1, f_2 \leq w$ ist $P \pm T \geq 0$. Bleibt zu zeigen, daß sich alle Linien von T zu Null summieren. Sei $t_{i,j} \neq 0$, $x_i \in L_{2n}(q_1)$. Dann gilt für die i. Zeile:

$$\sum_{j \in I_2} t_{i,j} = -\sum_{y \in N^+(x_i)} f_1\{y, x_i\} + f_1\{x_i^-, x_i\} = 0.$$

Die Fälle $x_i = q_1$, $x_i \in L_{2n+1}(q_2)$ und der Fall der j. Spalte ($y_j = q_2$, $y_j \in L_{2n+1}(q_1)$, $y_j \in L_{2n}(q_2)$) sind alle völlig analog, das heißt: Daß die Summe über die jeweilige Linie null ist, ergibt sich jeweils aus der Flußbedingung (2.27) für f_1 beziehungsweise f_2. ∎

Lemma 2.4.2. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem. Ist $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ und hat $G(P)$ einen Kreis, so ist $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.*

Beweis. Sei $K = (x_{i_1}, y_{j_1}, \ldots, x_{i_n}, y_{j_n}, x_{i_1})$ ein Kreis in $G(P)$. Dann ist

$$\epsilon := \min\{p_{i_1,j_1}, p_{i_2,j_1}, p_{i_2,j_2}, \ldots, p_{i_n,j_n}, p_{i_1,j_n}\} > 0. \tag{2.30}$$

Für $1 \leq k \leq n-1$ definiere $t_{i_k,j_k} := \epsilon$, $t_{i_{k+1},j_k} := -\epsilon$, $t_{i_n,j_n} := \epsilon$, $t_{i_1,j_n} := -\epsilon$. Dies seien genau die von Null verschiedenen Elemente einer Matrix $T \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2)$. Dann enthält eine Linie von T entweder keine von Null verschiedenen Elemente oder genau zwei, nämlich $+\epsilon$ und $-\epsilon$. Daher summieren sich alle Linien von T zu Null. Nach der Definition von ϵ gilt:

$$\underset{(i,j) \in I_1 \times I_2}{\forall} p_{i,j} \pm t_{i,j} \geq 0.$$

Also folgt $P \pm T \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ und nach Lemma 2.1.13 ist $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. ∎

Satz 2.4.3. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem mit $\#I_1, \#I_2 \leq \omega$ und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Dann gilt $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ genau dann, wenn $G(P)$ ein Wald ist und für kein $\epsilon > 0$ einen ϵ-Doppelbaum hat.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Wegen Lemma 2.4.2 ist $G(P)$ ein Wald, wegen Lemma 2.4.1 hat $G(P)$ für kein $\epsilon > 0$ einen ϵ-Doppelbaum.

„$\Leftarrow$“: Sei $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$, das heißt, es gibt nach Lemma 2.1.13 (b) eine Matrix $T \neq 0$, so daß sich alle Linien von T zu Null addieren und

$$\underset{(i,j)\in\ I_1\times I_2}{\forall} |t_{i,j}| \leq p_{i,j}.$$

Sei $|T| := (|t_{i,j}|)_{(i,j)\in I_1\times I_2}$, $G(|T|) = (V, E, w)$. Wegen $|t_{i,j}| \leq p_{i,j}$ ist dann

$$(V, E) \leq (V(G(P)), E(G(P))).$$

Hat dann $G(|T|)$ einen Kreis, so auch $G(P)$, und man ist fertig. Angenommen, $G(|T|)$ ist kreisfrei. Es bleibt zu zeigen, daß es dann $\epsilon > 0$ gibt, so daß $G(|T|)$ einen ϵ-Doppelbaum B hat (denn dann hat auch $G(P)$ einen ϵ-Doppelbaum). Da $T \neq 0$, gibt es $i_0 \in I_1$, $j_0 \in I_2$, so daß $t_{i_0,j_0} > 0$. Setze $\epsilon := t_{i_0,j_0}$, $q_1 := x_{i_0}$, $q_2 := y_{j_0}$. Damit bekommt man einen Doppelbaum $B' = (\mathrm{Zhk}_{G(|T|)}(x_{i_0}), T_1', T_2')$,

$$\begin{aligned} T_1' = (V_{T_1'}, E_{T_1'}, q_1) &:= \mathrm{Zhk}_{G(|T|)-\{\{q_1,q_2\}\}}(q_1),\\ T_2' = (V_{T_2'}, E_{T_2'}, q_2) &:= \mathrm{Zhk}_{G(|T|)-\{\{q_1,q_2\}\}}(q_2). \end{aligned}$$

Behauptung 1. Sei $I := \{i_1, i_2, \dots\}$ abzählbar, $\mathcal{E} := (e_i)_{i\in I}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, so daß $a := \sum_{i\in I} e_i < \infty$. Ist dann $0 < b \leq a$, so gibt es eine Folge $\mathcal{D} = (d_i)_{i\in I}$, so daß $\underset{i\in I}{\forall}\ 0 < d_i \leq e_i$ und $\sum_{i\in I} d_i = b$.

Beweis. Setze $k := \frac{a}{b}$ und $d_i := ke_i$. ▲

Nun zur Konstruktion von $B = (G, T_1, T_2) \leq B'$: Zunächst wird

$$T_1 = (V_{T_1}, E_{T_1}, q_1) \leq T_1'$$

und ein ϵ-Fluß f_1 auf T_1 konstruiert, und zwar werden dazu Mengen

$$L_n'(q_1) \subseteq L_n(q_1) \quad \text{und} \quad E_n'(q_1) \subseteq E_n(q_1)$$

definiert. Die Definitionen von $L_n'(q_1)$, $E_n'(q_1)$ erfolgen rekursiv unter Benutzung von Behauptung 1. Im ersten Schritt setze zur Anwendung von Behauptung 1 $I := \{j \in I_2 : t_{i_0,j} < 0\}$, $\mathcal{E} := (|t_{i_0,j}|)_{j\in I}$, $b := \epsilon$. Behauptung 1 liefert dann $\mathcal{D}$.

Setze $N(q_1) := \{y_j : j \in I\}$, $L_0'(q_1) := \{q_1\}$, $L_1'(q_1) := N(q_1)$,

$$E_1'(q_1) := \{\{q_1, y_j\} \in E_1(q_1) : y_j \in N(q_1)\},$$

$f_1\{q_1, y_j\} := d_j$ für alle $y_j \in N(q_1)$. Dann ist $\sum_{y_j\in N(q_1)} f_1\{q_1, y_j\} = \epsilon$ und

$$\underset{y_j\in N(q_1)}{\forall} f_1\{q_1, y_j\} \leq |t_{i_0,j}| = w\{q_1, y_j\}.$$

Nun sei $n \geq 1$ ungerade, und für alle $m \leq n$ seien $L'_m(q_1) \subseteq L_m(q_1)$,

$$E'_m(q_1) \subseteq E_m(q_1),$$

$f_1\restriction_{E'_m(q_1)} \leq w\restriction_{E'_m(q_1)}$, bereits konstruiert, so daß

$$\underset{v \in L'_m(q_1),\, m \neq 0}{\forall} \quad v^- \in L'_{m-1}(q_1).$$

Sei $y_{j_n} \in L'_n(q_1)$, $x_{j_n} := y^-_{j_n}$. Dann ist $0 < f_1\{x_{i_n}, y_{j_n}\} \leq -t_{i_n,j_n} = w\{x_{i_n}, y_{j_n}\}$. Zur Anwendung von Behauptung 1 setze diesmal

$$I := \{i \in I_1 : t_{i,j_n} > 0\},$$

$\mathcal{E} := (|t_{i,j_n}|)_{i \in I}$, $b := f_1\{x_{i_n}, y_{j_n}\}$. Behauptung 1 liefert dann wieder $\mathcal{D}$. Setze

$$N(y_{j_n}) := \{x_i : i \in I\},$$

$f_1\{x_i, y_{j_n}\} := d_i$ für alle $x_i \in N(y_{j_n})$. Nach Lemma 2.3.2 (b) sind die Mengen $N(y)$ mit $y \in L'_n(q_1)$ alle disjunkt. Setze $L'_{n+1}(q_1) := \dot{\bigcup}_{y \in L'_n(q_1)} N(y)$,

$$E'_{n+1}(q_1) := \{\{x, y\} \in E_{n+1}(q_1) : x \in L'_{n+1}(q_1),\, y \in L'_n(q_1)\}$$

Dann ist

$$\underset{y \in L'_n(q_1)}{\forall} \quad \sum_{x \in N(y)} f_1\{x, y\} = f_1\{y, y^-\}.$$

Für $n \geq 1$ gerade erfolgen die Definitionen von $L'_{n+1}(q_1)$ und $E'_{n+1}(q_1)$ ganz analog. Setze noch $V_{T_1} := \dot{\bigcup}_{n=0}^{\infty} L'_n(q_1)$, $E_{T_1} := \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} E'_n(q_1)$. Da f_1, wie schon während der Konstruktion gezeigt, die Bedingung (2.27) erfüllt, ist f_1 ein ϵ-Fluß auf T_1.
Die Konstruktion von T_2 und f_2 erfolgt genau in der gleichen Weise wie die von T_1 und f_1. Sei noch $\hat{V} := V_{T_1} \dot{\cup} V_{T_2}$, $\hat{E} := E_{T_1} \dot{\cup} E_{T_2} \dot{\cup} \{\{q_1, q_2\}\}$. Dann ist B mit $G = (\hat{V}, \hat{E}, w\restriction_{\hat{E}})$ nach Definition 2.3.7 ein ϵ-Doppelbaum. ■

Lemma 2.4.4. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem, $\sum_{i \in I_1} r_i = \sum_{j \in I_2} s_j < \infty$, und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Ist dann $\epsilon > 0$, so hat $G(P)$ keinen ϵ-Doppelbaum.*

Beweis. Ist $\epsilon > 0$, und hat $G(P) = (V, E, w)$ einen ϵ-Doppelbaum $B = (G', T_1, T_2)$, so gilt

$$\sum_{(i,j) \in I_1 \times I_2} p_{i,j} \geq \sum_{e \in E_{T_1}} w(e) \geq \sum_{e \in E_{T_1}} f_1(e) = \infty$$

wegen Lemma 2.3.4. Das steht im Gegensatz zur Voraussetzung. ■

Korollar 2.4.5. *Satz 2.2.6.*

Beweis. Seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen also wie in Satz 2.2.6. Nach Satz 2.4.3 ist nur noch zu zeigen, daß $G(P)$ für kein $\epsilon > 0$ einen ϵ-Doppelbaum haben kann, und das ist gerade die Aussage von Lemma 2.4.4. ■

Die folgenden Beispiele stammen aus [4] und zeigen die Anwendung von Satz 2.4.3 auf einige konkret vorgegebene Matrizen.

Beispiel 2.4.6. P_a sei die folgende in (2.31) in Abhängigkeit des Parameters $a > 0$ definierte Matrix (die Matrix bestehe bis auf die angegebenen Elemente nur aus Nullen, wobei die beiden Diagonalen aus Dreien, wie angedeutet, ins Unendliche fortgesetzt werden sollen).

$$
\begin{array}{c}
 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc}
y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & \cdots & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccccccccc}
a & & & 6 & 8 & 5 & & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
3 & & & & & & 4 & & & & & & & \\
 & 2 & 3 & & & & & & & & & & & \\
 & & & 3 & & & 5 & 1 & 2 & & & & & \\
 & & & & & & & 2 & & & & & & \\
 & & & & & & & 7 & & & & & & \\
 & & & & & 2 & & & & 3 & & & & \\
 & & & & & & & & & 3 & 3 & & & \\
 & & & & & & & & & & 3 & 3 & & \\
 & & & & & & & & & & & 3 & 3 & \\
 & & & & & & & & & & & & & \ddots
\end{array}\right)
\end{array}
=: P_a \tag{2.31}
$$

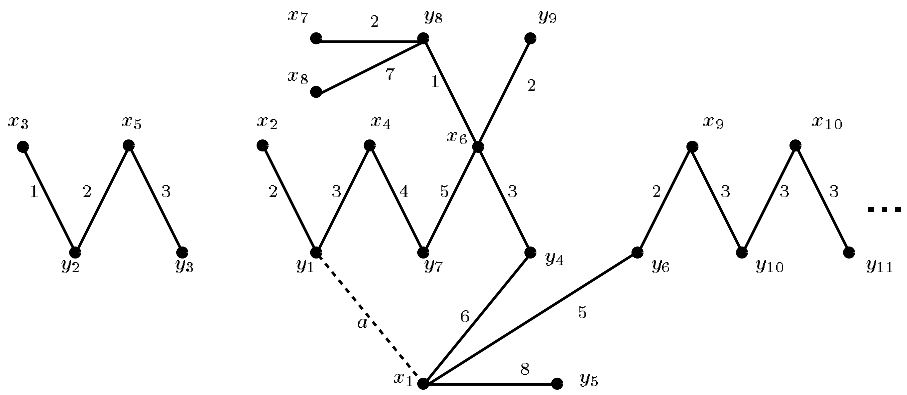

Abbildung 2.2: $G(P_a)$

$G(P_a) = (V, E, w)$ ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Man erkennt, daß $G(P_a)$ genau dann einen Kreis hat, wenn $a > 0$. Genau in diesem Fall ist $P_a \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}(P_a)))$. Dazu ist nach Satz 2.4.3 nur noch zu zeigen, daß $G(P_a)$ für kein $\epsilon > 0$ einen ϵ-Doppelbaum haben kann. Hätte $G(P_a)$ für ein $\epsilon > 0$ einen ϵ-Doppelbaum, so gäbe es nach Definition 2.3.7 und Lemma 2.3.4 eine Kante $e = \{q_1, q_2\} \in E$, so daß $(V, E \setminus \{e\})$ zwei Zusammenhangskomponenten mit unendlich vielen Ecken hat. Bei entfernen einer Kante aus $G(P_a)$ entsteht aber höchstens eine Zusammenhangskomponente mit unendlich vielen Ecken.

Beispiel 2.4.7. P sei die folgende in (2.32) definierte Matrix. In diesem Fall ist es möglicherweise übersichtlicher, das Bildungsgesetz für die Matrix über den Graphen $G(P)$ zu erklären (das ist nach Bemerkung 2.1.5 legitim). $G(P)$ soll wie in Abbildung 2.3 (a) angedeutet nach links und rechts ins Unendliche fortgesetzt werden. Wie dort angegeben, werden die Ecken spaltenweise durchnummeriert und zwar immer abwechselnd eine Spalte links und eine Spalte rechts.

(2.32)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} & \cdots \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ \vdots \end{array} &
\begin{pmatrix}
2 & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & & & & & & & & & & \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & & & & & & & & & \\
 & \frac{1}{4} & & & & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & & & & & & & & & \\
 & \frac{1}{4} & & & & & & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & & & & & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & & & & & & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & & & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & & & & & & & & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & & & & & & & & & \frac{1}{2} & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & & & & & & & & & \frac{1}{2} & \\
 & & & & & \frac{1}{16} & & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & \frac{1}{16} & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & \frac{1}{16} & & & & & & & & & \\
 & & & & & & \frac{1}{16} & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \frac{1}{16} & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \frac{1}{16} & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & & & &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Sei

$$G(P) = (V, E, w).$$

In Abbildung 2.3 ist $G(P)$ zusammen mit zwei Subgraphen H_1 und H_2 dargestellt. Mit $q_1 := y_1$, T_1 links von q_1, $q_2 := x_2$, T_2 rechts von q_2 wird H_1 zu einem $\frac{5}{6}$-Doppelbaum, wobei die $\frac{5}{6}$-Flüsse $f_1 \leq w$ auf T_1 und $f_2 \leq w$ auf T_2 der Abbildung 2.3 (b) zu entnehmen sind. Entsprechend wird H_2 mit $q_1 := x_2$, T_1 oberhalb von x_2, $q_2 := y_3$, T_2 unterhalb von y_3 zu einem $\frac{1}{4}$-Doppelbaum, wobei die $\frac{1}{4}$-Flüsse $f_1 \leq w$ auf T_1 und $f_2 \leq w$ auf T_2 diesmal der Abbildung 2.3 (c) zu entnehmen sind. Nach Satz 2.4.3 ist also

$$P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}(P))).$$

Beispiel 2.4.8. P sei die folgende in (2.33) definierte Matrix. Wieder betrachte man für das Bildungsgesetz der Elemente von P den Graphen $G(P)$ (siehe Abbildung 2.4). Die Ecken sind analog zu Abbildung 2.3 (a) nummeriert. Diesmal sind die Kantengewichte auf der rechten Seite $\frac{1}{4^n}$ im Gegensatz zu $\frac{1}{2^n}$ in Abbildung 2.3 (a).

(2.33)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ \vdots \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & & & & & & & \\
1 & & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & \frac{1}{16} & & & \frac{1}{64} & \frac{1}{64} & & & & & & & & \\
 & \frac{1}{16} & & & & & \frac{1}{64} & \frac{1}{64} & & & & & & \\
 & & \frac{1}{16} & & & & & & \frac{1}{64} & \frac{1}{64} & & & & \\
 & & \frac{1}{16} & & & & & & & & \frac{1}{64} & \frac{1}{64} & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & \ddots & & & & & & & & & \ddots
\end{pmatrix} =: P
\end{array}
$$

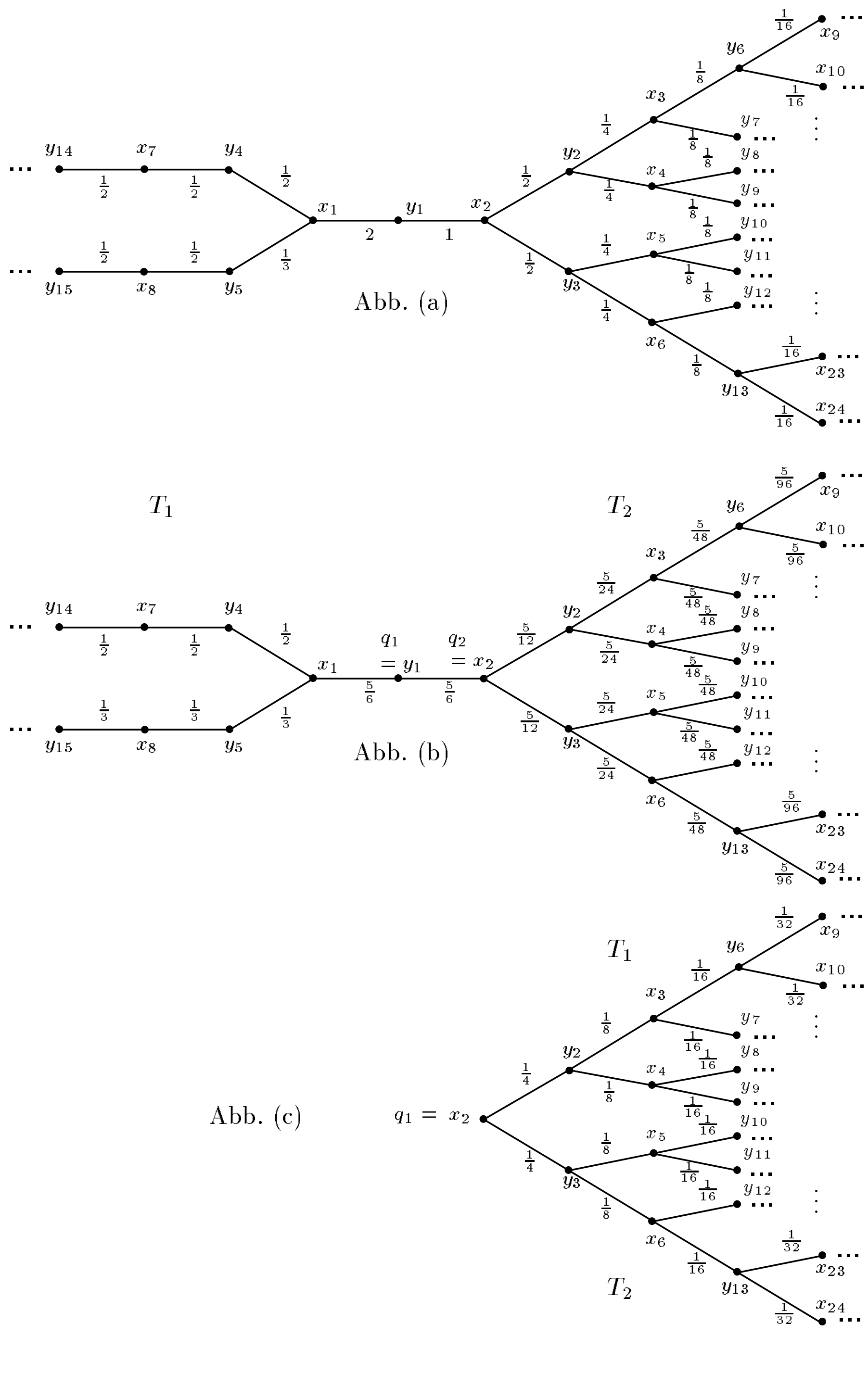

Abbildung 2.3: $G(P)$ (in (a)) und zwei Teilgraphen $H_1 \leq G(P)$ (in (b)), $H_2 \leq G(P)$ (in (c))

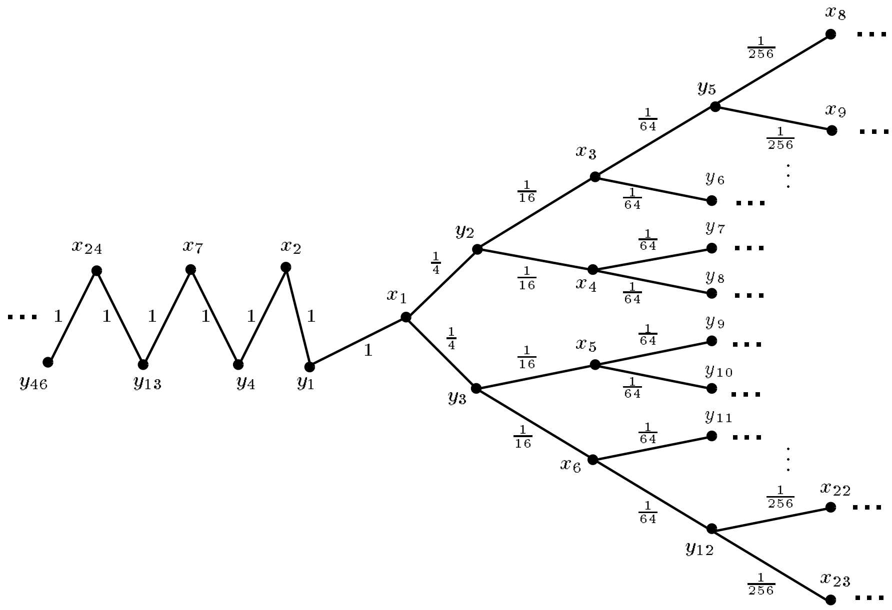

Abbildung 2.4: $G(P)$

In Abbildung 2.4 erkennt man, daß $G(P) = (V, E, w)$ keinen Kreis hat. Außerdem hat $G(P)$ für kein $\epsilon > 0$ einen ϵ-Doppelbaum: Nimmt man an, es gibt $\epsilon > 0$, so daß $G(P)$ einen ϵ-Doppelbaum besitzt, so folgt nach Definition 2.3.7 und Lemma 2.3.4, daß es eine Kante $e = \{q_1, q_2\} \in E$ gibt, so daß $(V, E \setminus \{e\})$ zwei Zusammenhangskomponenten T_1, T_2 hat mit $\sum_{e \in E(T_\mu)} w(e) = \infty$ für $\mu = 1, 2$. Entfernt man aus $G(P)$ eine Kante, so liegt in genau einer der entstehenden Zusammenhangskomponenten T_1 und T_2 ein Subgraph des Weges $(x_1, y_1, x_2, \ldots)$. Dies sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit für T_1 der Fall. Enthält dann $E(T_2)$ noch $n \in \mathbb{N}_0$ Kanten e mit $w(e) = 1$, so gilt $\sum_{e \in E(T_2)} w(e) \leq n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{4^k} < \infty$. Also ist $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}(P)))$ nach Satz 2.4.3.

Als eine weitere Anwendung von Satz 2.4.3 soll jetzt im folgenden Satz 2.4.11 gezeigt werden, daß die Einträge einer extremalen Matrix in der von den Randverteilungen erzeugten additiven Untergruppe von $\mathbb{R}$ liegen, sofern diese abgeschlossen ist. Das folgende Korollar 2.4.12 umfaßt die von Kendall (siehe [8]) und Isbell (siehe [5]) bewiesene Verallgemeinerung von Satz 2.2.10. Zunächst ein paar Vorbereitungen:

Lemma 2.4.9. *Ist $\mathcal{G}$ eine abgeschlossene additive Untergruppe von $\mathbb{R}$, so ist $\mathcal{G} = \mathbb{R}$, oder es gibt $t \in \mathbb{R}_0^+$, so daß $\mathcal{G} = t\mathbb{Z}$.*

Beweis. Fall 1: $\mathcal{G}$ hat einen Häufungspunkt c. Dann gibt es eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{G} \setminus \{c\}$ mit $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, das heißt $\lim_{n\to\infty} (c_n - c) = 0$. Da $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ 0 \neq c_n - c \in \mathcal{G}$ und

$$\forall_{g\in\mathcal{G}}\ \{zg : z \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{G},$$

muß $\mathcal{G}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegen. Da $\mathcal{G}$ abgeschlossen ist, folgt $\mathcal{G} = \mathbb{R}$.

Fall 2: $\mathcal{G}$ hat keinen Häufungspunkt. Dann gilt $\underset{\tilde{t}>0}{\exists} \underset{\substack{g,h\in\mathcal{G}\\ g\neq h}}{\forall} |g-h| \geq \tilde{t}$ (denn sonst wäre 0 ein Häufungspunkt von $\mathcal{G}$). Es sei $t := \sup\left\{\tilde{t} : \underset{\substack{g,h\in\mathcal{G}\\ g\neq h}}{\forall} |g-h| \geq \tilde{t}\right\}$.

$t \in \mathcal{G}$: Andernfalls wäre $\underset{\substack{g,h\in\mathcal{G}\\ g\neq h}}{\forall} |g-h| > t$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{G}$ könnte es auch keine Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{G}$ geben mit $\lim_{n\to\infty} |g_n - h_n| = t$. Es gäbe also $t' > t$, so daß $\underset{\substack{g,h\in\mathcal{G}\\ g\neq h}}{\forall} |g-h| \geq t'$ im Widerspruch zur Definition von t.

$\mathcal{G} = t\mathbb{Z}$: Es ist nur noch „$\subseteq$" zu zeigen. Wäre $g \in \mathcal{G} \setminus t\mathbb{Z}$, so wäre $t > \operatorname{dist}(g, t\mathbb{Z}) \in \mathcal{G}$ im Widerspruch zur Definition von t. ■

Lemma 2.4.10. *Es sei $\mathcal{G} := t\mathbb{Z}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$. Ist dann für $p \in \mathbb{R}$ $\operatorname{di}(p) := \operatorname{dist}(p, \mathcal{G})$, so gilt:*

(a) *Für alle $p \in \mathbb{R}$ ist $\operatorname{di}(p) = \operatorname{di}(-p)$.*

(b) *Für jede reelle Folge $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $S := \sum_{i=1}^{\infty} p_i \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{di}(S) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{di}(p_i)$.*

Beweis. (a) ist klar.
(b) Zunächst seien $p, q \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann ist

(2.34)
$$\begin{aligned}\operatorname{di}(p+q) &= \inf_{g\in\mathcal{G}}\{|p+q-g|\} = \inf_{g,h\in\mathcal{G}}\{|p+q-g-h|\} \leq \inf_{g,h\in\mathcal{G}}\{|p-g|+|q-h|\}\\ &= \inf_{g\in\mathcal{G}}\{|p-g|\} + \inf_{h\in\mathcal{G}}\{|q-h|\} = \operatorname{di}(p) + \operatorname{di}(q).\end{aligned}$$

Nun folgt $\operatorname{di}(S) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{di}(p_i)$ aus der Stetigkeit von di. ■

Satz 2.4.11. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem mit*

$$\#I_1, \#I_2 \leq \omega \quad \textit{oder} \quad \#I_{1,nt} = \#I_{2,nt}.$$

Ist $\mathcal{G} := \mathcal{G}(\mathcal{I})$ abgeschlossen, so gilt

$$P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) \quad \Rightarrow \quad \{p_{i,j} : (i,j) \in I_1 \times I_2\} \subseteq \mathcal{G}. \tag{2.35}$$

Beweis. Wegen Lemma 2.4.9 kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $\mathcal{G} = t\mathbb{Z}$ für ein $t \in \mathbb{R}^+$. Zunächst wird der Fall $\#I_1 = \#I_2 = \omega$ behandelt. Sei $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Angenommen, es gibt $(i_0, j_0) \in I_1 \times I_2$ mit $p_{i_0,j_0} \notin \mathcal{G}$. Es wird gezeigt, daß

$$P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})).$$

Falls $G(P)$ einen Kreis hat, folgt das wegen Satz 2.4.3. Man kann also annehmen, daß $G(P) = (V, E, w)$ kreisfrei ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß $G(P)$ einen ϵ-Doppelbaum B hat (womit dann wieder wegen Satz 2.4.3 alles gezeigt ist). Die Konstruktion des ϵ-Doppelbaumes erfolgt mit der gleichen Methode wie im „$\Leftarrow$"-Teil des Beweises von Satz 2.4.3.

Behauptung 1. Ist $(i,j) \in I_1 \times I_2$, so gilt $\sum_{\mu \in I_1 \setminus \{i\}} \mathrm{di}(p_{\mu,j}) \geq \mathrm{di}(p_{i,j})$ und

$$\sum_{\nu \in I_2 \setminus \{j\}} \mathrm{di}(p_{i,\nu}) \geq \mathrm{di}(p_{i,j})$$

(zur Definition von di( ) siehe Lemma 2.4.10).

Beweis. Es gilt

$$\mathrm{di}(p_{i,j}) = \mathrm{di}(\sum_{\mu \in I_1} p_{\mu,j} - \sum_{\mu \in I_1 \setminus \{i\}} p_{\mu,j}) \overset{(2.4.10\ (a),\ (b))}{\leq} \sum_{\mu \in I_1 \setminus \{i\}} \mathrm{di}(p_{\mu,j}), \tag{2.36}$$

da $\sum_{\mu \in I_1} p_{\mu,j} \in \mathcal{G}$. $\sum_{\nu \in I_2 \setminus \{j\}} \mathrm{di}(p_{i,\nu}) \geq \mathrm{di}(p_{i,j})$ folgt ganz analog. ▲

Setze $\epsilon := \frac{1}{2}\,\mathrm{di}(p_{i_0,j_0})$, $q_1 := x_{i_0}$, $q_2 := y_{j_0}$. Damit bekommt man einen Doppelbaum $B' = (\mathrm{Zhk}_{G(P)}(x_{i_0}), T_1', T_2')$,

$$\begin{aligned} T_1' &= (V_{T_1'}, E_{T_1'}, q_1) := \mathrm{Zhk}_{G(P)-\{\{q_1,q_2\}\}}(q_1), \\ T_2' &= (V_{T_2'}, E_{T_2'}, q_2) := \mathrm{Zhk}_{G(P)-\{\{q_1,q_2\}\}}(q_2). \end{aligned}$$

Nun zur Konstruktion von $B = (G, T_1, T_2) \leq B'$. Zunächst wird

$$T_1 = (V_{T_1}, E_{T_1}, q_1) \leq T_1'$$

und ein ϵ-Fluß f_1 auf T_1 konstruiert, und zwar werden dazu Mengen $L_n'(q_1) \subseteq L_n(q_1)$ und $E_n'(q_1) \subseteq E_n(q_1)$ definiert. Die Definition von $L_n'(q_1)$, $E_n'(q_1)$ erfolgt rekursiv unter Benutzung von Behauptung 1 aus Lemma 2.3.5. Dazu setze im ersten Schritt $I := \{j \in I_2 \setminus \{j_0\} : p_{i_0,j} \notin \mathcal{G}\}$, $\mathcal{E} := (\mathrm{di}(p_{i_0,j}))_{j \in I}$, $\tilde{\epsilon} := \sum_{j \in I} \mathrm{di}(p_{i_0,j})$, $\tilde{\delta} := \epsilon$ (beachte, daß $\tilde{\epsilon} \geq 2\tilde{\delta} > \tilde{\delta}$ wegen obiger Behauptung 1). Behauptung 1 von Lemma 2.3.5 liefert dann I' und $\mathcal{D}$. Setze $N(q_1) := \{y_j : j \in I'\}$, $L_0'(q_1) := \{q_1\}$, $L_1'(q_1) := N(q_1)$, $E_1'(q_1) := \{\{q_1, y_j\} \in E_1(q_1) : y_j \in N(q_1)\}$, $f_1\{q_1, y_j\} := d_j$ für alle $y_j \in N(q_1)$. Dann ist $\sum_{y_j \in N(q_1)} f_1\{q_1, y_j\} = \epsilon$ und

$$\underset{y_j \in N(q_1)}{\forall} f_1\{q_1, y_j\} < \mathrm{di}(p_{i_0,j}) \leq p_{i_0,j} = w\{q_1, y_j\}.$$

Nun sei $n \geq 1$ ungerade, und für alle $m \leq n$ seien

$$L_m'(q_1) \subseteq L_m(q_1), \qquad E_m'(q_1) \subseteq E_m(q_1),$$

$$0 < f_1\restriction_{E_m'(q_1)} < (\mathrm{di} \circ w)\restriction_{E_m'(q_1)} \leq \min\{t, w\restriction_{E_m'(q_1)}\},$$

bereits konstruiert, so daß

$$\underset{v \in L_m'(q_1),\, m \neq 0}{\forall} v^- \in L_{m-1}'(q_1).$$

Sei $y_{j_n} \in L_n'(q_1)$, $x_{j_n} := y_{j_n}^-$. Dann ist

$$0 < f_1\{x_{i_n}, y_{j_n}\} < \mathrm{di}(p_{i_n,j_n}) \leq \min\{t, w\{x_{i_n}, y_{j_n}\}\}.$$

Zur Anwendung von Behauptung 1 von Lemma 2.3.5 setze diesmal

$$I := \{i \in I_1 \setminus \{i_n\} : p_{i,j_n} \notin \mathcal{G}\},$$

$\mathcal{E} := (\mathrm{di}(p_{i,j_n}))_{i \in I}$, $\tilde{\epsilon} := \sum_{i \in I} \mathrm{di}(p_{i,j_n})$, $\tilde{\delta} := f_1\{x_{i_n}, y_{j_n}\}$ (beachte, daß

$$\tilde{\delta} = f_1\{x_{i_n}, y_{j_n}\} < \mathrm{di}(p_{i_n,j_n}) \leq \tilde{\epsilon}$$

wegen obiger Behauptung 1). Behauptung 1 von Lemma 2.3.5 liefert dann wieder I' und $\mathcal{D}$. Setze $N(y_{j_n}) := \{x_i : i \in I'\}$, $f_1\{x_i, y_{j_n}\} := d_i$ für alle $x_i \in N(y_{j_n})$. Nach Lemma 2.3.2 (b) sind alle $N(y)$, $y \in L'_n(q_1)$ disjunkt. Setze

$$L'_{n+1}(q_1) := \dot{\bigcup}_{y \in L'_n(q_1)} N(y),$$

$E'_{n+1}(q_1) := \{\{x, y\} \in E_{n+1} : x \in L'_{n+1}(q_1),\ y \in L'_n(q_1)\}$. Dann ist

$$\underset{y \in L'_n(q_1)}{\forall} \sum_{x \in N(y)} f_1\{x, y\} = f_1\{y, y^-\}.$$

Wie im Beweis von Satz 2.4.3 erfolgen die Definitionen von $L'_{n+1}(q_1)$ und $E'_{n+1}(q_1)$ für gerade $n \geq 1$ ganz analog. Setze noch $V_{T_1} := \dot{\bigcup}_{n=0}^{\infty} L'_n(q_1)$, $E_{T_1} := \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} E'_n(q_1)$. Da f_1, wie schon während der Konstruktion gezeigt, die Bedingung (2.27) erfüllt, ist f_1 ein ϵ-Fluß auf T_1.

Die Konstruktion von T_2 und f_2 erfolgt genau in der gleichen Weise wie die von T_1 und f_1. Sei schließlich $\hat{V} := V_{T_1} \dot{\cup} V_{T_2}$, $\hat{E} := E_{T_1} \dot{\cup} E_{T_2} \dot{\cup} \{\{q_1, q_2\}\}$. Dann ist B mit $G = (\hat{V}, \hat{E}, w\restriction_{\hat{E}})$ nach Definition 2.3.7 ein ϵ-Doppelbaum . Damit ist (2.35) bewiesen.

Den Fall, daß $\min\{\#I_1, \#I_2\} < \omega$, kann man auf den Fall $\#I_1 = \#I_2 = \omega$ zurückführen, indem man abzählbar viele Nullzeilen beziehungsweise Nullspalten hinzufügt. Bleibt der Fall $\#I_{1,nt} = \#I_{2,nt} > \omega$. Erneut nehme man an, daß es

$$(i_0, j_0) \in I_1 \times I_2$$

gibt mit $p_{i_0,j_0} \notin \mathcal{G}$. Wieder wird gezeigt, daß $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. Betrachte $G(P)$. Es sei $Z := \mathrm{Zhk}(x_{i_0})$ und $I_{1,Z} := \{i \in I_1 : x_i \in V(Z)\}$, $I_{2,Z} := \{j \in I_2 : y_j \in V(Z)\}$. Wie im Beweis von Satz 2.1.19 gesehen, sind $I_{1,Z}$ und $I_{2,Z}$ abzählbar und nach Definition von Z ist $\mathcal{I}(P\restriction_{I_{1,Z} \times I_{2,Z}}) = (I_{1,Z}, I_{2,Z}, r\restriction_{I_{1,Z}}, s\restriction_{I_{2,Z}})$. Da der Beweis für den Fall $\max\{\#I_1, \#I_2\} \leq \omega$ schon geführt wurde, ist $P\restriction_{I_{1,Z} \times I_{2,Z}} \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}(P\restriction_{I_{1,Z} \times I_{2,Z}})))$. Also ist nach Satz 2.1.19 (b) $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. ■

Korollar 2.4.12. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem mit $\#I_1 = \#I_2 = \alpha$ (α beliebige Kardinalzahl) und $\underset{(i,j) \in I_1 \times I_2}{\forall} r_i = s_j = 1$. Dann ist $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = \mathcal{M}_p(I_1, I_2)$.*

Beweis. „$\supseteq$“ folgt wieder, da $0, 1$ die Extremalpunkte des Intervalls $[0, 1]$ sind.
„$\subseteq$“: Das folgt sofort aus Satz 2.4.11, denn $\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen, und $p_{i,j} \in \mathbb{Z}$ impliziert $p_{i,j} \in \{0, 1\}$ wegen der Voraussetzung. ■

Ist die von den Randverteilungen erzeugte Gruppe $\mathcal{G}$ nicht abgeschlossen, so kann es vorkommen, daß $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ und dennoch $p_{i,j} \notin \mathcal{G}$ (sogar für alle $(i,j) \in I_1 \times I_2$). Um das zu sehen, dient das folgende Beispiel 2.4.13.

Beispiel 2.4.13. Es sei

$$P := \begin{pmatrix} 1-a_1 & a_2 & & & & & \\ a_2 & & 1-a_3 & & & & \\ & 1-a_3 & & a_4 & & & \\ & & a_4 & & 1-a_5 & & \\ & & & 1-a_5 & & & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

$\mathcal{I} := \mathcal{I}(P)$. Dabei sei für $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n := (10^n\sqrt{2} - \lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor) \cdot 10^{-n} \tag{2.38}$$

($\sqrt{2}$ könnte dabei durch jede andere Zahl aus $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ ersetzt werden). Die a_n sind dann alle irrational und positiv. $\langle\{r_i : i \in I_1\} \cup \{s_j : j \in I_2\}\rangle \subseteq \mathbb{Q}$, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} -a_n + a_{n+1} &= -(10^n\sqrt{2} - \lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor) \cdot 10^{-n} + (10^{n+1}\sqrt{2} - \lfloor 10^{n+1}\sqrt{2}\rfloor) \cdot 10^{-n-1} \\ &= (\lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor - \frac{1}{10}\lfloor 10^{n+1}\sqrt{2}\rfloor)10^{-n} \in \mathbb{Q} \end{aligned} \tag{2.39}$$

und damit auch $a_n - a_{n+1} \in \mathbb{Q}$, das heißt $\underset{i\in I_1}{\forall}\ r_i \in \mathbb{Q}$, $\underset{j\in I_2}{\forall}\ s_j \in \mathbb{Q}$. Dennoch ist $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ nach Lemma 2.1.13 (b), denn für eine Matrix $E \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ mit $P \pm E \geq 0$, deren Linien sich alle zu Null summieren, gilt $E = \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & & \\ f_1 & & e_2 & \\ & f_2 & & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$

und weiterhin

$$\cdots - e_3 = f_2 = -e_1 = e_0 = -f_1 = e_2 = -f_3 = \cdots \leq \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0,$$

das heißt $E = 0$.

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Umkehrung von Satz 2.4.11 nicht gilt.

Beispiel 2.4.14. Betrachte das Randsystem $\mathcal{I} := (\{1,2\},\{1,2\},(4,5),(5,4))$ und die Matrix $P := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Dann ist $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$, und $G(P)$ hat einen Kreis. Also ist $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. Andrerseits ist aber $\{1,2,3\} \subseteq \langle\{4,5\}\rangle = \mathbb{Z}$.

Lemma 2.4.15. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Gilt dann*

$$(\tilde{P} \in \mathcal{D}(\mathcal{I}) \textit{ und } \operatorname{supp}(\tilde{P}) \subseteq \operatorname{supp}(P)) \quad\Rightarrow\quad \tilde{P} = P, \tag{2.40}$$

so ist $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.

Beweis. Angenommen $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. Dann gibt es nach Lemma 2.1.13 (b) eine Matrix $E \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2)$, so daß sich alle Linien von E zu Null summieren und $P \pm E \geq 0$. Also ist $P \neq P \pm E \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ und $\operatorname{supp}(P \pm E) \subseteq \operatorname{supp}(P)$. ■

Satz 2.4.16. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem mit $\sum_{i\in I_1} r_i = \sum_{j\in I_2} s_j < \infty$ und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Dann gilt*

$$(\tilde{P} \in \mathcal{D}(\mathcal{I}) \text{ und } \operatorname{supp}(\tilde{P}) \subseteq \operatorname{supp}(P)) \quad \Rightarrow \quad \tilde{P} = P \tag{2.41}$$

genau dann, wenn $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.

Beweis. Wegen Lemma 2.4.15 ist nur „$\Leftarrow$" zu zeigen. Dazu nehme man an, daß es $\tilde{P} \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ gibt mit $\tilde{P} \neq P$ und $\operatorname{supp}(\tilde{P}) \subseteq \operatorname{supp}(P)$. Setze $T := P - \tilde{P}$. Wegen $P, \tilde{P} \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ addieren sich alle Linien von T zu Null. Da $\tilde{P} \neq P$ gilt, gibt es ein Indexpaar $(i_0, j_0) \in I_1 \times I_2$ mit $t_{i_0,j_0} > 0$. Wegen

$$\underset{(i,j)\in I_1\times I_2}{\forall} (p_{i,j} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{i,j} = 0)$$

gilt mit $G := G(P) = (V, E, w)$ und $\tilde{G} := G(T) = (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{w})$, daß $(\tilde{V}, \tilde{E}) \leq (V, E)$. Hat dann $\tilde{G}$ einen Kreis, so auch G, und es folgt $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. Man kann also annehmen, daß $\tilde{G}$ kreisfrei ist. Dann folgt wie im „$\Leftarrow$"-Teil des Beweises von Satz 2.4.3, daß $G(|T|)$ einen t_{i_0,j_0}-Doppelbaum hat. Daraus folgt nach Lemma 2.4.4, daß

$$\sum_{(i,j)\in I_1\times I_2} |t_{i,j}| = \infty,$$

was wegen

$$|t_{i,j}| \leq p_{i,j} + \tilde{p}_{i,j}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\sum_{i\in I_1} r_i = \sum_{j\in I_2} s_j < \infty$ steht. ∎

Der Beweis ist analog zu dem von Proposition 1 in [4], nur daß dort die Voraussetzung $\sum_{i\in I_1} r_i = \sum_{j\in I_2} s_j < \infty$ vergessen wurde. Das folgende Beispiel 2.4.17 zeigt, daß diese Voraussetzung wesentlich ist.

Beispiel 2.4.17. Sei P die Matrix aus Beispiel 2.4.13, $\mathcal{I} := \mathcal{I}(P)$ und

$$E := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2} & & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

Da für die nach (2.38) definierten a_n gilt $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ 0 < a_n < \frac{1}{10}$, ist $P + E \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Dann ist $\operatorname{supp}(P + E) = \operatorname{supp}(P)$, $P \neq P + E$ und dennoch, wie in Beispiel 2.4.13 gezeigt, $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ (es ist $P - E \notin \mathcal{D}(\mathcal{I})$!).

Aus Satz 2.4.16 ergibt sich

Korollar 2.4.18. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Gilt für jede Zusammenhangskomponente H von $G(P)$, daß $\sum_{x_i\in V(H)} r_i < \infty$, so ist*

$$(\tilde{P} \in \mathcal{D}(\mathcal{I}) \text{ und } \operatorname{supp}(\tilde{P}) \subseteq \operatorname{supp}(P)) \quad \Rightarrow \quad \tilde{P} = P \tag{2.43}$$

genau dann richtig, wenn $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.

Beweis. Wieder ist wegen Lemma 2.4.15 nur „$\Leftarrow$" zu zeigen. Angenommen, es gibt $\tilde{P} \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ mit $\operatorname{supp}(\tilde{P}) \subseteq \operatorname{supp}(P)$ und $P \neq \tilde{P}$. Wähle $(i_0, j_0) \in I_1 \times I_2$ mit $p_{i_0,j_0} \neq \tilde{p}_{i_0,j_0}$. Definiere dann $H := \mathrm{Zhk}_{G(P)}(x_{i_0})$ und

$$I_{1,H} := \{i \in I_1 : x_i \in V(H)\}, \qquad I_{2,H} := \{j \in I_2 : y_j \in V(H)\}.$$

Nach dem Beweis von Satz 2.1.19, sind $I_{1,H}$ und $I_{2,H}$ abzählbar, und nach Definition von H ist $\tilde{\mathcal{I}} := \mathcal{I}(P\restriction_{I_{1,H}\times I_{2,H}}) = (I_{1,H}, I_{2,H}, r\restriction_{I_{1,H}}, s\restriction_{I_{2,H}})$. Weiterhin sind

$$P\restriction_{I_{1,H}\times I_{2,H}}, \tilde{P}\restriction_{I_{1,H}\times I_{2,H}} \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}}),$$

$\operatorname{supp}(P\restriction_{I_{1,H}\times I_{2,H}}) \supseteq \operatorname{supp}(\tilde{P}\restriction_{I_{1,H}\times I_{2,H}})$ sowie $P\restriction_{I_{1,H}\times I_{2,H}} \neq \tilde{P}\restriction_{I_{1,H}\times I_{2,H}}$. Aus der Voraussetzung des Korollars und Satz 2.4.16 folgt damit $P\restriction_{I_{1,H}\times I_{2,H}} \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}}))$. Nach Satz 2.1.14 (b) ist also auch $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. ∎

Der folgende Satz 2.4.23 gibt eine graphentheoretische Charakterisierung der Extremalpunkte von $\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$. Dazu sind zwei weitere technische Definitionen (2.4.19 und 2.4.21) notwendig.

Definition 2.4.19. Sei $G = (V, E, w)$ ein gewichteter Graph und $\epsilon > 0$. Ein *unendlicher ϵ-Weg* W ist ein Weg $W \leq G$, so daß $w\restriction_{E(W)} \geq \epsilon$ und $l(W) = \infty$.

Bemerkung 2.4.20. Sei $G = (V, E, w)$ ein gewichteter Graph, $\epsilon > 0$ und $W \leq G$ ein unendlicher ϵ-Weg. Dann gilt $\sum_{e\in E(W)} w(e) \geq \infty \cdot \epsilon = \infty$, das heißt, insbesondere ist $\sum_{e\in E} w(e) = \infty$.

Definition 2.4.21. Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\leq$-Randsystem, $P \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$ und

$$G(P) = (V, E, w).$$

Setze

$$V_< = V_<(P) := \{x_i \in V : \sum_{j\in I_2} p_{i,j} < r_i\} \,\dot\cup\, \{y_j \in V : \sum_{i\in I_1} p_{i,j} < s_j\}.$$

Lemma 2.4.22. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\leq$-Randsystem, $P \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$,*

$$G := G(P) = (V, E, w).$$

Gibt es eine Zusammenhangskomponente H von G mit $\#(V(H) \cap V_<) \geq 2$, so ist $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$.

Beweis. Sei also H eine Zusammenhangskomponente von G und

$$x_{i_0}, y_{j_0} \in V(H) \cap V_<$$

(die Fälle $x_{i_1}, x_{i_2} \in V(H) \cap V_<$, $i_1 \neq i_2$ und $y_{j_1}, y_{j_2} \in V(H) \cap V_<$, $j_1 \neq j_2$ lassen sich ganz analog behandeln). Da H zusammenhängend ist, gibt es einen $x_{i_0}y_{j_0}$-Weg $W = (x_{i_1}, y_{j_1}, \ldots, x_{i_k}, y_{j_k})$. Es sei

(2.44)
$$\epsilon := \min\{r_{i_0} - \sum_{j\in I_2} p_{i_0,j}, s_{j_0} - \sum_{i\in I_1} p_{i,j_0}, p_{i_1,j_1}, p_{i_2,j_1}, p_{i_2,j_2}, \ldots, p_{i_k,j_{k-1}}, p_{i_k,j_k}\}.$$

Nun definiere eine Matrix $E = (e_{i,j})_{(i,j)\in I_1\times I_2} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2)$ durch

$$e_{i,j} := \begin{cases} \epsilon & \text{für } (i,j) = (i_\mu, j_\mu), \quad 1 \leq \mu \leq k, \\ -\epsilon & \text{für } (i,j) = (i_\mu, j_{\mu-1}), \quad 2 \leq \mu \leq k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.45}$$

Dann erfüllt E die Bedingungen 2.8 und 2.9 aus Lemma 2.1.13 (a). Daher ist $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$. ∎

Satz 2.4.23. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\leq$-Randsystem mit*

$$\#I_1, \#I_2 \leq \omega,$$

$P \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$, $G := G(P) = (V, E, w)$. Dann gilt $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$ genau dann, wenn die folgenden Bedingungen (i), (ii) und (iii) gelten.

(i) *G ist ein Wald und hat für kein $\epsilon > 0$ einen ϵ-Doppelbaum.*

(ii) *Für alle Zusammenhangskomponenten H von G ist $\#(V(H) \cap V_<) \leq 1$.*

(iii) *Für alle Zusammenhangskomponenten H von G gilt, daß H nur für*

$$V(H) \cap V_< = \emptyset$$

für ein $\epsilon > 0$ einen unendlichen ϵ-Weg $W \leq H$ haben kann.

Beweis. „$\Rightarrow$": Ist (i) nicht erfüllt und $\tilde{\mathcal{I}} := \mathcal{I}(P)$, so ist nach Satz 2.4.3 $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}}))$, das heißt $P = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2$ mit $P \neq P_1, P_2 \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}})$. Da dann auch $P_1, P_2 \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$, ist $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$. Man kann jetzt also annehmen, daß (i) erfüllt ist. Ist (ii) nicht erfüllt, so ist $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$ nach Lemma 2.4.22. Ab jetzt sei auch (ii) erfüllt. Ist nun (iii) nicht erfüllt, so gibt es eine Zusammenhangskomponente H von G mit $V(H) \cap V_< \neq \emptyset$ und ein $\tilde{\epsilon} > 0$, so daß H einen unendlichen $\tilde{\epsilon}$-Weg $\tilde{W} = (x_{\tilde{i}_1}, y_{\tilde{j}_1}, \dots)$ hat. Gibt es $x_{\tilde{i}_0} \in V(H) \cap V_<$, so sei $U := (x_{\tilde{i}_0}, y_{\tilde{j}_0}, \dots, x_{\tilde{i}_1})$ ein $x_{\tilde{i}_0}x_{\tilde{i}_1}$-Weg. Mit

$$\epsilon := \min\{\tilde{\epsilon}, \min\{w(e) : e \in E(U)\}$$

ist dann

$$W = (x_{i_0}, y_{j_0}, \dots) := (x_{\tilde{i}_0}, y_{\tilde{j}_0}, \dots, x_{\tilde{i}_1}, y_{\tilde{j}_1}, \dots)$$

ein unendlicher ϵ-Weg in H. Sei nun

$$\delta := \inf\{r_{i_0} - \sum_{j \in I_2} p_{i_0,j}, p_{i_0,j_0}, p_{i_1,j_0}, \dots\}.$$

Dann ist $\delta > 0$. Setze $T = (t_{i,j})_{(i,j) \in I_1 \times I_2}$ mit

$$t_{i,j} := \begin{cases} \delta & \text{für } (i,j) = (i_k, j_k),\ k \in \mathbb{N}_0, \\ -\delta & \text{für } (i,j) = (i_{k+1}, j_k),\ k \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.46}$$

Damit ist dann $P \pm T \geq 0$, $\underset{j \in I_2}{\forall}\ \sum_{i \in I_1} t_{i,j} = 0$ und

$$\sum_{j \in I_2} t_{i,j} = \begin{cases} \delta \leq r_{i_0} - \sum_{j \in I_2} p_{i_0,j} & \text{für } i = i_0, \\ 0 & \text{für } i \in I_1 \setminus \{i_0\}. \end{cases} \tag{2.47}$$

Nach Lemma 2.1.13 (a) ist dann $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$. Gibt es nur ein $y_{\tilde{j}_0} \in V(H) \cap V_<$, so folgt $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$ ganz analog.

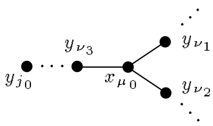

Abbildung 2.5

„$\Leftarrow$": Seien die Bedingungen (i), (ii), (iii) erfüllt und

$$P = \tfrac{1}{2}P_1 + \tfrac{1}{2}P_2, \qquad P_1, P_2 \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I}).$$

Setze $T := P_1 - P = P - P_2$. Dann ist $\underset{(i,j)\in I_1\times I_2}{\forall} |t_{i,j}| \leq p_{i,j}$. Ziel ist es, zu zeigen, daß $T = 0$. Wegen $|t_{i,j}| \leq p_{i,j}$ ist $(V(G(|T|)), E(G(|T|))) \leq (V, E)$. Also ist $G(|T|)$ wegen (i) ein Wald und hat für kein $\epsilon > 0$ einen ϵ-Doppelbaum. Nun sei H eine Zusammenhangskomponente von $G(|T|)$ und

$$V_{\neq 0} := \{x_i \in V(H) : \sum_{j\in I_2} t_{i,j} \neq 0\} \cup \{y_j \in V(H) : \sum_{i\in I_1} t_{i,j} \neq 0\}. \tag{2.48}$$

Wegen $P \pm T \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$ ist $V_{\neq 0} \subseteq V_<$. Nach (ii) ist also $\#V_{\neq 0} \leq 1$. Angenommen, es gilt $\#V_{\neq 0} = 1$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $V_{\neq 0} = \{x_{i_0}\}$, (der Fall $V_{\neq 0} = \{y_{j_0}\}$ wird analog behandelt). Es gibt dann $j_0 \in I_2$ mit $t_{i_0,j_0} \neq 0$. Entfernt man aus H die Kante $\{x_{i_0}, y_{j_0}\}$, so entstehen, da H ein Baum ist, zwei Zusammenhangskomponenten. B sei diejenige mit $y_{j_0} \in V(B)$.

Behauptung 1. $\underset{v\in V(B)}{\forall} d_B(v) \leq 2$.

Beweis. Angenommen, es gibt $x_{\mu_0} \in V(B)$ mit $d_B(x_{\mu_0}) \geq 3$. Dann gibt es

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in I_2$$

mit $t_{\mu_0,\nu_1}, t_{\mu_0,\nu_2}, t_{\mu_0,\nu_3} \neq 0$. Nach eventuellem Vertauschen von ν_1, ν_2, ν_3 kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$d(y_{j_0}, y_{\nu_3}) < d(y_{j_0}, y_{\nu_1}), d(y_{j_0}, y_{\nu_2})$$

und $|t_{\mu_0,\nu_1}| \leq |t_{\mu_0,\nu_2}|$ (siehe Abbildung 2.5). Setze

$$\delta := -\frac{t_{\mu_0,\nu_1}}{t_{\mu_0,\nu_2}},$$

das heißt $0 < |\delta| \leq 1$. Entfernt man die Ecke x_{μ_0} aus B, so entstehen mehrere Zusammenhangskomponenten. Sei $B_1 := \mathrm{Zhk}_{B-x_{\mu_0}}(y_{\nu_1})$, $B_2 := \mathrm{Zhk}_{B-x_{\mu_0}}(y_{\nu_2})$. Definiere eine Matrix $S = (s_{i,j})_{(i,j)\in I_1\times I_2}$ durch

$$s_{i,j} := \begin{cases} t_{i,j} & \text{für } \{x_i, y_j\} \in E(B_1) \cup \{x_{\mu_0}, y_{\nu_1}\}, \\ \delta t_{i,j} & \text{für } \{x_i, y_j\} \in E(B_2) \cup \{x_{\mu_0}, y_{\nu_2}\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.49}$$

Dann ist $\underset{(i,j)\in I_1\times I_2}{\forall} |s_{i,j}| \le |t_{i,j}|$, und es gilt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\in I_2} s_{\mu_0,j} = t_{\mu_0,\nu_1} + \delta t_{\mu_0,\nu_2} = 0, \\
&\underset{x_i\in V(B_1)}{\forall} \sum_{j\in I_2} s_{i,j} = \sum_{j\in I_2} t_{i,j} = 0, \quad \underset{y_j\in V(B_1)}{\forall} \sum_{i\in I_1} s_{i,j} = \sum_{i\in I_1} t_{i,j} = 0, \\
&\underset{x_i\in V(B_2)}{\forall} \sum_{j\in I_2} s_{i,j} = \sum_{j\in I_2} \delta t_{i,j} = 0, \quad \underset{y_j\in V(B_2)}{\forall} \sum_{i\in I_1} s_{i,j} = \sum_{i\in I_1} \delta t_{i,j} = 0.
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

S erfüllt damit die Bedingungen von Lemma 2.1.13 b), das heißt $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}(P)))$, was nach Satz 2.4.3 im Widerspruch dazu steht, daß G (i) erfüllt. Bleibt noch zu bemerken, daß der Fall $y_{\nu_0} \in V(B)$ analog behandelt werden kann. ▲

Behauptung 1 besagt, daß $B = (y_{j_0}, x_{i_1}, y_{i_1}, \dots)$ ein Weg ist. Also muß

$$t_{i_0,j_0} = -t_{i_1,j_0} = t_{i_1,j_1} = \dots$$

sein, das heißt, B ist ein unendlicher t_{i_0,j_0}-Weg im Widerspruch zu (iii). Damit ist gezeigt, daß $V_{\neq 0} = \emptyset$ gelten muß. Da weiterhin H eine beliebige Zusammenhangskomponente von $G(|T|)$ war, folgt, daß sich alle Linien von T zu Null summieren. Wäre $T \neq 0$, so wäre nach Lemma 2.1.13 (b) wieder $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}(P)))$. ■

Lemma 2.4.24. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\le$-Randsystem mit*

$$\min\{\textstyle\sum_{i\in I_1} r_i, \sum_{j\in I_2} s_j\} < \infty,$$

$P \in \mathcal{D}(\le \mathcal{I})$, $G := G(P) = (V, E, w)$. Dann kann es für kein $\epsilon > 0$ einen unendlichen ϵ-Weg $W \le G$ geben.

Beweis. Ist $\epsilon > 0$ und $W \le G$ ein unendlicher ϵ-Weg, so ist nach Bemerkung 2.4.20 $\min\{\sum_{i\in I_1} r_i, \sum_{j\in I_2} s_j\} \ge \sum_{(i,j)\in I_1\times I_2} p_{i,j} = \sum_{e\in E} w(e) = \infty$. ■

Korollar 2.4.25. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\le$-Randsystem mit*

$$\min\{\sum_{i\in I_1} r_i, \sum_{j\in I_2} s_j\} < \infty,$$

$P \in \mathcal{D}(\le \mathcal{I})$, $G := G(P) = (V, E, w)$. Dann ist $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\le \mathcal{I}))$ genau dann, wenn G ein Wald ist und für alle Zusammenhangskomponenten H von G gilt, daß

$$\#(V(H) \cap V_<) \le 1.$$

Beweis. Zunächst kann man wegen $\min\{\sum_{i\in I_1} r_i, \sum_{j\in I_2} s_j\} < \infty$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\#I_1, \#I_2 \le \omega$. Nach Satz 2.4.23 ist dann nur noch zu zeigen, daß für $\min\{\sum_{i\in I_1} r_i, \sum_{j\in I_2} s_j\} < \infty$ (iii) aus Satz 2.4.23 immer erfüllt ist, und das ergibt sich aus Lemma 2.4.24. ■

Das folgende Beispiel 2.4.26 liefert den einfachsten Fall einer doppelt substochastischen Matrix P bezüglich eines endlichen Randsystems, so daß $G(P)$ ein Wald, P jedoch nicht extremal ist. Wegen Satz 2.2.4 folgt daraus, daß sich Satz 1.4.1 nicht auf $\mu \in \mathcal{D}(\le m_1, \le m_2)$ verallgemeinern läßt.

Beispiel 2.4.26. Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ mit $I_1 = I_2 = \{1\}$, $r = s = (1)$, $P := (\frac{1}{2})$. Dann ist $P \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$, wegen $P = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(0)$ ist $P \notin \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$ (das ist Fall (ii) von Satz 2.4.23). $G(P)$ hat nur zwei Ecken und ist damit ein Wald.

Der folgende Satz 2.4.27 und Korollar 2.4.28 stellen die zu Satz 2.4.11 und Korollar 2.4.12 analogen Ergebnisse für doppelt substochastische Matrizen dar. Sie verallgemeinern einen Satz von Mirsky (siehe [11]).

Satz 2.4.27. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\leq$-Randsystem mit $\#I_1 = \alpha$, $\#I_2 = \beta$. Ist $\mathcal{G} := \mathcal{G}(\mathcal{I})$ abgeschlossen, so gilt*

$$P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})) \quad \Rightarrow \quad \{p_{i,j} : (i,j) \in I_1 \times I_2\} \subseteq \mathcal{G}. \tag{2.51}$$

Beweis. Nach Lemma 2.4.9 kann man wieder ohne Einschränkung annehmen, daß $\mathcal{G} = t\mathbb{Z}$ für ein $t \in \mathbb{R}^+$. Zunächst nehme man an, daß $\alpha = \beta = \omega$. Sei $P \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$ gegeben. Angenommen, es gibt $(i_0, j_0) \in I_1 \times I_2$ mit $p_{i_0,j_0} \notin \mathcal{G}$. Es soll gezeigt werden, daß dann $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$. Hat $G(P)$ einen Kreis, so folgt das aus Satz 2.4.23. Man kann also annehmen, daß $G := G(P) = (V, E, w)$ ein Wald ist. Weiterhin kann man annehmen, daß für alle Zusammenhangskomponenten H von G, $\#(V(H) \cap V_<) \leq 1$, denn andernfalls ist $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$ nach Satz 2.4.23 (ii).

Behauptung 1. Gilt $\mathcal{G}_P := \mathcal{G}(\mathcal{I}(P)) \leq \mathcal{G}$, so ist $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$.

Beweis. Wegen $\mathcal{G} = t\mathbb{Z}$ ist $\mathcal{G}_P = \tilde{t}\mathbb{Z}$, wobei $\tilde{t} \in \{kt : k \in \mathbb{N}\}$. Wegen $p_{i_0,j_0} \notin \mathcal{G}$ ist $P \notin \mathcal{M}_{\mathcal{G}_P}(I_1, I_2)$ und damit $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}(P)))$ nach Satz 2.4.11. Dann gibt es $\epsilon > 0$, so daß $G(P)$ einen ϵ-Doppelbaum hat. Wegen Satz 2.4.23 ist P also nicht in $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$. ▲

Nach Behauptung 1 gibt es eine Linie von P, deren Summe nicht in $\mathcal{G}$ liegt. Insbesondere gilt für die zu dieser Linie gehörende Zusammenhangskomponente H, daß $\#(V(H) \cap V_<) = 1$. Man kann daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $V(H) \cap V_< = \{x_{i_0}\}$ (der Fall $\{y_{j_0}\} = V(H) \cap V_<$ ist wie üblich, analog zu gewinnen). Wegen $\#(V(H) \cap V_<) = 1$ ist $\underset{x_i \in V(H) \setminus \{x_{i_0}\}}{\forall} \sum_{j \in I_2} p_{i,j} \in \mathcal{G}$ und $\underset{y_j \in V(H)}{\forall} \sum_{i \in I_1} p_{i,j} \in \mathcal{G}$. Entfernt man aus H die Kante $\{x_{i_0}, y_{j_0}\}$, so entstehen, da H ein Baum ist, zwei Zusammenhangskomponenten. Sei T diejenige mit $y_{j_0} \in V(T)$.

Behauptung 2. Ist $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$, so gilt für $i \in I_1$ mit $x_i \in V(T)$, daß

$$\#\{p_{i,\nu} : p_{i,\nu} \notin \mathcal{G}\} \leq 2$$

und für $j \in I_2$ mit $y_j \in V(T)$, daß $\#\{p_{\mu,j} : p_{\mu,j} \notin \mathcal{G}\} \leq 2$.

Beweis. Angenommen, es gibt $x_{\mu_0} \in V(T)$ mit $\#\{p_{\mu_0,\nu} : p_{\mu_0,\nu} \notin \mathcal{G}\} \geq 3$ (im Fall daß es $y_{\nu_0} \in V(T)$ mit $\#\{p_{\mu,\nu_0} : p_{\mu,\nu_0} \notin \mathcal{G}\} \geq 3$ gibt, kann man ganz analog argumentieren). Dann gibt es $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in I_2$ mit $p_{\mu_0,\nu_1}, p_{\mu_0,\nu_2}, p_{\mu_0,\nu_3} \notin \mathcal{G}$. Nach eventuellem Vertauschen von ν_1, ν_2, ν_3 kann man annehmen, daß

$$d(y_{j_0}, y_{\nu_3}) < d(y_{j_0}, y_{\nu_1}), d(y_{j_0}, y_{\nu_2}).$$

Entfernt man die Ecke x_{μ_0} aus T, so entstehen mehrere Zusammenhangskomponenten. Setze $\epsilon := \frac{1}{2}\min\{\mathrm{di}(p_{\mu_0,\nu_1}), \mathrm{di}(p_{\mu_0,\nu_2})\}$ (di( ) wie in Lemma 2.4.10), $q_1 := x_{\mu_0}$, $q_2 := y_{\nu_2}$, $T_1'' := \mathrm{Zhk}_{T-x_{\mu_0}}(y_{\nu_1})$, $T_1' := (V_{T_1'}, E_{T_1'}, q_1)$ mit

$$V_{T_1'} := V(T_1'') \cup \{x_{\mu_0}\}, \qquad E_{T_1'} := E(T_1'') \cup \{x_{\mu_0}, y_{\nu_1}\},$$

$T_2' := (V_{T_2'}, E_{T_2'}, q_2) := \mathrm{Zhk}_{T-x_{\mu_0}}(y_{\nu_2})$, $G' = (V', E', w')$ mit $V' := V(T_1') \cup V(T_2')$, $E' := E(T_1') \cup E(T_2')$, $w' := w\restriction_{E'}$. Damit ist $B' := (G', T_1', T_2')$ ein Doppelbaum. Nun kann man genau wie im Beweis von Satz 2.4.11 einen ϵ-Doppelbaum $B \leq B'$ $(\epsilon > 0)$ konstruieren (das heißt, wegen Satz 2.4.23 (i) ist dann $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$). Setze dazu noch $\tilde{q}_1 := y_{\nu_1}$, und ersetze im Beweis von Satz 2.4.11 q_1 durch $\tilde{q}_1$. Ersetze dann weiterhin zur Konstruktion von $E_n'(\tilde{q}_1)$, $L_n'(\tilde{q}_1)$, i_0 durch μ_0, j_0 durch ν_1, T_1' durch T_1'', und am Ende setze $V_{T_1} := \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n'(\tilde{q}_1) \cup \{q_1\}$, $E_{T_1} := \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n'(\tilde{q}_1) \cup \{q_1, \tilde{q}_1\}$, $f_1\{q_1, \tilde{q}_1\} := \epsilon$. In der Konstruktion von $E_n'(q_2)$, $L_n'(q_2)$ ersetze i_0 durch μ_0 und j_0 durch ν_2. ▲

Wegen Behauptung 2 kann man nun annehmen, daß $T = (y_{j_0}, x_{i_1}, y_{j_1}, \ldots)$ ein Weg ist. Für $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p + q \in \mathcal{G}$ gilt $\mathrm{di}(p) = \mathrm{di}(p + q - q) \leq \mathrm{di}(q)$. Vertauschen von p und q liefert $\mathrm{di}(q) \leq \mathrm{di}(p)$. Also ist $\mathrm{di}(p) = \mathrm{di}(q)$. Daraus folgt, daß T ein unendlicher $\mathrm{di}(p_{i_0,j_0})$-Weg ist. Nach Satz 2.4.23 (iii) ist auch in diesem Fall $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$. Damit ist im Fall $\alpha = \beta = \omega$ alles bewiesen.
Der Fall $\alpha, \beta \leq \omega$ kann wieder auf den Fall $\alpha = \beta = \omega$ zurückgeführt werden, indem man abzählbar viele Nullinien einfügt. Bleibt der allgemeine Fall. Erneut nehme man an, daß es $(i_0, j_0) \in I_1 \times I_2$ gibt mit $p_{i_0,j_0} \notin \mathcal{G}$. Wieder wird gezeigt, daß dann $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$. Betrachte $G(P)$. Es sei $Z := \mathrm{Zhk}(x_{i_0})$ und

$$I_{1,Z} := \{i \in I_1 : x_i \in V(Z)\}, \qquad I_{2,Z} := \{j \in I_2 : y_j \in V(Z)\}.$$

Wie im Beweis von Satz 2.1.19 gesehen, sind $I_{1,Z}$ und $I_{2,Z}$ abzählbar, und nach Definition von Z ist $\mathcal{I}(P\restriction_{I_{1,Z}\times I_{2,Z}}) = (I_{1,Z}, I_{2,Z}, r\restriction_{I_{1,Z}}, s\restriction_{I_{2,Z}})$. Da der Beweis für den Fall $\max\{\#I_1, \#I_2\} \leq \omega$ schon geführt wurde, ist

$$P\restriction_{I_{1,Z}\times I_{2,Z}} \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}(P\restriction_{I_{1,Z}\times I_{2,Z}}))).$$

Also ist nach Satz 2.1.19 (a) $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$. ■

Korollar 2.4.28. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\leq$-Randsystem mit $\#I_1 = \alpha$, $\#I_2 = \beta$ und $r_i = s_j = 1$ für alle $(i,j) \in I_1 \times I_2$. Dann ist $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})) = \mathcal{M}_{sp}(I_1, I_2)$.*

Beweis. „$\supseteq$" gilt wieder, da 0, 1 die Extremalpunkte von $[0,1]$ sind.
„$\subseteq$": Das folgt sofort aus Satz 2.4.27; denn $\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen und

$$p_{i,j} \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad p_{i,j} \in \{0, 1\}$$

wegen der Voraussetzung. ■

2.5 Extremalpunktcharakterisierungen für endliche Randsysteme

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts besteht in Satz 2.5.15, der eine Vielzahl verschiedener Charakterisierungen der Extremalpunkte für endliche Randsysteme liefert. Die meisten dieser Charakterisierungen finden sich bei JURKAT und RYSER (siehe [7]).

Zunächst wird für endliche Randsysteme $\mathcal{I}$ rekursiv eine Menge $\mathcal{E}(\mathcal{I})$ definiert, die sich dann anschließend gerade als die Menge der Extremalpunkte erweisen wird (siehe Lemma 2.5.5).

Die Konstruktion von $\mathcal{E}(\mathcal{I})$ erfolgt, indem man, sofern es mindestens zwei Zeilen und mindestens zwei Spalten gibt, für alle Indexpaare (i,j) untersucht, ob $r_i \leq s_j$ oder $r_i \geq s_j$ gilt. Im ersten Fall entfernt man i und r_i aus dem Randsystem $\mathcal{I}$ und ersetzt s_j durch $s_j - r_i$. So entsteht ein kleineres Randsystem $\tilde{\mathcal{I}}$. Die zugehörigen Elemente von $\mathcal{E}(\mathcal{I})$ bekommt man nun rekursiv, indem man in alle Elemente von $\mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}})$ eine zusätzliche i-te Zeile einfügt, die an der j-ten Stelle r_i stehen hat und sonst nur Nullen. Im Fall $r_i \geq s_j$ geht man analog vor, nur daß die Rollen der Zeilen und Spalten vertauscht sind. Die formalen Details dieser Konstruktion erfolgen jetzt in Definition 2.5.1.

Definition 2.5.1. Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein endliches Randsystem. Setze

$$m := l(r), \qquad n := l(s),$$

$$M(\mathcal{I}) := \{(i,j) \in I_1 \times I_2 : r_i \leq s_j\}, \quad N(\mathcal{I}) := \{(i,j) \in I_1 \times I_2 : r_i \geq s_j\}. \tag{2.52}$$

Für $(i_0, j_0) \in M(\mathcal{I})$ und $m \geq 2$ definiere ein Randsystem

$$\mathcal{I}_M^{i_0,j_0} := (I_1 \setminus \{i_0\}, I_2, r_M^{i_0}, s_M^{j_0})$$

durch

$$r_M^{i_0} := r\restriction_{I_1\setminus\{i_0\}}, \quad (s_M^{j_0})_j := \begin{cases} s_j & \text{für } j \neq j_0, \\ s_{j_0} - r_{i_0} & \text{für } j = j_0. \end{cases} \tag{2.53}$$

Für $(i_0, j_0) \in N(\mathcal{I})$ und $n \geq 2$ definiere ein Randsystem

$$\mathcal{I}_N^{i_0,j_0} := (I_1, I_2 \setminus \{j_0\}, r_N^{i_0}, s_N^{j_0})$$

durch

$$s_N^{j_0} := s\restriction_{I_2\setminus\{j_0\}}, \quad (r_N^{i_0})_i := \begin{cases} r_i & \text{für } i \neq i_0, \\ r_{i_0} - s_{j_0} & \text{für } i = i_0. \end{cases} \tag{2.54}$$

Die Menge $\mathcal{E}(\mathcal{I})$ sei dann rekursiv, wie folgt, definiert:
Für $\min\{m,n\} = 1$ sei $\mathcal{E}(\mathcal{I}) := \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Seien nun $m, n \geq 2$, und für alle Randsysteme $\hat{\mathcal{I}} := (\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{r}, \hat{s})$ mit $\hat{m} := l(\hat{r}) < m$ oder $\hat{n} := l(\hat{s}) < n$ sei $\mathcal{E}(\hat{\mathcal{I}})$ bereits konstruiert. Definiere für $(i_0, j_0) \in M(\mathcal{I})$ und $m \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i_0,j_0}(\mathcal{I}) := \Bigg\{ & P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_0^+}(I_1, I_2) : \\ & P\restriction_{(I_1\setminus\{i_0\})\times I_2} \in \mathcal{E}(\mathcal{I}_M^{i_0,j_0}) \text{ und } p_{i_0,j} = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq j_0, \\ r_{i_0} & \text{für } j = j_0 \end{cases} \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.55}$$

und für $(i_0, j_0) \in N(\mathcal{I})$ und $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{i_0,j_0}(\mathcal{I}) := \Bigg\{ & P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_0^+}(I_1, I_2) : \\ & P\restriction_{I_1\times(I_2\setminus\{j_0\})} \in \mathcal{E}(\mathcal{I}_N^{i_0,j_0}) \text{ und } p_{i,j_0} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq i_0, \\ s_{j_0} & \text{für } i = i_0 \end{cases} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Schließlich sei $\mathcal{E}(\mathcal{I}) := \mathcal{M}(\mathcal{I}) \cup \mathcal{N}(\mathcal{I})$ mit

$$\mathcal{M}(\mathcal{I}) := \bigcup_{(i,j)\in M(\mathcal{I})} \mathcal{M}_{i,j}(\mathcal{I}), \quad \mathcal{N}(\mathcal{I}) := \bigcup_{(i,j)\in N(\mathcal{I})} \mathcal{N}_{i,j}(\mathcal{I}). \tag{2.57}$$

Zur Illustration von Definition 2.5.1 dient das folgende Beispiel 2.5.2. In Abschnitt A.1 des Anhangs befindet sich der Quellcode einer Implementation des in Definition 2.5.1 gegebenen Algorithmus.

Beispiel 2.5.2. Gegeben sei das Randsystem $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ mit

$$I_1 := \{1,2\}, \qquad I_2 := \{1,2,3\},$$

$r := (2,5)$, $s := (1,1,5)$. Es soll nun $\mathcal{E}(\mathcal{I})$ explizit bestimmt werden. Es ist

$$M(\mathcal{I}) = \{(1,3),(2,3)\} \quad N(\mathcal{I}) = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3)\}.$$

Man erhält

$$\mathcal{I}_M^{1,3} = (\{2\}, I_2, (5), (1,1,3)), \quad \mathcal{M}_{1,3}(\mathcal{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{I}_M^{2,3} = (\{1\}, I_2, (2), (1,1,0)), \quad \mathcal{M}_{2,3}(\mathcal{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right\},$$

sowie $\mathcal{I}_N^{1,1} = (I_1, \{2,3\}, (1,5), (1,5))$,

$$M(\mathcal{I}_N^{1,1}) = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}, \quad N(\mathcal{I}_N^{1,1}) = \{(1,2),(2,2),(2,3)\},$$

$$(\mathcal{I}_N^{1,1})_M^{1,2} = (\{2\}, \{2,3\}, (5), (0,5)), \quad \mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{I}_N^{1,1}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right\},$$

$$(\mathcal{I}_N^{1,1})_M^{1,3} = (\{2\}, \{2,3\}, (5), (1,4)), \quad \mathcal{M}_{1,3}(\mathcal{I}_N^{1,1}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$(\mathcal{I}_N^{1,1})_M^{2,3} = (\{1\}, \{2,3\}, (1), (1,0)), \quad \mathcal{M}_{2,3}(\mathcal{I}_N^{1,1}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right\},$$

$$(\mathcal{I}_N^{1,1})_N^{1,2} = (I_1, \{3\}, (0,5), (5)), \quad \mathcal{M}_{1,2}(\mathcal{I}_N^{1,1}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right\},$$

$$(\mathcal{I}_N^{1,1})_N^{2,2} = (I_1, \{3\}, (1,4), (5)), \quad \mathcal{M}_{2,2}(\mathcal{I}_N^{1,1}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$(\mathcal{I}_N^{1,1})_N^{2,3} = (I_1, \{2\}, (1,0), (1)), \quad \mathcal{M}_{2,3}(\mathcal{I}_N^{1,1}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right\},$$

also $\mathcal{N}_{1,1}(\mathcal{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$. Ganz analog bekommt man

$$\mathcal{I}_N^{1,2} = (I_1, \{1,3\}, (1,5), (1,5)), \quad \mathcal{N}_{1,2}(\mathcal{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{I}_N^{2,1} = (I_1, \{2,3\}, (2,4), (1,5)), \quad \mathcal{N}_{2,1}(\mathcal{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{I}_N^{2,2} = (I_1, \{1,3\}, (2,4), (1,5)), \quad \mathcal{N}_{2,2}(\mathcal{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{I}_N^{2,3} = (I_1, \{1,2\}, (2,0), (1,1)), \quad \mathcal{N}_{2,3}(\mathcal{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit hat man insgesamt

$$\mathcal{E}(\mathcal{I}) = \mathcal{M}(\mathcal{I}) \cup \mathcal{N}(\mathcal{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lemma 2.5.3. *Für jedes endliche Randsystem $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ist $\mathcal{E}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{I})$.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion über $m + n$. Für $m = 1$ oder $n = 1$ folgt die Behauptung sofort aus Definition 2.5.1. Sei also $m, n \geq 2$ und $P \in \mathcal{E}(\mathcal{I})$. Ist $P \in \mathcal{M}(\mathcal{I})$, so gibt es $(i_0, j_0) \in M(\mathcal{I})$ mit $P \in \mathcal{M}_{i_0,j_0}(\mathcal{I})$, das heißt

$$P\restriction_{(I_1 \setminus \{i_0\}) \times I_2} \in \mathcal{E}(\mathcal{I}_M^{i_0,j_0}) \text{ und } p_{i_0,j} = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq j_0, \\ r_{i_0} & \text{für } j = j_0 \end{cases}.$$

Per Induktion ist $P\restriction_{(I_1 \setminus \{i_0\}) \times I_2} \in \mathcal{D}(\mathcal{I}_M^{i_0,j_0})$, das heißt

$$(2.58) \quad \begin{aligned} &\underset{i \in I_1}{\forall} \sum_{j \in I_2} p_{i,j} = \begin{cases} (r_M^{i_0})_i = r_i & \text{für } i \neq i_0, \\ r_{i_0} & \text{für } i = i_0, \end{cases} \\ &\underset{j \in I_2}{\forall} \sum_{i \in I_1} p_{i,j} = p_{i_0,j} + \sum_{i \in I_1 \setminus \{i_0\}} p_{i,j} = \begin{cases} (s_M^{j_0})_j = s_j & \text{für } j \neq j_0, \\ (s_M^{j_0})_{j_0} + r_{i_0} = s_{j_0} & \text{für } j = j_0, \end{cases} \end{aligned}$$

also $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Eine analoge Rechnung zeigt, daß $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ auch für $P \in \mathcal{N}(\mathcal{I})$ gilt. ∎

Lemma 2.5.4. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein endliches Randsystem und $P \in \mathcal{E}(\mathcal{I})$. Dann ist $\#\operatorname{supp}(P) \leq m + n - 1$.*

Beweis. Wieder erfolgt eine Induktion über $m + n$. Für $m = 1$ ist

$$\#\operatorname{supp}(P) \leq n = n + m - 1,$$

für $n = 1$ ist $\#\operatorname{supp}(P) \leq m = m + n - 1$. Sei nun $m, n \geq 2$ und $P \in \mathcal{E}(\mathcal{I})$. Angenommen $P \in \mathcal{M}_{i_0,j_0}(\mathcal{I})$, $(i_0, j_0) \in M(\mathcal{I})$. Es gilt

$$\#\operatorname{supp}(P) = \#\operatorname{supp}(P\restriction_{(I_1 \setminus \{i_0\}) \times I_2}) + 1 \overset{\text{(Induktion)}}{\leq} m - 1 + n - 1 + 1 = m + n - 1.$$

Ist hingegen $P \in \mathcal{N}_{i_0,j_0}(\mathcal{I})$, $(i_0, j_0) \in N(\mathcal{I})$, so ist

$$\begin{aligned} \#\operatorname{supp}(P) &= \#\operatorname{supp}(P\restriction_{I_1 \times (I_2 \setminus \{j_0\})}) + 1 \overset{\text{(Induktion)}}{\leq} m + n - 1 - 1 + 1 \\ &= m + n - 1. \end{aligned}$$

Damit ist die Induktion vollständig und das Lemma bewiesen. ∎

Lemma 2.5.5. *Ist $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein endliches Randsystem, so ist*

$$\mathcal{E}(\mathcal{I}) = \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})).$$

Beweis. Der Beweis erfolgt erneut durch Induktion über $m + n$. Für $m = 1$ oder $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Seien also $m, n \geq 2$.
„$\supseteq$“: Sei $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. Nach Korollar 2.2.9 hat P eine Linie mit höchstens einem positiven Element. Angenommen, es handelt sich dabei um die i_0-te Zeile (der Fall, daß es sich um die j_0-te Spalte handelt, geht völlig analog). Setze $Q := P\restriction_{(I_1 \setminus \{i_0\}) \times I_2}$, $\tilde{\mathcal{I}} := \mathcal{I}(Q)$. Nach Lemma 2.1.14 ist dann $Q \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}}))$. Per Induktion ist dann $Q \in \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}})$, und es folgt (beachte dazu $(i_0, j_0) \in M(\mathcal{I})$ wegen $p_{i_0,j_0} = r_{i_0}$) $P \in \mathcal{M}_{i_0,j_0}(\mathcal{I})$, das heißt $P \in \mathcal{E}(\mathcal{I})$.

„$\subseteq$“: Sei nun $P \in \mathcal{E}(\mathcal{I})$, $P = \frac{1}{2}P^{(1)} + \frac{1}{2}P^{(2)}$ und $P^{(1)}, P^{(2)} \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Angenommen $P \in \mathcal{M}_{i_0,j_0}(\mathcal{I})$, $(i_0, j_0) \in M(\mathcal{I})$. Sei $Q := P\lceil_{(I_1\setminus\{i_0\})\times I_2}$, und für $k = 1, 2$ sei

$$Q^{(k)} := P^{(k)}\lceil_{(I_1\setminus\{i_0\})\times I_2}.$$

Dann gilt $Q = \frac{1}{2}Q^{(1)} + \frac{1}{2}Q^{(2)}$. Sei $\tilde{\mathcal{I}} := \mathcal{I}(Q)$. Per Induktion ist $Q \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}}))$, das heißt $Q^{(1)} = Q^{(2)} = Q$. Wegen $P, P^{(1)}, P^{(2)} \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ folgt daraus auch

$$P\lceil_{\{i_0\}\times I_2} = P^{(1)}\lceil_{\{i_0\}\times I_2} = P^{(2)}\lceil_{\{i_0\}\times I_2},$$

das heißt $P = P^{(1)} = P^{(2)}$. Also ist $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. Ein völlig analoges Argument zeigt $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ auch für $P \in \mathcal{N}_{i_0,j_0}(\mathcal{I})$, $(i_0, j_0) \in N(\mathcal{I})$. ■

Lemma 2.5.6. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein endliches Randsystem und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Dann ist $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ genau dann, wenn jede Submatrix Q von P eine Linie mit höchstens einem positiven Element enthält.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ folgt aus Korollar 2.2.9 und Lemma 2.1.14. Der Beweis von „$\Leftarrow$“ ist wiederum eine Induktion über $m + n$. Für $m = 1$ oder $n = 1$ ist nichts zu beweisen. Sei nun $m, n \geq 2$. Nach Voraussetzung hat P eine Linie mit höchstens einem positiven Element. Angenommen, es handelt sich um die i_0-te Zeile (der Fall, daß es sich um die j_0-te Spalte handelt, geht dann wieder analog). Wähle j_0 so, daß

$$\underset{j\in I_2\setminus\{j_0\}}{\forall} p_{i_0,j} = 0.$$

Sei $Q := P\lceil_{(I_1\setminus\{i_0\})\times I_2}$. Da jede Submatrix von Q auch eine Submatrix von P ist, enthält jede Submatrix von Q eine Linie mit höchstens einem positiven Element. Per Induktion ist dann $Q \in \mathcal{E}(\mathcal{I}_M^{i_0,j_0})$ (beachte dazu, daß $(i_0, j_0) \in M(\mathcal{I})$, da $p_{i_0,j_0} = r_{i_0}$). Also ist $P \in \mathcal{M}_{i_0,j_0}(\mathcal{I})$ und damit $P \in \mathcal{E}(\mathcal{I}) = \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. ■

Korollar 2.5.7. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein endliches Randsystem und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Dann ist $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ genau dann, wenn für jede Submatrix Q von P mit $\tilde{m}$ Zeilen und $\tilde{n}$ Spalten gilt, daß $\#\operatorname{supp}(Q) \leq \tilde{m} + \tilde{n} - 1$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ und $\tilde{\mathcal{I}} := \mathcal{I}(Q)$. Dann ist $Q \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}}))$, das heißt $Q \in \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}})$ und damit $\#\operatorname{supp}(Q) \leq \tilde{m} + \tilde{n} - 1$.

„$\Leftarrow$“: Aus $\#\operatorname{supp}(Q) \leq \tilde{m} + \tilde{n} - 1$ folgt, daß Q eine Linie mit höchstens einem positiven Element besitzt, denn andernfalls wäre

$$\#\operatorname{supp}(Q) \geq 2\max(\tilde{m}, \tilde{n}) \geq \tilde{m} + \tilde{n} > \tilde{m} + \tilde{n} - 1.$$

Nach Lemma 2.5.6 ist dann $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. ■

Die folgende Definition 2.5.8 dient dazu, extremale Matrizen durch Permutation der Zeilen und Spalten in einfache Formen zu bringen.

Definition 2.5.8. Sei $I_1 = \{1, \ldots, m\}$, $I_2 = \{1, \ldots, n\}$, $P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2)$.

(a) P ist eine *obere Dreiecksmatrix* (upper triangular matrix) genau dann, wenn

(2.59)
$$(m \leq n \text{ und } \underset{\substack{(i,j)\in I_1\times I_2\\ i>j}}{\forall} p_{i,j} = 0) \text{ oder } (m > n \text{ und } \underset{\substack{(i,j)\in I_2^2\\ i>j}}{\forall} p_{i+m-n,j} = 0).$$

Die Menge der oberen Dreiecksmatrizen bezeichne mit $\mathrm{UT}(m,n)$.

(b) P ist eine *untere Dreiecksmatrix* (lower triangular matrix) genau dann, wenn

(2.60)
$$(m \leq n \text{ und } \underset{\substack{(i,j)\in I_1^2\\ i<j}}{\forall} p_{i,j+n-m} = 0) \text{ oder } (m > n \text{ und } \underset{\substack{(i,j)\in I_1\times I_2\\ i<j}}{\forall} p_{i,j} = 0).$$

Die Menge der unteren Dreiecksmatrizen bezeichne mit $\mathrm{LT}(m,n)$.

Beispiel 2.5.9. (a) Die folgenden Matrizen sind obere Dreiecksmatrizen:

(2.61)
$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) Die folgenden Matrizen sind untere Dreiecksmatrizen:

(2.62)
$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Lemma 2.5.10. *Sei $I_1 = \{1, \ldots, m\}$, $I_2 = \{1, \ldots, n\}$, $P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2)$. Dann gilt: $P \in \mathrm{LT}(m,n) \quad \Leftrightarrow \quad P^t \in \mathrm{UT}(n,m)$ (dabei ist $P^t := (p_{j,i})_{(i,j)\in I_1\times I_2}$ die zu P transponierte Matrix).*

Beweis. „$\Rightarrow$": Ist $m < n$, so gilt $m^t = n > n^t = m$. Dann ist

$$\underset{\substack{(j,i)\in I_1^2\\ j>i}}{\forall} p^t_{j+m^t-n^t,i} = p_{i,j+n-m} = 0.$$

Ist $m \geq n$, so gilt $m^t \leq n = n^t = m$ und $\underset{\substack{(j,i)\in I_2\times I_1\\ j>i}}{\forall} p^t_{j,i} = p_{i,j} = 0$. „$\Leftarrow$" folgt durch eine ganz analoge Rechnung. ■

Definition 2.5.11. Sei I eine endliche Menge und $P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I, I)$. Dann definiere ($\Sigma := \Sigma(I)$ sei die Menge der Permutationen von I)

$$\mathrm{per}(P) := \sum_{\sigma\in\Sigma} \prod_{i\in I} p_{i,\sigma(i)}. \tag{2.63}$$

$\mathrm{per}(P)$ nennt man die *Permanente* von P.

Lemma 2.5.12. *Für eine endliche Menge I und $P, Q \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_0^+}(I, I)$ gilt*

$$\operatorname{per}(P) + \operatorname{per}(Q) \leq \operatorname{per}(P + Q).$$

Beweis. Seien $P, Q \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}_0^+}(I, I)$, $\Sigma := \Sigma(I)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{per}(P + Q) &= \sum_{\sigma \in \Sigma} \prod_{i \in I} (p + q)_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \Sigma} \prod_{i \in I} (p_{i,\sigma(i)} + q_{i,\sigma(i)}) \\ &\geq \sum_{\sigma \in \Sigma} \prod_{i \in I} p_{i,\sigma(i)} + \sum_{\sigma \in \Sigma} \prod_{i \in I} q_{i,\sigma(i)} = \operatorname{per}(P) + \operatorname{per}(Q), \end{aligned}$$

und das Lemma ist bewiesen. ∎

Lemma 2.5.13. *Ist I eine endliche Menge und $P \in \mathcal{M}_p(I)$, so ist* $\operatorname{per}(P) = 1$.

Beweis. Das folgt sofort aus Definition 2.5.11, wenn man beachtet, daß für Matrizen $P \in \mathcal{M}_p(I)$ genau ein $\sigma \in \Sigma(I)$ existiert, so daß $\underset{i \in I}{\forall}\ p_{i,\sigma(i)} \neq 0$, und daß für dieses σ, $\underset{i \in I}{\forall}\ p_{i,\sigma(i)} = 1$. ∎

Lemma 2.5.14. *Sei $I = \{1, \ldots, m\}$ und $P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I, I)$. Gilt dann $P \in \mathrm{UT}(m, m)$ oder $P \in \mathrm{LT}(m, m)$, so ist* $\operatorname{per}(P) = \prod_{i=1}^{m} p_{i,i}$.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus Definition 2.5.11, da es für $Id \neq \sigma \in \Sigma(I)$ immer Indizes $i, j \in I$ gibt, so daß sowohl $i < \sigma(i)$ als auch $j > \sigma(j)$ gilt.
Ist $P \in \mathrm{UT}(m, m)$, so ist $p_{j,\sigma(j)} = 0$, ist $P \in \mathrm{LT}(m, m)$, so ist $p_{i,\sigma(i)} = 0$. ∎

Satz 2.5.15. *Ist $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein endliches Randsystem und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$, so sind die folgenden Aussagen (i) bis (xii) äquivalent (für eine Submatrix Q von P sei $\tilde{\mathcal{I}} := (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{r}, \tilde{s}) := \mathcal{I}(Q)$):*

(i) $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.

(ii) $P \in \mathcal{E}(\mathcal{I})$.

(iii) *$G(P)$ ist ein Wald.*

(iv) *Für jede Submatrix Q von P gilt $Q \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}}))$.*

(v) *Jede Submatrix Q von P hat eine Linie mit höchstens einem positiven Element.*

(vi) *Für jede Submatrix Q von P mit $\tilde{m}$ Zeilen und $\tilde{n}$ Spalten gilt*

$$\#\operatorname{supp}(Q) \leq \tilde{m} + \tilde{n} - 1.$$

(vii) *Für jede Submatrix Q von P mit $\tilde{m}$ Zeilen und $\tilde{n}$ Spalten gibt es Bijektionen*

$$\sigma_U, \sigma_L : \tilde{I}_1 :\longrightarrow \{1, \ldots, \tilde{m}\},$$

$$\tau_U, \tau_L : \tilde{I}_2 :\longrightarrow \{1, \ldots, \tilde{n}\},$$

so daß

$$\tilde{P}^U = (\tilde{p}^U_{i,j})_{(i,j) \in \{1,\ldots,\tilde{m}\} \times \{1,\ldots,\tilde{n}\}} \in \mathrm{UT}(\tilde{m}, \tilde{n})$$

mit $\tilde{p}^U_{i,j} = p_{\sigma_U^{-1}(i),\tau_U^{-1}(j)}$ *und* $\tilde{P}^L = (\tilde{p}^L_{i,j})_{(i,j) \in \{1,\ldots,\tilde{m}\} \times \{1,\ldots,\tilde{n}\}} \in \mathrm{LT}(\tilde{m}, \tilde{n})$ *mit* $\tilde{p}^L_{i,j} = p_{\sigma_L^{-1}(i),\tau_L^{-1}(j)}$.

(viii) *Es gibt keine quadratische Submatrix Q von P, so daß $S(Q) = P_1 + P_2$ mit $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_p(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$ (für die Definition von $S(Q)$ siehe 2.1.3 (c)).*

(ix) *Für jede quadratische Submatrix Q von P ist* $\operatorname{per}(S(Q)) \leq 1$.

(x) $(\tilde{P} \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ *und* $\operatorname{supp}(\tilde{P}) \subseteq \operatorname{supp}(P)) \quad \Rightarrow \quad \tilde{P} = P$.

(xi) *Ist Q eine Submatrix von P, so folgt, daß jede Matrix $\tilde{Q} \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}})$, für die* $\operatorname{supp}(\tilde{Q}) \subseteq \operatorname{supp}(Q)$ *gilt, mit Q übereinstimmt.*

(xii) *Ist Q eine quadratische Submatrix von P, so gibt es $(i_0, j_0) \in \tilde{I}_1 \times \tilde{I}_2$, so daß die i_0-te Zeile und die j_0-te Spalte von Q jeweils höchstens ein positives Element enthalten.*

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen (i) bis (vi) wurde bereits bewiesen (siehe Lemma 2.5.5, Lemma 2.1.14, Lemma 2.5.6, Korollar 2.5.7 und Satz 2.2.6). Zum Beweis des Satzes werden nun folgende Implikationen gezeigt:

$$\text{(ii)}\Rightarrow\text{(vii)}\Rightarrow\text{(ix)}\Rightarrow\text{(viii)}\Rightarrow\text{(iii)}, \quad \text{(vi)}\Rightarrow\text{(xii)}\Rightarrow\text{(v)}, \quad \text{(i)}\Rightarrow\text{(xi)}\Rightarrow\text{(x)}\Rightarrow\text{(i)}.$$

„(i)⇒(vii)“: Wegen (iv) kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $P = Q$. Der Beweis erfolgt nun durch Induktion über $m + n$. Für $m = 1$ oder $n = 1$ kann man für σ_U und σ_L beziehungsweise τ_U und τ_L jede Bijektion $\sigma : I_1 \longrightarrow \{1, \dots, m\}$ beziehungsweise $\tau : I_2 \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ wählen. Sei nun $m, n \geq 2$. Zunächst sollen σ_U, τ_U konstruiert werden. Angenommen $P \in \mathcal{M}_{i_0,j_0}(\mathcal{I})$, $(i_0, j_0) \in M(\mathcal{I})$. Sei

$$Q := P\restriction_{(I_1 \setminus \{i_0\}) \times (I_2 \setminus \{j_0\})},$$

$\tilde{\mathcal{I}} := (I_1 \setminus \{i_0\}, I_2 \setminus \{j_0\}, \tilde{r}, \tilde{s}) := \mathcal{I}(Q)$. Dann ist $Q \in \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{I}})$, daß heißt, per Induktion gibt es $\tilde{\sigma}_U : I_1 \setminus \{i_0\} \longrightarrow \{1, \dots, m-1\}$, $\tilde{\tau}_U : I_2 \setminus \{j_0\} \longrightarrow \{1, \dots, n-1\}$, so daß $(q_{\tilde{\sigma}_U^{-1}(i), \tilde{\tau}_U^{-1}(j)})_{(i,j) \in \{1,\dots,m-1\} \times \{1,\dots,n-1\}} \in \mathrm{UT}(m-1, n-1)$ ist. Definiere

$$\sigma_U : I_1 \longrightarrow \{1, \dots, m\} \quad \text{und} \quad \tau_U : I_2 \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$

durch

$$\sigma_U(i) := \begin{cases} \tilde{\sigma}_U(i) & \text{für } i \neq i_0, \\ m & \text{für } i = i_0 \end{cases}, \quad \tau_U(j) := \begin{cases} \tilde{\tau}_U(j) & \text{für } j \neq j_0, \\ n & \text{für } j = j_0. \end{cases} \tag{2.64}$$

Angenommen, es ist $m \leq n$. Zu zeigen ist dann $i > j \quad \Rightarrow \quad p_{\sigma_U^{-1}(i), \tau_U^{-1}(j)} = 0$. Für $i < m$, $j < n$ gilt $p_{\sigma_U^{-1}(i), \tau_U^{-1}(j)} = p_{\tilde{\sigma}_U^{-1}(i), \tilde{\tau}_U^{-1}(j)} = 0$, für $j = n$ ist immer $i \leq j$, und für $i = m$, $j < n$ ist immer $p_{\sigma_U^{-1}(i), \tau_U^{-1}(j)} = 0$. Ist hingegen $m > n$, so ist zu zeigen, daß für $1 \leq i, j \leq n$, $i > j \quad \Rightarrow \quad p_{\sigma_U^{-1}(i+m-n), \tau_U^{-1}(j)} = 0$. Ist $j = n$, so ist immer $i \leq j$. Sei also $j \leq n - 1$. Dann ist für $i < n$

$$p_{\sigma_U^{-1}(i+m-n), \tau_U^{-1}(j)} = p_{\tilde{\sigma}_U^{-1}(i+m-1-(n-1)), \tilde{\tau}_U^{-1}(j)} = 0$$

und für $i = n$, $p_{\sigma_U^{-1}(i+m-n), \tau_U^{-1}(j)} = p_{i_0, \tau_U^{-1}(j)} = 0$.
Nun nehme man an, daß $P \in \mathcal{N}_{i_0,j_0}(\mathcal{I})$, $(i_0, j_0) \in N(\mathcal{I})$. Es seien $\tilde{\sigma}_U$, $\tilde{\tau}_U$ wie oben. Definiere $\sigma_U : I_1 \longrightarrow \{1, \dots, m\}$ und $\tau_U : I_2 \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ durch

$$\sigma_U(i) := \begin{cases} \tilde{\sigma}_U(i) + 1 & \text{für } i \neq i_0, \\ 1 & \text{für } i = i_0, \end{cases} \quad \tau_U(j) := \begin{cases} \tilde{\tau}_U(j) + 1 & \text{für } j \neq j_0, \\ 1 & \text{für } j = j_0. \end{cases} \tag{2.65}$$

Angenommen, es ist $m \leq n$. Zu zeigen ist dann wiederum

$$i > j \quad \Rightarrow \quad p_{\sigma_U^{-1}(i),\tau_U^{-1}(j)} = 0.$$

Für $i > 1$, $j > 1$ gilt

$$p_{\sigma_U^{-1}(i),\tau_U^{-1}(j)} = p_{\tilde{\sigma}_U^{-1}(i-1),\tilde{\tau}_U^{-1}(j-1)} = 0,$$

für $i = 1$ ist immer $i \leq j$, und für $j = 1$, $i > 1$ ist immer $p_{\sigma_U^{-1}(i),\tau_U^{-1}(j)} = 0$. Ist hingegen $m > n$, so ist zu zeigen, daß für $1 \leq i, j \leq n$,

$$i > j \quad \Rightarrow \quad p_{\sigma_U^{-1}(i+m-n),\tau_U^{-1}(j)} = 0.$$

Ist $i = 1$, so ist immer $i \leq j$. Sei also $i > 1$. Dann ist für $j > 1$,

$$p_{\sigma_U^{-1}(i+m-n),\tau_U^{-1}(j)} = p_{\tilde{\sigma}_U^{-1}(i-1+m-1-(n-1)),\tilde{\tau}_U^{-1}(j-1)} = 0$$

und für $j = 1$,

$$p_{\sigma_U^{-1}(i+m-n),\tau_U^{-1}(j)} = p_{\tilde{\sigma}_U^{-1}(i-1+m-1-(n-1)),j_0} = 0.$$

Um σ_L und τ_L zu konstruieren, kann man entweder eine analoge Konstruktion wie für σ_U und τ_U durchführen oder, wie folgt, argumentieren: Wegen $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ ist $P^t \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}^t))$ bezüglich des Randsystems $\mathcal{I}^t := (I_2, I_1, s, r)$. Also gibt es Bijektionen

$$\sigma_L : I_1 :\longrightarrow \{1, \ldots, m\}, \qquad \tau_L : I_2 :\longrightarrow \{1, \ldots, n\},$$

so daß

$$\tilde{P}^U = (\tilde{p}^U_{j,i})_{(i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}} \in \mathrm{UT}(n, m)$$

mit $\tilde{p}^U_{j,i} = p_{\tau_L^{-1}(j),\sigma_L^{-1}(i)}$. Nach Lemma 2.5.10 ist dann

$$(\tilde{P}^U)^t = (p_{\sigma_L^{-1}(i),\tau_L^{-1}(j)})_{(i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}} \in \mathrm{LT}(m, n).$$

„(vii)⇒(ix)“: Sei also Q eine quadratische Submatrix von P und σ_U, τ_U, $\tilde{P}^U$ wie in (vii). Dann ist (setze $\tilde{Q} := S(Q)$, $\tilde{P} := S(\tilde{P}^U)$ und $\Sigma := \Sigma(\tilde{I}_1)$)

$$\begin{aligned}
\mathrm{per}(\tilde{Q}) &= \sum_{\sigma \in \Sigma} \prod_{i \in \tilde{I}_1} \tilde{q}_{i,\sigma(i)} \overset{(*)}{=} \sum_{\tau \in \Sigma_{\tilde{m}}} \prod_{\mu \in \{1,\ldots,\tilde{m}\}} \tilde{q}_{\sigma_U^{-1}(\mu),\tau_U^{-1}\tau(\mu)} \\
&= \sum_{\tau \in \Sigma_{\tilde{m}}} \prod_{\mu \in \{1,\ldots,\tilde{m}\}} \tilde{p}_{\mu,\tau(\mu)} \overset{(2.5.14)}{\leq} 1.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Zum Beweis der Gleichheit bei „$(*)$“, setze man $i = \sigma_U^{-1}(\mu)$ und $\sigma = \tau_U^{-1}\tau\sigma_U$ und beachte, daß μ die Menge $\{1, \ldots, \tilde{m}\}$ genau dann durchläuft, wenn $\sigma_U^{-1}(\mu)$ die Menge $\tilde{I}_1$ durchläuft, und τ die Menge $\Sigma_{\tilde{m}}$ genau dann durchläuft, wenn $\tau_U^{-1}\tau\sigma_U$ die Menge Σ durchläuft.

„(ix)⇒(viii)“: Angenommen, es gibt eine quadratische Submatrix Q von P mit $S(Q) = P_1 + P_2$ und $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_p(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$. Dann ist nach den Lemmata 2.5.12 und 2.5.13

$$\operatorname{per}(S(Q)) = \operatorname{per}(P_1 + P_2) \geq \operatorname{per}(P_1) + \operatorname{per}(P_2) = 2.$$

„(viii)⇒(iii)“: Angenommen, $G(P)$ ist kein Wald. Dann sei

$$K := (x_{i_1}, y_{j_1}, \ldots, x_{i_k}, y_{j_k})$$

ein kürzester Kreis in $G(P)$. Da $G(P)$ bipartit ist, ist $\#V(K)$ gerade. Setze

$$\tilde{I}_1 := \{i_1, \ldots, i_k\}, \quad \tilde{I}_2 := \{j_1, \ldots, j_k\}, \quad Q := P\restriction_{\tilde{I}_1 \times \tilde{I}_2}.$$

Dann ist $K = G(Q)$, denn sonst gäbe es $\mu, \nu \in \{1, \ldots, k\}$ mit

$$\{x_{i_\mu}, y_{j_\nu}\} \in E(G(P)) \setminus E(K),$$

das heißt, es wäre $\nu > \mu$ mit $(i_\mu, j_\nu) \neq (i_1, j_k)$ oder $\nu + 1 < \mu$. Im ersten Fall wäre $(x_{i_1}, y_{j_1}, \ldots, x_{i_{\mu-1}}, y_{j_{\mu-1}}, x_{i_\mu}, y_{j_\nu}, x_{i_{\nu+1}}, y_{j_{\nu+1}}, \ldots, x_{i_k}, y_{j_k})$ ein Kreis in $G(P)$, kürzer als K, im zweiten Fall wäre $(x_{i_1}, y_{j_1}, \ldots, y_{j_{\nu-1}}, x_{i_\nu}, y_{j_\nu}, x_{i_\mu}, y_{j_\mu}, x_{i_{\mu+1}}, \ldots, x_{i_k}, y_{j_k})$ ein Kreis in $G(P)$, kürzer als K, im Widerspruch zur Annahme, daß K ein kürzester Kreis in $G(P)$ ist. Nun definiere $P^{(1)} = (p_{i,j}^{(1)})_{(i,j) \in \tilde{I}_1 \times \tilde{I}_2}$ und $P^{(2)} = (p_{i,j}^{(2)})_{(i,j) \in \tilde{I}_1 \times \tilde{I}_2}$ durch

$$p_{i,j}^{(1)} := \begin{cases} 1 & \text{für } (i,j) = (i_\mu, j_\mu),\ \mu \in \{1, \ldots, k\}, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$
$$p_{i,j}^{(2)} := \begin{cases} 1 & \text{für } (i,j) = (i_1, j_k), \\ 1 & \text{für } (i,j) = (i_{\mu+1}, j_\mu),\ \mu \in \{1, \ldots, k-1\}, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases} \tag{2.67}$$

$P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ haben dann in jeder Linie genau eine Eins, das heißt

$$P^{(1)}, P^{(2)} \in \mathcal{M}_p(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2).$$

Wegen

$$E(G(K)) = E(G(P^{(1)})) \cup E(G(P^{(2)}))$$

und $K = G(Q)$ gilt nun $S(Q) = P^{(1)} + P^{(2)}$.

„(vi)⇒(xii)“: Es ist zu zeigen, daß jede quadratische Submatrix Q von P je eine Zeile und eine Spalte mit höchstens einem positiven Element besitzt. Hätte jede Zeile (Spalte) von Q mindestens zwei positive Elemente, so wäre

$$\#\operatorname{supp}(Q) \geq 2\,\#\tilde{I}_1 > 2\,\#\tilde{I}_1 - 1.$$

„(xii)⇒(v)“: Es ist nur zu bemerken, daß jede Submatrix mit $\tilde{m}$ Zeilen und $\tilde{n}$ Spalten eine quadratische Submatrix mit $\min(\tilde{m}, \tilde{n})$ Zeilen und Spalten hat.

„(i)⇒(xi)“: Wegen (iv) kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $P = Q$, das heißt es genügt (x) zu zeigen. Das gilt aber wegen Satz 2.4.16.

„(xi)⇒(x)“: (x) ist ein Spezialfall von (xi).

„(x)⇒(i)“: Das wurde in Lemma 2.4.15 allgemein bewiesen. ∎

In Analogie zu Satz 2.4.11 wird im folgenden Satz 2.5.17 gezeigt, daß für endliche Randsysteme $\mathcal{I}$ die Einträge einer extremalen Matrix P in $\mathcal{G}(\mathcal{I})$ liegen, selbst wenn $\mathcal{G}(\mathcal{I})$ nicht abgeschlossen ist. Mit Hilfe von Lemma 2.5.16 kann sogar noch eine etwas schärfere Aussage gewonnen werden. Beispiel 2.5.18 liefert ein endliches Randsystem $\mathcal{I}$, so daß $\mathcal{G}(\mathcal{I})$ nicht abgeschlossen ist.

Lemma 2.5.16. *Ist $(\mathcal{G}, \cdot)$ eine Gruppe und $M \subseteq \mathcal{G}$. Dann ist*

$$\langle M \rangle = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n, \tag{2.68}$$

wobei die $D_n = D_n(M)$ rekursiv definiert sind durch

$$D_0 := M \cup \{g^{-1} : g \in M\}, \quad D_{n+1} := D_n \cup \{gh : g, h \in D_n\}. \tag{2.69}$$

Insbesondere gilt dann

$$\#\langle M \rangle \leq \omega \cdot \# M. \tag{2.70}$$

Beweis. Es ist nur (2.68) zu beweisen. „$\supseteq$“ folgt, da eine Induktion zeigt, daß $D_n \subseteq \langle M \rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Um „$\subseteq$“ zu zeigen, genügt es, zu sehen, daß $\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}$ ist. Dazu bemerke, daß, da die D_n aufsteigend sind, für $g, h \in \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $g, h \in D_n$. Nach (2.69) ist dann

$$gh \in D_{n+1} \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n.$$

Schließlich folgt durch eine Induktion, daß

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \; g \in D_n \quad \Rightarrow \quad g^{-1} \in D_n. \tag{2.71}$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

Satz 2.5.17. *Ist $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein endliches Randsystem,*

$$k := \max\{0, m + n - 3\}$$

und $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$, so folgt mit $M := \{r_i : i \in I_1\} \cup \{s_j : j \in I_2\}$, daß

$$P \in \mathcal{M}_{D_k}(I_1, I_2),$$

wobei D_k wie in (2.69) definiert ist (M ist hier allerdings, als Teilmenge der additiven Gruppe auf $\mathbb{R}$ aufzufassen). Insbesondere sind also alle Einträge von P in $\mathcal{G}(P)$.

Beweis. Induktion über $m + n$: Ist $m = 1$ oder $n = 1$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $m, n \geq 2$. Für den Induktionsschritt benutze man, daß $P \in \mathcal{E}(\mathcal{I})$. Per Induktion gilt mit

$$\begin{aligned} M_M^{i_0,j_0} &:= \{r_i : i \in I_1 \setminus \{i_0\}\} \cup \{(s_M^{j_0})_j : j \in I_2\} \text{ und} \\ M_N^{i_0,j_0} &:= \{(r_N^{i_0})_i : i \in I_1\} \cup \{s_j : j \in I_2 \setminus \{j_0\}\} : \end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned} &\forall_{(i_0,j_0) \in M(\mathcal{I})} \; P \in \mathcal{M}_{i_0,j_0}(\mathcal{I}) \quad \Rightarrow \quad P \in \mathcal{M}_{D_{k-1}(M_M^{i_0,j_0})}(I_1, I_2), \\ &\forall_{(i_0,j_0) \in N(\mathcal{I})} \; P \in \mathcal{N}_{i_0,j_0}(\mathcal{I}) \quad \Rightarrow \quad P \in \mathcal{N}_{D_{k-1}(M_N^{i_0,j_0})}(I_1, I_2). \end{aligned} \tag{2.73}$$

Damit ist alles gezeigt, denn es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, daß $D_{k-1}(M_M^{i_0,j_0}) \subseteq D_k(M)$ und $D_{k-1}(M_N^{i_0,j_0}) \subseteq D_k(M)$ (für $k = 1$ folgt das sofort aus (2.69) und (2.72); für $k > 1$ durch eine Induktion, da das Bilden von D_n, $n \in \mathbb{N}$, Inklusionen erhält). ∎

Beispiel 2.5.18. Für das Randsystem $\mathcal{I} := (\{1,2\},\{1,2\},(1,\sqrt{2}),(1,\sqrt{2}))$ ist der Graph $\mathcal{G} := \mathcal{G}(\mathcal{I})$ nicht abgeschlossen. Nach (2.70) ist $\mathcal{G}$ abzählbar. Daher genügt es wegen Lemma 2.4.9 zu zeigen, daß $\mathcal{G} \neq t\mathbb{Z}$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$. Das ist aber klar, denn je nachdem, ob t rational oder irrational ist, sind alle Elemente von $t\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ rational oder irrational. $\mathcal{G} \setminus \{0\}$ hingegen enthält sowohl rationale wie irrationale Elemente.

Nun soll gezeigt werden, daß sich für endliche Randsysteme $\mathcal{I}$ die Menge der Extremalpunkte von $\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$ aus $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ gewinnen läßt. Dazu wird in Definition 2.5.20 eine Menge $\mathcal{E}(\leq \mathcal{I})$ definiert und in Lemma 2.5.22 gezeigt, daß dies gerade die Menge der Extremalpunkte ist. Die Konstruktion stammt von Brualdi (siehe [2]).

Um die formale Definition von $\mathcal{E}(\leq \mathcal{I})$ durchsichtiger zu machen, soll das Verfahren zur Gewinnung der Elemente von $\mathcal{E}(\leq \mathcal{I})$ wie bei der Konstruktion von $\mathcal{E}(\mathcal{I})$ zunächst verbal beschrieben werden. Die Elemente von $\mathcal{E}(\leq \mathcal{I})$ lassen sich aus den Elementen von $\mathcal{E}(\mathcal{I})$ wie folgt gewinnen: Ist $P \in \mathcal{E}(\mathcal{I})$, so lösche man in jeder Zusammenhangskomponente von $G(P)$ einen Teilbaum und ersetze die den gelöschten Ecken entsprechenden Einträge von P durch Nullen. Die entstandene Matrix ist ein Element von $\mathcal{E}(\leq \mathcal{I})$.

Definition 2.5.19. Gegeben sei ein Randsystem $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$. Ist $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$, so sei $\mathcal{Z}(P) := \mathrm{Zhk}(G(P))$. Für $H \in \mathcal{Z}(P)$ definiere

$$\mathcal{T}(H) := \{T \leq H : T \text{ ist ein Baum}\} \cup \{(\emptyset,\emptyset)\}.$$

Weiterhin sei $\mathcal{F}(P)$ die Menge der Funktionen f auf $\mathcal{Z}(P)$ mit $\underset{H\in\mathcal{Z}(P)}{\forall} f(H) \in \mathcal{T}(H)$ (die Funktionen in $\mathcal{F}(P)$ ordnen also jeder Zusammenhangskomponente von $G(P)$ einen ihrer Teilbäume zu). Schließlich sei für $f \in \mathcal{F}(P)$,

$$\mathcal{E}(f) := \left\{(i,j) \in I_1 \times I_2 : \{x_i, y_j\} \in \bigcup_{T \in f(\mathcal{Z}(P))} E(T)\right\} \tag{2.74}$$

und $\mathcal{E}(P) := \{\mathcal{E}(f) : f \in \mathcal{F}(P)\}$.

Definition 2.5.20. Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein endliches Randsystem. Für Matrizen $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ und Mengen $I \in \mathcal{E}(P)$ definiere $P^I = (p^I_{i,j})_{(i,j)\in I_1\times I_2}$ durch

$$p^I_{i,j} := \begin{cases} 0 & \text{für } (i,j) \in I, \\ p_{i,j} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.75}$$

Dann sei $\mathcal{E}(\leq \mathcal{I}) := \{P^I : P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})),\, I \in \mathcal{E}(P)\}$.

Wie schon Definition 2.5.1 soll auch Definition 2.5.20 zunächst an einem Beispiel demonstriert werden. Im folgenden Beispiel 2.5.21 wird dazu für das Randsystem $\mathcal{I}$ aus Beispiel 2.5.2 $\mathcal{E}(\leq \mathcal{I})$ explizit berechnet.

Beispiel 2.5.21. Gegeben sei das Randsystem $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ mit $I_1 := \{1,2\}$, $I_2 := \{1,2,3\}$, $r := (2,5)$, $s := (1,1,5)$. Nach Beispiel 2.5.2 ist

$$\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = \mathcal{E}(\mathcal{I}) = \{P_1, P_2, P_3, P_4\} \quad \text{mit}$$

$$P_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad P_4 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$G(P_1)$, $G(P_2)$ und $G(P_3)$ haben alle nur eine Zusammenhangskomponente. Ersetzt man jeweils die Elemente, die Kanten eines Teilbaumes entsprechen, durch Nullen, so bekommt man die Mengen

$$\mathrm{E}_1 := \left\{ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&3\end{pmatrix} \right\} \quad \text{aus } P_1,$$

$$\mathrm{E}_2 := \left\{ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&4\end{pmatrix} \right\} \quad \text{aus } P_2,$$

$$\mathrm{E}_3 := \left\{ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&4\end{pmatrix} \right\} \quad \text{aus } P_3.$$

$G(P_4)$ hat hingegen zwei Zusammenhangskomponenten. Hier wird also jeweils in jeder der beiden Zusammenhangskomponenten ein Teilbaum gelöscht, und die Elemente von P_4, die zu den gelöschten Kanten gehören, werden durch Nullen ersetzt. So bekommt man aus P_4 die Menge

$$\mathrm{E}_4 := \left\{ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&5\end{pmatrix} \right\}.$$

Wegen $\mathcal{E}(\leq \mathcal{I}) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ bekommt man damit insgesamt

$$\mathcal{E}(\leq \mathcal{I}) = \left\{ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&4\end{pmatrix} \right\}.$$

Lemma 2.5.22. *Für ein endliches Randsystem $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ gilt*

$$\mathcal{E}(\leq \mathcal{I}) = \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})).$$

Beweis. „$\subseteq$": Sei $Q \in \mathcal{E}(\leq \mathcal{I})$ gegeben. Nach Definition 2.5.20 gibt es $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ und $I \in \mathcal{E}(P)$, so daß $Q = P^I$. Wegen (2.75) ist $Q \in \mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$ und

$$\mathrm{supp}(Q) = \mathrm{supp}(P) \setminus I.$$

Damit folgt $G(Q) \leq G(P)$, und da $G(P)$ ein Wald ist, muß auch $G(Q)$ ein Wald sein. Weiterhin gibt es nach Definition 2.5.19 $f \in \mathcal{F}(P)$ mit $I = \mathcal{E}(f)$. Ist nun $H \in \mathcal{Z}(Q)$, so gibt es genau ein $\tilde{H} \in \mathcal{Z}(P)$ mit $H \leq \tilde{H}$. Setze $T := f(\tilde{H})$. Nach Korollar 2.4.25 ist zu zeigen, daß $\#(V(H) \cap V_<(Q)) \leq 1$. Betrachte $\tilde{H} - E(T)$. Wegen (2.75) gilt dann $H \leq \tilde{H} - T$. Außerdem können H und T höchstens eine gemeinsame Ecke haben; denn sonst hätte $H +_e E(T) \leq G(Q)$ wegen $H \leq \tilde{H} - E(T)$ einen Kreis. Dies stände im Widerspruch dazu, daß $G(Q)$ ein Wald ist. Wegen

$$v \in V(H) \cap V_<(Q) \quad \Rightarrow \quad \underset{(i,j)\in I}{\exists} (\{x_i, y_j\} \in E(T),\ v \in \{x_i, y_j\}) \tag{2.76}$$

ist damit $\#(V(H) \cap V_<(Q)) \leq 1$ gezeigt und $Q \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$ nach Korollar 2.4.25.

„$\supseteq$": Angenommen $Q \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$. Nach Korollar 2.4.25 sind alle $H \in \mathcal{Z}(Q)$ Bäume, und es gilt $\#(V(H) \cap V_<(Q)) \leq 1$. Setze

$$\tilde{I}_1 := \{i \in I_1 : x_i \in V_<(Q)\}, \qquad \tilde{I}_2 := \{j \in I_2 : y_j \in V_<(Q)\}.$$

Da $\mathcal{I}$ ein Randsystem ist, gilt entweder $\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = \emptyset$ oder $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2 \neq \emptyset$. Ist $\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = \emptyset$, so folgt $Q \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$, und $Q \in \mathcal{E}(\leq \mathcal{I})$ ist klar. Sei nun $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2 \neq \emptyset$. $\tilde{Q} := Q\restriction_{\tilde{I}_1 \times \tilde{I}_2}$. Es folgt $\mathrm{supp}(\tilde{Q}) = \emptyset$ (das heißt $\tilde{Q} = 0$); denn gäbe es $(i,j) \in \mathrm{supp}(\tilde{Q})$, so wäre $\#(V(\mathrm{Zhk}_{G(Q)}(x_i)) \cap V_<(Q)) \geq 2$. Setze nun $\Delta\mathcal{I} := (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \Delta r, \Delta s)$ mit

$$(\Delta r)_i := r_i - \sum_{j \in I_2} q_{i,j}, \quad (\Delta s)_j := s_j - \sum_{i \in I_1} q_{i,j}. \tag{2.77}$$

Nun wähle eine Matrix $\tilde{P} \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\Delta\mathcal{I}))$ und definiere $P = (p_{i,j})_{(i,j)\in I_1 \times I_2}$ durch

$$p_{i,j} := \begin{cases} \tilde{p}_{i,j} & \text{für } (i,j) \in \tilde{I}_1 \times \tilde{I}_2, \\ q_{i,j} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.78}$$

Nach Satz 2.2.6 ist $G(\tilde{P})$ ein Wald. Außerdem ist $G(\tilde{P}) \leq G(P)$ und

$$E(G(P)) = E(G(\tilde{P})) \cup E(G(Q)).$$

Behauptung 1. $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.

Beweis. Nach den Definitionen (2.77) und (2.78) sowie der Wahl von $\tilde{P}$ ist klar, daß $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Es bleibt daher zu zeigen, daß $G(P)$ ein Wald ist. Ist $\tilde{H} \in \mathcal{Z}(Q)$, so haben $\tilde{H}$ und $G(\tilde{P})$ wegen

$$v \in V(\tilde{H}) \cap V(G(\tilde{P})) \quad \Rightarrow \quad v \in V(\tilde{H}) \cap V_<(Q)$$

höchstens eine gemeinsame Ecke. Ist also $H \in \mathcal{Z}(P)$ und

$$V(H) \cap V(G(\tilde{P})) \cap V(G(Q)) \neq \emptyset,$$

so gibt es eine Ecke $v \in V(H)$, so daß $H - v$ in zwei disjunkte Bäume zerfällt. In jedem Fall ist also H ein Baum. ▲

Wie gerade im Beweis von Behauptung 1 gesehen, gibt es zu $H \in \mathcal{Z}(P)$ höchstens eine Zusammenhangskomponente $\tilde{H}(H)$ von $G(\tilde{P})$ mit $\tilde{H}(H) \leq H$. Definiere nun auf $\mathcal{Z}(P)$ eine Funktion f durch

$$f(H) := \begin{cases} \tilde{H}(H) & \text{sofern } \tilde{H}(H) \text{ existiert,} \\ (\emptyset, \emptyset) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.79}$$

Dann ist $f \in \mathcal{F}(P)$ und $I := \mathcal{E}(f) = \operatorname{supp}(\tilde{P})$. Also ist mit der Bezeichnung aus Definition 2.5.20 $Q = P^I$ (wegen (2.75) und $\tilde{Q} = 0$), das heißt $Q \in \mathcal{E}(\leq \mathcal{I})$. ■

Bleibt noch zu bemerken, daß es wünschenswert wäre, die in 2.5.20 gegebene Definition von $\mathcal{E}(\leq \mathcal{I})$ auf $\leq$-Randsysteme auszudehnen, so daß Lemma 2.5.22 richtig bleibt.

2.6 Exponierte Punkte von Mengen doppelt stochastischer Matrizen

Betrachtet man konvexe Mengen, so gibt es außer den Extremalpunkten noch weitere ausgezeichnete Punkte, die sogenannten exponierten Punkte (siehe Definition 2.6.1). In diesem Abschnitt sollen exponierte Punkte von Mengen doppelt stochastischer Matrizen und deren Zusammenhang mit den Extremalpunkten untersucht werden.

Definition 2.6.1. Sei X ein reeller Vektorraum, $M \subseteq X$ konvex und $x_0 \in M$. Man nennt x_0 einen *exponierten Punkt* von M genau dann, wenn es ein lineares Funktional (das heißt eine lineare Abbildung $\xi : X \longrightarrow \mathbb{R}$) gibt, so daß

$$\underset{x \in M \setminus \{x_0\}}{\forall} \xi(x) < \xi(x_0). \tag{2.80}$$

Die Menge der exponierten Punkte von M wird mit $\operatorname{Exp}(M)$ bezeichnet.

Bemerkung 2.6.2. Sei X ein reeller Vektorraum, M eine konvexe Teilmenge von X und $x_0 \in M$. Dann ist x_0 genau dann ein exponierter Punkt von M, wenn es eine affine Abbildung $\tilde{\xi} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$\underset{x \in M \setminus \{x_0\}}{\forall} \tilde{\xi}(x) < \tilde{\xi}(x_0). \tag{2.81}$$

Insbesondere ist also die Menge $\operatorname{Exp}(M)$ unabhängig davon, in welchen Vektorraum X die Menge M eingebettet ist, solange die lineare Struktur auf M die gleiche bleibt.

Lemma 2.6.3. *Ist X ein reeller Vektorraum und $M \subseteq X$ konvex, so ist jeder exponierte Punkt von M auch extremal, das heißt* $\operatorname{Exp}(M) \subseteq \operatorname{E}(M)$.

Beweis. Es sei $x_0 \in \operatorname{Exp}(M)$ gegeben. Dann gibt es ein lineares Funktional ξ, so daß (2.80) gilt. Ist dann $x_0 := \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ mit $x_1, x_2 \in M$, so folgt $x_1 = 2x_0 - x_2$. Also ist $\xi(x_1) = 2\xi(x_0) - \xi(x_2) \geq \xi(x_0)$. Wegen (2.80) ist dann $x_1 = x_0$ und damit dann auch $x_2 = x_0$. ■

Die Umkehrung von Lemma 2.6.3 ist im allgemeinen falsch (ein Beispiel findet sich auf Seite 91 unten in [10]). Die Frage, ob sie im Fall $M = \mathcal{D}(\mathcal{I})$ für Randsysteme $\mathcal{I} = (I_1, I_2, r, s)$ richtig ist, erscheint schwierig (dabei kann $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ zum Beispiel als Teilmenge des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$ aufgefaßt werden). Der Untersuchung dieser Frage dient die folgende Definition 2.6.4.

Definition 2.6.4. Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Im folgenden sollen für $n \in \mathbb{N}$ Mengen $M_n(P), m_n(P) \subseteq I_1 \times I_2$ definiert werden. Ist das Indexpaar $(i,j) \in M_n(P)$ ($(i,j) \in m_n(P)$), so heißt $p_{i,j}$ ein $\mathcal{D}(\mathcal{I})$-*n-maximales* ($\mathcal{D}(\mathcal{I})$-*n-minimales*) Element von P. Setze dann $E_n(P) := M_n(P) \cup m_n(P)$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $(i,j) \in E_n(P)$ heißt dann $p_{i,j}$ ein $\mathcal{D}(\mathcal{I})$-*n-extremes* Element von P. Sind keine Verwechslungen möglich, so schreibe auch n-maximal (n-minimal, n-extrem) statt $\mathcal{D}(\mathcal{I})$-n-maximal ($\mathcal{D}(\mathcal{I})$-n-minimal, $\mathcal{D}(\mathcal{I})$-n-extrem), und lasse dabei n für $n = 1$ weg. Nun zu den Definitionen von $M_n(P)$ und $m_n(P)$:

(2.82)
$$\begin{aligned}
M_1(P) &:= \{(i,j) \in I_1 \times I_2 : \underset{Q \in \mathcal{D}(\mathcal{I})}{\forall} q_{i,j} \le p_{i,j}\},\\
m_1(P) &:= \{(i,j) \in I_1 \times I_2 : \underset{Q \in \mathcal{D}(\mathcal{I})}{\forall} q_{i,j} \ge p_{i,j}\},\\
M_n(P) &:= \Bigg\{(i,j) \in (I_1 \times I_2) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k(P) :\\
&\qquad \underset{Q \in \mathcal{D}(\mathcal{I})}{\forall} \Big(\Big(Q\restriction_{\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k(P)} = P\restriction_{\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k(P)}\Big) \Rightarrow q_{i,j} \le p_{i,j}\Big)\Bigg\}, n > 1,\\
m_n(P) &:= \Bigg\{(i,j) \in (I_1 \times I_2) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k(P) :\\
&\qquad \underset{Q \in \mathcal{D}(\mathcal{I})}{\forall} \Big(\Big(Q\restriction_{\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k(P)} = P\restriction_{\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k(P)}\Big) \Rightarrow q_{i,j} \ge p_{i,j}\Big)\Bigg\}, n > 1.
\end{aligned}$$

Bemerkung 2.6.5. Ist $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$, so ist

$$(I_1 \times I_2) \setminus \operatorname{supp}(P) \subseteq m_1(P) \subseteq E_1(P).$$

Satz 2.6.6. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem, $\#I_1, \#I_2 \le \omega$ und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Gilt*

$$\underset{Q \in \mathcal{D}(\mathcal{I})}{\forall} (Q\restriction_{E_1(P)} = P\restriction_{E_1(P)}) \quad \Rightarrow \quad P = Q), \tag{2.83}$$

so ist $P \in \operatorname{Exp}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.

Beweis. Nach Bemerkung 2.6.2 genügt es, eine affine Abbildung

$$\tilde{\xi} : \mathcal{D}(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

anzugeben, so daß

$$\underset{Q \in \mathcal{D}(\mathcal{I}) \setminus \{P\}}{\forall} \tilde{\xi}(Q) < \tilde{\xi}(P). \tag{2.84}$$

Dazu sei $(\alpha_i)_{i \in I_1}$ eine Familie in $\mathbb{R}^+$, so daß $\sum_{i \in I_1} \alpha_i = 1$ und

$$\sigma : I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{für } (i,j) \in M_1(P),\\ -1 & \text{für } (i,j) \in m_1(P),\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases} \tag{2.85}$$

Definiere dann $\tilde{\xi} : \mathcal{D}(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{\xi}(Q) := \sum_{(i,j)\in I_1\times I_2} \sigma(i,j)\frac{\alpha_i}{r_i}q_{i,j}. \tag{2.86}$$

Wegen

(2.87)
$$\underset{Q\in\mathcal{D}(\mathcal{I})}{\forall} |\tilde{\xi}(Q)| \leq \sum_{(i,j)\in I_1\times I_2} |\sigma(i,j)\frac{\alpha_i}{r_i}q_{i,j}| \leq \sum_{(i,j)\in I_1\times I_2} \frac{\alpha_i}{r_i}q_{i,j} = \sum_{j\in I_2}\frac{\alpha_j}{r_i}r_i = 1$$

ist $\tilde{\xi}$ wohldefiniert. Es ist dann klar, daß $\tilde{\xi}$ affin ist. Daß (2.84) gilt, folgt sofort aus den Definitionen von $M_1(P)$ und $m_1(P)$ sowie der Voraussetzung

$$\underset{Q\in\mathcal{D}(\mathcal{I})}{\forall} Q\restriction_{E_1(P)} = P\restriction_{E_1(P)} \quad\Rightarrow\quad P = Q. \tag{2.88}$$

Somit ist der Satz bewiesen. ■

Korollar 2.6.7. *Sei* $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ *ein Randsystem,*

$$\#I_1, \#I_2 \leq \omega$$

und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$*. Gilt*

$$\underset{Q\in\mathcal{D}(\mathcal{I})}{\forall} (\mathrm{supp}(Q) \subseteq \mathrm{supp}(P) \quad\Rightarrow\quad P = Q), \tag{2.89}$$

so ist $P \in \mathrm{Exp}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$*.*

Beweis. Die Behauptung folgt wegen

(2.90)
$$\underset{Q\in\mathcal{D}(\mathcal{I})}{\forall} \Big(Q\restriction_{E_1(P)} = P\restriction_{E_1(P)} \quad\overset{(2.6.5)}{\Rightarrow}\quad Q\restriction_{(I_1\times I_2)\setminus\mathrm{supp}(P)} = P\restriction_{(I_1\times I_2)\setminus\mathrm{supp}(P)}$$
$$\Rightarrow\quad \mathrm{supp}(Q) \subseteq \mathrm{supp}(P) \quad\Rightarrow\quad P = Q\Big)$$

aus Satz 2.6.6. ■

Korollar 2.6.8. *Sei* $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ *ein Randsystem mit*

$$\sum_{i\in I_1} r_i = \sum_{j\in I_2} s_j < \infty,$$

so gilt $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = \mathrm{Exp}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$*.*

Beweis. Nach Lemma 2.6.3 ist nur „$\subseteq$“ zu zeigen, und das folgt aus Korollar 2.6.7 und Satz 2.4.16. ■

Korollar 2.6.8 ist gerade Proposition 2 aus [4], wobei dort die Voraussetzung

$$\sum_{i\in I_1} r_i = \sum_{j\in I_2} s_j < \infty$$

fehlt. Der in [4] gegebene Beweis, ist jedoch nur unter dieser Voraussetzung richtig.

Korollar 2.6.9. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem,*

$$\#I_1, \#I_2 \leq \omega$$

und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Gilt für jede Zusammenhangskomponente H von $G(P)$, daß

$$\sum_{x_i \in V(H)} r_i < \infty,$$

so ist $P \in \operatorname{Exp}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ genau dann, wenn $P \in \operatorname{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.

Beweis. Nach Lemma 2.6.3 ist nur „$\Leftarrow$" zu zeigen, und das folgt aus Korollar 2.6.7 und Korollar 2.4.18. ■

Beispiel 2.6.10. Definiere

$$P := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \\ & \frac{1}{3} & & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.91}$$

und $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s) := \mathcal{I}(P)$. Dann gilt

$$\underset{Q \in \mathcal{D}(\mathcal{I})}{\forall} (\operatorname{supp}(Q) \subseteq \operatorname{supp}(P) \quad \Rightarrow \quad P = Q). \tag{2.92}$$

Nach Korollar 2.6.7 ist daher $P \in \operatorname{Exp}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.

Es stellt sich heraus, daß Satz 2.6.6 nicht wirklich allgemeiner ist als Korollar 2.6.7. Es gilt das folgende Lemma:

Lemma 2.6.11. *$\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ sei ein Randsystem und $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &\underset{Q \in \mathcal{D}(\mathcal{I})}{\forall} (\operatorname{supp}(Q) \subseteq \operatorname{supp}(P) \quad \Rightarrow \quad P = Q) \\ \Leftrightarrow \quad &\underset{Q \in \mathcal{D}(\mathcal{I})}{\forall} (Q\restriction_{E_1(P)} = P\restriction_{E_1(P)} \quad \Rightarrow \quad P = Q). \end{aligned} \tag{2.93}$$

Beweis. Behauptung 1. Gilt $\#\operatorname{supp}(P) \geq 2$, so ist $m_1(P) = (I_1 \times I_2) \setminus \operatorname{supp}(P)$.

Beweis. Es ist nur „$\subseteq$" zu zeigen. Sind (i_1, j_1) und (i_2, j_2) zwei beliebige aber verschiedene Elemente aus dem Träger von P, so sei $\epsilon := \min\{p_{i_1,j_1}, p_{i_2,j_2}\}$ und $Q = (q_{i,j})_{(i,j) \in I_1 \times I_2}$ definiert durch

$$Q\restriction_{(I_1 \times I_2) \setminus \{(i_1,j_1),(i_2,j_2)\}} = P\restriction_{(I_1 \times I_2) \setminus \{(i_1,j_1),(i_2,j_2)\}},$$

$$q_{i,j} := \begin{cases} p_{i_1,j_1} - \epsilon & \text{für } (i,j) = (i_1, j_1), \\ p_{i_2,j_2} - \epsilon & \text{für } (i,j) = (i_2, j_2), \\ p_{i,j} + \epsilon & \text{für } (i,j) \in \{(i_1, j_2), (i_2, j_1)\}. \end{cases} \tag{2.94}$$

Dann ist $Q \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ und $q_{i_1,j_1} < p_{i_1,j_1}$, $q_{i_2,j_2} < p_{i_2,j_2}$. Also sind die Indexpaare (i_1, j_1) und (i_2, j_2) nicht in $m_1(P)$. ▲

Behauptung 2. Für ein Indexpaar $(i,j) \in I_1 \times I_2$ gilt $(i,j) \in M_1(P)$ genau dann, wenn $p_{i,j} \in \{r_i, s_j\}$.

Beweis. Es ist nur „⇒" zu zeigen. Angenommen, es ist $p_{i,j} \notin \{r_i, s_j\}$. Dann gibt es Elemente $i_2 \in I_1$ und $j_1 \in I_2$, so daß $(i, j_1), (i_2, j) \in \operatorname{supp}(P)$. Setze nun $i_1 := i$ und $j_2 := j$, und definiere eine Matrix Q wie in Behauptung 1. Dann ist

$$q_{i,j} = q_{i_1,j_2} > p_{i,j},$$

womit $(i,j) \notin M_1(P)$ gezeigt ist. ▲

Für den Beweis des Lemmas ist nach dem Argument aus Korollar 2.6.7 nur noch „⇐" zu zeigen, und man kann annehmen, daß $\#\operatorname{supp}(P) \geq 2$. Ist nun $Q \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ und $\operatorname{supp}(Q) \subseteq \operatorname{supp}(P)$, so gilt $Q{\restriction}_{(I_1 \times I_2)\setminus\operatorname{supp}(P)} = P{\restriction}_{(I_1 \times I_2)\setminus\operatorname{supp}(P)}$, und das heißt $Q{\restriction}_{m_1(P)} = P{\restriction}_{m_1(P)}$ nach Behauptung 1. Dann folgt aber aus Behauptung 2 sofort, daß auch $Q{\restriction}_{M_1(P)} = P{\restriction}_{M_1(P)}$ gelten muß. Also gilt $Q{\restriction}_{E_1(P)} = P{\restriction}_{E_1(P)}$ und damit $P = Q$. ■

Offene Fragen sind zur Zeit, ob Satz 2.6.6 richtig bleibt, wenn $E_1(\ \ )$ durch die Menge $\bigcup_{n=1}^{k} E_n(\ \ )$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ersetzt wird oder wenn die Einschränkung

$$\#I_1, \#I_2 \leq \omega$$

fallen gelassen wird. Generell scheint es ziemlich aussichtslos zu sein, zu zeigen, daß eine extremale Matrix P nach Definition 2.6.1 nicht exponiert ist. Es wird wahrscheinlich notwendig sein, die Definition so abzuändern, daß nur noch stetige lineare Abbildungen bezüglich einer noch zu vereinbarenden Topologie für die Abbildung ξ zugelassen werden. Der Beweis, daß eine Matrix nicht exponiert ist, könnte dann mit Hilfe einer Darstellung aller solchen stetigen linearen Funktionale erfolgen.

Beispiel 2.6.12. Sei P die Matrix aus Beispiel 2.4.13. Dann gilt $M_2(P) = A$ und $m_2(P) = B$ mit

$$\begin{aligned} A &:= \{(1,1)\} \cup \{(i,j) \in I_1 \times I_2 : (j = i+1,\ i \text{ gerade}) \\ &\qquad\qquad \text{oder } (i = j+1,\ i \text{ ungerade})\}, \\ B &:= ((I_1 \times I_2) \setminus \operatorname{supp}(P)) \cup \{(i,j) \in I_1 \times I_2 : (j = i+1,\ i \text{ ungerade}) \\ &\qquad\qquad \text{oder } (i = j+1,\ i \text{ gerade})\} : \end{aligned} \tag{2.95}$$

Ist $Q \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ mit

$$Q{\restriction}_{(I_1 \times I_2)\setminus\operatorname{supp}(P)} = P{\restriction}_{(I_1 \times I_2)\setminus\operatorname{supp}(P)}$$

sowie $q_{i,j} > p_{i,j}$ für ein $(i,j) \in A$ oder $q_{i,j} < p_{i,j}$ für ein $(i,j) \in B$, so folgt mit $\delta := |p_{i,j} - q_{i,j}|$, daß wegen

$$\begin{aligned} \cdots = &p_{4,3} - q_{4,3} = q_{2,3} - p_{2,3} = p_{2,1} - q_{2,1} = q_{1,1} - p_{1,1} = p_{1,2} - q_{1,2} = q_{3,2} - p_{3,2} \\ = &p_{3,4} - q_{3,4} = \ldots \end{aligned}$$

für alle nach (2.38) definierten a_n, $n \in \mathbb{N}$ gilt, daß $\delta \leq a_n$. Daraus folgt dann aber $\delta = 0$. Offen bleibt, ob P exponiert ist oder nicht.

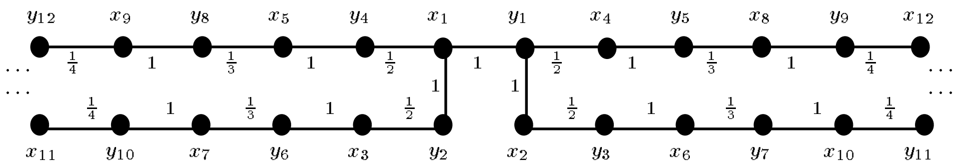

Abbildung 2.6: Der Graph soll, wie angedeutet, nach links und rechts ins Unendliche fortgesetzt werden. Das Bildungsgesetz für die Ecken ist dabei links oben $\ldots, y_{4(n+1)}, x_{4n+1}, \ldots$, links unten $\ldots, x_{4n+3}, y_{4n+2}, \ldots$, rechts oben $\ldots, y_{4n+1}, x_{4(n+1)}, \ldots$, rechts unten $\ldots, x_{4n+2}, y_{4n+3}, \ldots$.

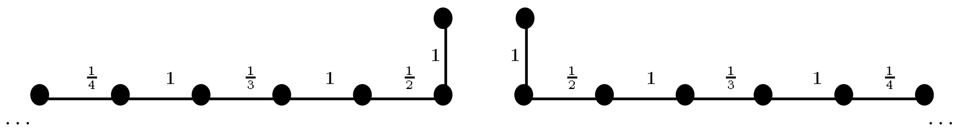

Abbildung 2.7: Graphen dieser Form sollen an den Graphen aus Abbildung 2.6 so angefügt werden, daß die beiden Zusammenhangskomponenten durch eine Kante mit Gewicht Eins überbrückt werden.

Ein weiteres Beispiel einer extremalen Matrix, für die zur Zeit nicht klar ist, ob sie exponiert ist oder nicht, ist durch den Graphen in Abbildung 2.6 gegeben (nach der in Bemerkung 2.1.5 beschriebenen Identifikation).

Alle Elemente außer $p_{1,1}$ sind 2-extrem. $p_{1,1}$ ist nicht 2-extrem, jedoch sowohl 3-minimal als auch 3-maximal. Durch Einfügen immer weiterer Graphen (abzählbar vieler), wie in den Abbildungen 2.7 und 2.8 beschrieben, lassen sich nun beliebig komplizierte Matrizen mit k-extremen Elementen unterschiedlichster Ordnung erzeugen. Für alle diese Matrizen müßte man die Frage der Exponiertheit klären, um das Problem, ob es extremale MatrizendexMatrix!extremale geben kann, die nicht exponiert sind, lösen zu können; denn es gilt in Verallgemeinerung von Lemma 2.4.15 der folgende Satz:

Satz 2.6.13. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem. Ist $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$, und gilt*

$$\forall_{Q \in \mathcal{D}(\mathcal{I})} \left(Q{\restriction}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n(P)} = P{\restriction}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n(P)} \quad\Rightarrow\quad P = Q\right), \tag{2.96}$$

so ist $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.

Beweis. Angenommen, $P \notin \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. Dann gibt es nach Lemma 2.1.13 (b) eine Matrix $E \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2)$, so daß sich alle Linien von E zu Null summieren und $P \pm E \geq 0$. Das Ziel ist, zu zeigen, daß $E = 0$. Nach Voraussetzung genügt es dazu, $E{\restriction}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_k(P)} = 0$ zu beweisen. Dafür wird nun durch Induktion nach n gezeigt, daß $E{\restriction}_{E_n(P)} = 0$. Sei $n = 1$. Angenommen, es ist $(i, j) \in E_1(P)$ und $e_{i,j} \neq 0$. Dann ist $p_{i,j} + e_{i,j} > p_{i,j}$ und $p_{i,j} - e_{i,j} < p_{i,j}$, was wegen $P \pm E \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ und Definition von $E_1(P)$ jedoch nicht sein kann. Für $n > 1$ gilt per Induktion

$$(P \pm E){\restriction}_{\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k(P)} = P{\restriction}_{\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k(P)}.$$

Nun folgt wie für $n = 1$, daß auch $E{\restriction}_{E_n(P)} = 0$. ∎

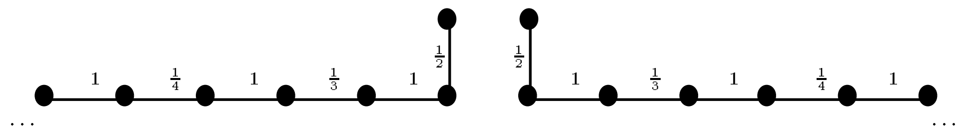

Abbildung 2.8: Graphen dieser Form sollen an den Graphen aus Abbildung 2.6 so angefügt werden, daß die beiden Zusammenhangskomponenten durch eine Kante mit Gewicht $\frac{1}{n}$ überbrückt werden.

Kapitel 3

Kardinalitätsbetrachtungen für Mengen extremaler Matrizen

3.1 Allgemeines

In diesem Abschnitt geht es darum, für gegebene Randsysteme (und gelegentlich für $\leq$-Randsysteme) $\mathcal{I}$ die Kardinalität von $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ (von $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$) zu untersuchen.

Bemerkung 3.1.1. Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\leq$-Randsystem. Ist dann

$$\tilde{\mathcal{I}} := (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{r}, \tilde{s})$$

ein weiteres $\leq$-Randsystem mit

$$I_{1,nt} = \tilde{I}_{1,nt}, \quad I_{2,nt} = \tilde{I}_{2,nt}, \quad r\restriction_{I_{1,nt}} = \tilde{r}\restriction_{I_{1,nt}}, \quad s\restriction_{I_{2,nt}} = \tilde{s}\restriction_{I_{2,nt}},$$

so gilt $\#\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}) = \#\mathcal{D}(\leq \tilde{\mathcal{I}})$, $\#\mathcal{D}(\mathcal{I}) = \#\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}})$,

$$\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})) = \#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \tilde{\mathcal{I}})), \quad \#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = \#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{I}})).$$

Die Kardinalität von $\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$, $\mathcal{D}(\mathcal{I})$, $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$ und $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ hängt also nur von den nichttrivialen Indizes ab.

Bemerkung 3.1.2. Es sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein $\leq$-Randsystem.

(a) Ist $\tilde{\mathcal{I}} := (\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{r}, \tilde{s})$ ein weiteres $\leq$-Randsystem, und gibt es Bijektionen

$$b_1 : I_1 \longrightarrow \tilde{I}_1, \qquad b_2 : I_2 \longrightarrow \tilde{I}_2$$

mit $\underset{i \in I_1}{\forall}\ r_i = \tilde{r}_{b_1(i)}$ und $\underset{j \in I_2}{\forall}\ s_j = \tilde{s}_{b_2(j)}$, so ist durch

$$L : \mathcal{D}(\leq \mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{D}(\leq \tilde{I}), \quad P \mapsto \tilde{P} := L(P) \tag{3.1}$$

mit $\underset{(i,j) \in \tilde{I}_1 \times \tilde{I}_2}{\forall}\ \tilde{p}_{i,j} = p_{b_1^{-1}(i), b_2^{-1}(j)}$ eine affine Bijektion gegeben, das heißt, insbesondere gilt $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})) = \#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \tilde{\mathcal{I}}))$ nach Bemerkung 1.1.4. Die Aussage bleibt richtig, wenn man die $\leq$-Zeichen wegläßt.

(b) Definiere das transponierte $\leq$-Randsystem $\mathcal{I}^t := (I_2, I_1, s, r)$. Dann ist durch

$$L_t : \mathcal{D}(\leq \mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{D}(\leq \mathcal{I}^t), \quad L_t(P) = P^t \tag{3.2}$$

eine affine Bijektion gegeben. Insbesondere also $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})) = \#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}^t))$. Die Aussage gilt noch immer, wenn man die $\leq$-Zeichen wegläßt.

(c) Für $m \in \mathbb{R}^+$ definiere $m\mathcal{I} := (I_1, I_2, mr, ms)$. Dann ist durch

$$L_m : \mathcal{D}(\leq \mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{D}(\leq \mathcal{I}^t), \quad L_m(P) = mP \tag{3.3}$$

eine affine Bijektion gegeben, das heißt, wiederum gilt

$$\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})) = \#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})).$$

Erneut gilt die Aussage auch ohne die $\leq$-Zeichen.

Satz 3.1.3. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem.*

(a) *Für $\min\{\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt}\} \leq 1$ ist $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = \#\mathcal{D}(\mathcal{I}) = 1$.*

($\mathbf{a}_\leq$) *Für $\min\{\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt}\} \leq 1$ ist $\#\mathrm{E}(\leq \mathcal{D}(\mathcal{I})) = 2^{\max\{\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt}\}}$.*

(b) *Für $\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt} < \infty$ ist $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) < \infty$.*

($\mathbf{b}_\leq$) *Für $\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt} < \infty$ ist $\#\mathrm{E}(\leq \mathcal{D}(\mathcal{I})) < \infty$.*

(c) *Ist $2 \leq \min\{\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt}\}$, $\max\{\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt}\} = \alpha \geq \omega$ und*

$$\omega \cdot \#I_{1,nt} = \omega \cdot \#I_{2,nt},$$

so ist $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 2^\alpha$.

($\mathbf{c}_\leq$) *Ist $2 \leq \min\{\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt}\}$, $\max\{\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt}\} = \alpha \geq \omega$ und*

$$\omega \cdot \#I_{1,nt} = \omega \cdot \#I_{2,nt},$$

so ist $\#\mathrm{E}(\leq \mathcal{D}(\mathcal{I})) = 2^\alpha$.

Beweis. (a) ist klar.
(b) folgt aus Satz 2.5.17 und der Tatsache, daß für endliches M auch alle in (2.69) definierten $D_n(M)$ endlich sind.
(c) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß $I_1 = I_{1,nt}$ und $I_2 = I_{2,nt}$. „$\leq$" folgt dann wegen $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) \subseteq \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$ und

$$\#\mathbb{R}^{I_1 \times I_2} = (2^\omega)^\alpha = 2^\alpha.$$

„$\geq$": Zunächst sei

$$\sum_{i \in I_1} r_i = \sum_{j \in I_2} s_j < \infty.$$

Dann folgt $\#I_1, \#I_2 \leq \omega$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\#I_2 = \omega$. Wähle $i_0 \in I_1$ beliebig und $j_0 \in I_2$, so daß $s_{j_0} = \max\{s_j : j \in I_2\}$.

Behauptung 1. Es gibt eine endliche Menge $T_e \subseteq I_2 \setminus \{j_0\}$ mit

$$r_{i_0} - s_{j_0} < \sum_{j \in T_e} s_j < r_{i_0}. \tag{3.4}$$

Beweis. Für $s_{j_0} \geq r_{i_0}$ ist das klar. Sei nun $s_{j_0} < r_{i_0}$. Wegen

$$r_{i_0} - s_{j_0} < \sum_{j \in I_2 \setminus \{j_0\}} s_j$$

gibt es eine endliche Menge $T_e \subseteq I_2 \setminus \{j_0\}$ mit

$$r_{i_0} - s_{j_0} < \sum_{j \in T_e} s_j \qquad \text{und} \tag{3.5}$$

$$\underset{\nu \in T_e}{\exists} \sum_{j \in T_e \setminus \{\nu\}} s_j \leq r_{i_0} - s_{j_0}. \tag{3.6}$$

Indem man für den Fall, daß $\sum_{j \in T_e \setminus \{\nu\}} s_j = r_{i_0} - s_{j_0}$ gilt, in T_e das Element ν durch ein Element ν' mit $s_{\nu'} < s_\nu$ ersetzt (das geht, da es $s_{\nu'}$ mit beliebig kleinem positiven Betrag geben muß), kann man T_e immer so wählen, daß in (3.6) sogar „$<$“ gilt. Daraus folgt wegen $s_{j_0} = \max\{s_j : j \in I_2\}$, daß T_e (3.4) erfüllt. ▲

Setze $\delta := \frac{r_{i_0} - \sum_{j \in T_e} s_j}{2}$ und wähle $T_\omega \subseteq (I_2 \setminus \{j_0\}) \setminus T_e$ mit $\# T_\omega = \omega$ und

$$\sum_{j \in T_\omega} s_j \leq \delta.$$

Ist dann

$$\mathcal{T} := \{T_e \dot\cup T : T \subseteq T_\omega\}, \tag{3.7}$$

so ist $\# \mathcal{T} = 2^\omega$. Für $T \in \mathcal{T}$ definiere

$$\mathcal{I}^T := (I_1^T, I_2, r^T, s^T)$$

mit $I_1^T := I_1 \setminus \{i_0\}$, $r^T := r\restriction_{I_1^T}$ sowie $s^T = (s_j^T)_{j \in I_2}$ mit

$$s_j^T := \begin{cases} 0 & \text{für } j \in T, \\ s_j & \text{für } j \in I_2 \setminus (T \cup \{j_0\}), \\ s_{j_0} - r_{i_0} + \sum_{\nu \in T} s_\nu & \text{für } j = j_0. \end{cases} \tag{3.8}$$

$\mathcal{I}^T$ ist wegen (3.4) ein Randsystem. Nun wähle eine Matrix $Q \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}^T))$ und definiere $P^T = (p_{i,j}^T)_{(i,j) \in I_1 \times I_2}$ durch $P^T\restriction_{I_1^T \times I_2} := Q$ und

$$p_{i_0,j}^T := \begin{cases} s_j & \text{für } j \in T, \\ r_{i_0} - \sum_{\nu \in T} s_\nu & \text{für } j = j_0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.9}$$

Behauptung 2. $P^T \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.

Beweis. Angenommen, es gilt $P^T = \frac{1}{2}P^{(1)} + \frac{1}{2}P^{(2)}$, $P^{(1)}, P^{(2)} \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Mit

$$Q := P\lceil_{I_1^T \times I_2},$$

$Q^{(k)} := P^{(k)}\lceil_{I_1^T \times I_2}$ für $k = 1, 2$ gilt $Q = \frac{1}{2}Q^{(1)} + \frac{1}{2}Q^{(2)}$. Nach Definition von P^T ist $Q \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}^T))$. Also folgt $Q^{(1)} = Q^{(2)} = Q$. Wegen $P, P^{(1)}, P^{(2)} \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ folgt daraus $P = P^{(1)} = P^{(2)}$. Also ist $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. ▲

Wegen (3.9) ist die durch $T \mapsto P^T$ gegebene Abbildung injektiv. Damit folgt

$$\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) \geq 2^\omega.$$

Nun soll der Fall $\sum_{i \in I_1} r_i = \sum_{j \in I_2} s_j = \infty$ betrachtet werden. In diesem Fall ist $\#I_1, \#I_2 \geq \omega$, und das bedeutet wegen $\omega \cdot \#I_1 = \omega \cdot \#I_2$, daß $\#I_1 = \#I_2 = \alpha$. Es gibt nun Randsysteme $(\mathcal{I}_k = (I_{1,k}, I_{2,k}, r^k, s^k))_{k \in \alpha}$, so daß für alle $k \in \alpha$, $\mathcal{I}_k \leq \mathcal{I}$, $I_1 = \dot{\bigcup}_{k \in \alpha} I_{1,k}$, $I_2 = \dot{\bigcup}_{k \in \alpha} I_{2,k}$, $\#I_{1,k} = \#I_{2,k} = \omega$ sowie

$$\sum_{i \in I_{1,k}} r_i = \sum_{j \in I_{2,k}} s_j = \infty.$$

Für $\alpha > \omega$ ist das gerade die Aussage von Behauptung 1 von Satz 2.1.18. Für $\alpha = \omega$ kann man wie folgt vorgehen: Man konstruiert eine Familie $(T_{k,n})_{(k,n) \in \omega \times \omega}$ von paarweise disjunkten Teilmengen von I_1, so daß $\underset{(k,n) \in \omega \times \omega}{\forall} \sum_{i \in T_{k,n}} r_i \geq 1$ (die formale Konstruktion der $T_{k,n}$ erfolgt rekursiv unter Verwendung einer Abzählung von $\omega \times \omega$ und der Voraussetzung $\sum_{i \in I_1} r_i = \infty$). Nun setze noch $I_{1,k} := \bigcup_{n \in \omega} T_{k,n}$ für $k \in \omega$. Analog bekommt man aus I_2 die Mengen $I_{2,k}$, $k \in \omega$.
Als nächstes bemerke man, daß es für jedes der Randsysteme $\mathcal{I}_k$ Matrizen

$$P^{(k)}, Q^{(k)} \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}_k))$$

mit $P^{(k)} \neq Q^{(k)}$ gibt. Das folgt aus Beispiel 2.1.17: Dort wurde in Abhängigkeit von gegebenen Abzählungen von I_1 und I_2 ein Element $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ konstruiert. Die Konstruktion erfolgte so, daß für $0 \neq r_1, s_1$ auch $0 \neq p_{1,1}$. Man muß also lediglich die gleiche Konstruktion an einer Stelle (i_0, j_0) beginnen, an der $p_{i_0,j_0} = 0$ ist, und man bekommt eine Matrix $Q \neq P$.
Ist nun eine Funktion $f : \alpha \longrightarrow 2$ gegeben, so definiere $P^f = (p^f_{i,j})_{(i,j) \in I_1 \times I_2}$ durch

$$p^f_{i,j} := \begin{cases} p^{(k)}_{i,j} & \text{für } (i,j) \in I_{1,k} \times I_{2,k} \text{ und } f(k) = 0, \\ q^{(k)}_{i,j} & \text{für } (i,j) \in I_{1,k} \times I_{2,k} \text{ und } f(k) = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.10}$$

Wie in Behauptung 2 von Satz 2.1.18 folgt, daß $P^f \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. Da die durch $f \mapsto P^f$ definierte Abbildung nach (3.10) injektiv ist, folgt $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) \geq 2^\alpha$.
Für den Beweis von $(a_\leq)$, $(b_\leq)$ und $(c_\leq)$ seien die Bezeichnungen wie in Definition 2.5.19.
$(a_\leq)$: Sei $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = \{P\}$. In diesem Fall hat $G(P)$ höchstens eine Zusammenhangskomponente Z, deren Kantenmenge nicht leer ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß

$$V(Z) = \{x_{i_1}\} \cup \{y_j : j \in I_2\}, \qquad E(Z) = \{\{x_{i_1}, y_j\} : j \in I_2\}.$$

Jede Teilmenge von $E(Z)$ liefert ein Element von $\mathcal{E}(P)$ und umgekehrt. Also folgt $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})) = \#\mathcal{E}(P) = 2^{\max\{\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt}\}}$.

($b_\leq$): Da $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ endlich ist und für $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ die Mengen $\mathcal{Z}(P)$, $\mathcal{F}(P)$, $\mathcal{E}(P)$ alle endlich sind, muß auch $\mathcal{E}(\leq \mathcal{I}) = \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$ endlich sein.
($c_\leq$): „$\leq$" folgt analog zu dem entsprechenden Beweis in (c). „$\geq$" folgt wegen $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) \subseteq \mathrm{E}(\mathcal{D}(\leq \mathcal{I}))$ sofort aus (c). ■

Die Frage, wie ($a_\leq$), ($b_\leq$) und ($c_\leq$) modifiziert werden müssen, wenn $\mathcal{I}$ zwar ein $\leq$-Randsystem jedoch kein Randsystem ist, soll hier jetzt nicht weiter untersucht werden. Meine Vermutung ist, daß die Aussage ($b_\leq$) richtig bleibt. Ein Beweis könnte sich zum Beispiel ergeben, wenn es gelingt, die Definition von $\mathcal{E}(\leq \mathcal{I})$ aus 2.5.20 auf beliebige $\leq$-Randsysteme $\mathcal{I}$ auszudehnen, so daß Lemma 2.5.22 richtig bleibt. Für den Fall, daß in ($c_\leq$) $\mathcal{I}$ ein Randsystem mit $\beta := \min\{\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt}\} < \alpha$ ist, muß man vermutlich die Zahl 2^α durch $\alpha \cdot 2^\beta$ ersetzen.

3.2 Der Fall $2 \times \omega$

Im folgenden werden Randsysteme $\mathcal{I} = (I_1, I_2, r, s)$ untersucht, bei denen eine der beiden Indexmengen nur zwei Elemente hat. Es wird ein Verfahren zur Gewinnung der Extremalpunkte angegeben. Dazu wird in Definition 3.2.1 eine Menge $\mathcal{E}_2(\mathcal{I})$ konstruiert und dann in Satz 3.2.3 gezeigt, daß $\mathcal{E}_2(\mathcal{I}) = \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. Anschließend werden daraus Informationen über $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ gewonnen.

Definition 3.2.1. Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem mit

$$\min\{\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt}\} = 2.$$

Dann definiere eine Menge $\mathcal{E}_2(\mathcal{I})$, wie folgt:
Zunächst nehme man an, daß $I_1 = \{i_1, i_2\}$, $i_1 \neq i_2$, $r_{i_2} \geq r_{i_1} > 0$ und $I_2 = I_{2,nt}$. Definiere

$$\mathcal{T}_=(\mathcal{I}) := \left\{ T \subseteq I_2 : \sum_{j \in T} s_j = r_{i_1} \right\} \tag{3.11}$$

und für $j_0 \in I_2$ definiere

$$\mathcal{T}_{j_0}(\mathcal{I}) := \left\{ T \subseteq I_2 \setminus \{j_0\} : r_{i_1} - s_{j_0} < \sum_{j \in T} s_j < r_{i_1} \right\}. \tag{3.12}$$

Ist $T \in \mathcal{T}_=(\mathcal{I})$, so definiere $P^{T,=} = (p_{i,j}^{T,=})_{(i,j) \in I_1 \times I_2}$ durch

$$p_{i_1,j}^{T,=} := \begin{cases} s_j & \text{für } j \in T, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad p_{i_2,j}^{T,=} := \begin{cases} s_j & \text{für } j \in (I_2 \setminus T), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.13}$$

sowie

$$\mathcal{E}_2^=(\mathcal{I}) := \{P^{T,=} : T \in \mathcal{T}_=\}. \tag{3.14}$$

Ist hingegen $T \in \mathcal{T}_{j_0}(\mathcal{I})$, so sei $P^{T,j_0} = (p_{i,j}^{T,j_0})_{(i,j)\in I_1\times I_2}$ definiert durch

$$\begin{aligned} p_{i_1,j}^{T,j_0} &:= \begin{cases} s_j & \text{für } j \in T, \\ 0 & \text{für } j \in (I_2 \setminus T) \setminus \{j_0\}, \\ r_{i_1} - \sum_{\nu\in T} s_\nu & \text{für } j = j_0, \end{cases} \\ p_{i_2,j}^{T,j_0} &:= \begin{cases} 0 & \text{für } j \in T, \\ s_j & \text{für } j \in (I_2 \setminus T) \setminus \{j_0\}, \\ r_{i_2} - \sum_{\nu\in (I_2\setminus T)\setminus\{j_0\}} s_\nu & \text{für } j = j_0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.15}$$

sowie

$$\mathcal{E}_2^{j_0}(\mathcal{I}) := \{P^{T,j_0} : T \in \mathcal{T}_{j_0}(\mathcal{I})\}. \tag{3.16}$$

Schließlich sei

$$\mathcal{E}_2(\mathcal{I}) := \mathcal{E}_2^{=}(\mathcal{I}) \cup \bigcup_{j_0\in I_2} \mathcal{E}_2^{j_0}(\mathcal{I}). \tag{3.17}$$

Ist $I_1 \neq I_{1,nt}$ oder $I_2 \neq I_{2,nt}$, so wird $\mathcal{E}_2(\mathcal{I})$ genauso konstruiert, nur daß noch entsprechend viele Nullzeilen eingefügt werden. Für $\#I_{2,nt} = 2$ erfolgt die Definition von $\mathcal{E}_2(\mathcal{I})$ analog, nur daß die Rollen von I_1 und I_2 sowie die Rollen von r und s vertauscht sind.

In Beispiel 3.2.2 wird die Konstruktion aus Definition 3.2.1 für ein konkretes Randsystem durchgeführt. Es wird erneut das Randsystem aus Beispiel 2.5.2 verwendet. Insbesondere wird somit der Unterschied der Konstruktionen von Definition 3.2.1 und Definition 2.5.1 herausgestellt.

Beispiel 3.2.2. Gegeben sei das Randsystem $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ mit

$$I_1 := \{1, 2\}, \qquad I_2 := \{1, 2, 3\},$$

$r := (2, 5)$, $s := (1, 1, 5)$. Es soll nun $\mathcal{E}_2(\mathcal{I})$ explizit berechnet werden. Setze $i_1 := 1$, $i_2 := 2$. Dann ist $r_{i_2} = 5 > r_{i_1} = 2 > 0$. Weiterhin ist $r_{i_1} - s_1 = r_{i_1} - s_2 = 1$ sowie $r_{i_1} - s_3 = -3$, also nach (3.11) und (3.12)

$$\mathcal{T}_=(\mathcal{I}) = \{\{1, 2\}\}, \quad \mathcal{T}_1(\mathcal{I}) = \emptyset, \quad \mathcal{T}_2(\mathcal{I}) = \emptyset, \quad \mathcal{T}_3(\mathcal{I}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}.$$

Nach (3.13) und (3.15) ist dann

$$P^{\{1,2\},=} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad P^{\emptyset,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P^{\{1\},3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$
$$P^{\{2\},3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich folglich

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(\mathcal{I}) &= \mathcal{E}_2^{=}(\mathcal{I}) \cup \bigcup_{j_0\in I_2} \mathcal{E}_2^{j_0}(\mathcal{I}) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 2.5.2.

Daß dies kein Zufall war, besagt folgender

Satz 3.2.3. *Sei* $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ *ein Randsystem mit*

$$\min\{\#_{nt} I_1, \#_{nt} I_2\} = 2.$$

Dann gilt $\mathcal{E}_2(\mathcal{I}) = \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.

Beweis. Angenommen, es ist $\#I_{1,nt} = 2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $I_1 = \{i_1, i_2\}$, $i_1 \neq i_2$, $r_{i_2} \geq r_{i_1} > 0$, $I_2 = I_{2,nt}$.
„$\supseteq$": Sei $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. Wähle $j_0 \in I_2$, so daß $p_{i_1,j_0} > 0$ und $\underset{j \in I_2 \setminus \{j_0\}}{\forall} 0 \in \{p_{i_1,j}, p_{i_2,j}\}$ (so ein j_0 gibt es, da $r_{i_1} > 0$ und $G(P)$ kreisfrei ist). Setze

$$T := \{j \in I_2 \setminus \{j_0\} : p_{i_1,j} > 0\}.$$

Dann ist $\underset{j \in T}{\forall} p_{i_1,j} = s_j$, das heißt

$$\sum_{j \in T \cup \{j_0\}} s_j = r_{i_1} \quad \text{oder} \quad r_{i_1} - s_{j_0} < r_{i_1} - p_{i_1,j_0} = \sum_{j \in T} s_j < r_{i_1}. \tag{3.19}$$

Im ersten Fall ist $T \cup \{j_0\} \in \mathcal{T}_=(\mathcal{I})$ und $P = P^{T \cup \{j_0\},=}$ nach (3.13). Also $P \in \mathcal{E}_2(\mathcal{I})$. Im zweiten Fall ist $T \in \mathcal{T}_{j_0}(\mathcal{I})$. Nach (3.15) ist dann $P = P^{T,j_0}$ und daher folgt wieder$P \in \mathcal{E}_2(\mathcal{I})$.
„$\subseteq$": Ist $P \in \mathcal{E}_2(\mathcal{I})$, so sind nach Definition 3.2.1 zwei Fälle zu unterscheiden. Erster Fall: $T := \{j \in I_2 : p_{i_1,j} > 0\} \in \mathcal{T}_=(\mathcal{I})$ und $P = P^{T,=}$. Dann ist klar, daß $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$, und da in jeder Spalte höchstens ein positives Element steht, ist $G(P)$ kreisfei, das heißt $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. Zweiter Fall: Es gibt $j_0 \in I_2$ und $T \in \mathcal{T}_{j_0}(\mathcal{I})$, so daß $P = P^{T,j_0}$ nach (3.15). Dann folgt zunächst, daß $\underset{(i,j) \in I_1 \times I_2}{\forall} p_{i,j} \geq 0$: Nur für $j = j_0$ ist etwas zu zeigen. Es gilt $p_{i_1,j_0} = r_{i_1} - \sum_{j \in T} s_j > 0$, da $r_{i_1} > \sum_{j \in T} s_j$,

$$\begin{aligned} p_{i_2,j_0} &= r_{i_2} - \sum_{j \in (I_2 \setminus T) \setminus \{j_0\}} s_j = \sum_{j \in I_2} s_j - r_{i_1} - \sum_{j \in (I_2 \setminus T) \setminus \{j_0\}} s_j \\ &= \sum_{j \in T} s_j + s_{j_0} - r_{i_1} > 0, \end{aligned}$$

da $\sum_{j \in T} s_j > r_{i_1} - s_{j_0}$. Um $P \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ einzusehen, ist lediglich $p_{i_1,j_0} + p_{i_2,j_0} = s_{j_0}$ zu zeigen (dann ist klar, daß sich alle anderen Linien, wie gewünscht, summieren). Es gilt

$$\begin{aligned} p_{i_1,j_0} + p_{i_2,j_0} &= r_{i_1} + r_{i_2} - \sum_{j \in T} s_j - \sum_{j \in (I_2 \setminus T) \setminus \{j_0\}} s_j \\ &= \sum_{j \in I_2} s_j - \sum_{j \in T} s_j - \sum_{j \in (I_2 \setminus T) \setminus \{j_0\}} s_j = s_{j_0}. \end{aligned}$$

Wegen $\underset{j \in I_2 \setminus \{j_0\}}{\forall} 0 \in \{p_{i_1,j}, p_{i_2,j}\}$ ist $G(P)$ kreisfrei. Damit ist auch im zweiten Fall $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ gezeigt.
Der Beweis im Fall $\#I_{2,nt} = 2$ verläuft völlig analog. ∎

Korollar 3.2.4. *Sei* $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ *ein Randsystem mit* $\min\{\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt}\} = 2$. *Dann gilt*

$$\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = \begin{cases} \sum_{j\in I_2} \#\mathcal{T}_j(\mathcal{I}) + \#\mathcal{T}_=(\mathcal{I}) & \text{für } \#I_{1,nt} = 2, \\ \sum_{i\in I_1} \#\mathcal{T}_i(\mathcal{I}) + \#\mathcal{T}_=(\mathcal{I}) & \text{für } \#I_{2,nt} = 2. \end{cases} \tag{3.20}$$

Beweis. Es ist lediglich zu bemerken, daß die Vereinigung in (3.17) eine disjunkte Vereinigung ist. Das folgt aus (3.13) und (3.15), denn danach folgt für $T \neq T'$, daß $P^{T,j} \neq P^{T',j}$ sowie, daß Elemente aus $\mathcal{T}_j(\mathcal{I})$ sich von allen Elementen, die nicht in $\mathcal{T}_j(\mathcal{I})$ liegen, zumindest in der j-ten Spalte (Zeile) unterscheiden. ∎

In Abschnitt A.2 des Anhangs befindet sich der Quellcode eines Programms, das die in (3.20) gegebene Formel benutzt, um $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ für endliche Randsysteme der Dimension $2 \times n$ zu berechnen.

Das folgende Lemma 3.2.5 wendet Korollar 3.2.4 auf einige endliche Spezialfälle an. Die Ergebnisse werden anschließend in Beispiel 3.2.6 benutzt, um für 2×2-Randsysteme (in Teil (a)) und 2×3-Randsysteme (in Teil (b)) die möglichen Kardinalitäten der Extremalpunktmengen vollständig zu klassifizieren.

Lemma 3.2.5. *Sei* $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ *ein Randsystem mit*

$$\#I_{1,nt} = 2 \quad \text{und} \quad \#I_{2,nt} = n < \infty.$$

Wählt man $i_1, i_2 \in I_1$, *sowie* $j_1, j_2, j_3 \in I_2$, *so daß*

$$\begin{aligned} &r_{i_1} = \min\{r_i : i \in I_{1,nt}\}, r_{i_2} = \max\{r_i : i \in I_{1,nt}\}, \\ &s_{j_1} = \min\{s_j : j \in I_{2,nt}\}, s_{j_2} = \min\{s_j : j \in I_{2,nt} \setminus \{j_1\}\}, \\ &s_{j_3} = \min\{s_j : j \in I_{2,nt} \setminus \{j_1, j_2\}\}, \end{aligned}$$

so gelten die Aussagen (a), (b) und (c).

(a) *Ist* $r_{i_1} \leq s_{j_1}$, *so gilt* $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = n$.

(b) *Ist* $s_{j_1} < r_{i_1} \leq s_{j_2}$, *so gilt* $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 2(n-1)$.

(c) *Ist* $s_{j_2} < r_{i_1} \leq s_{j_3}$, *so gilt:*

- $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 3(n-2) + 2$ *für* $s_{j_1} + s_{j_2} > r_{i_1}$.
- $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 3(n-2) + 1$ *für* $s_{j_1} + s_{j_2} = r_{i_1}$.
- $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 4(n-2)$ *für* $s_{j_1} + s_{j_2} < r_{i_1}$.

Entsprechende Aussagen gelten, falls $\#I_{2,nt} = 2$ *und* $\#I_{1,nt} = n < \infty$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß

$$I_1 = \{i_1, i_2\}$$

mit $r_{i_2} \geq r_{i_1} > 0$ und $I_2 = I_{2,nt}$.
(a) Für alle $j \in I_2$ ist $s_j \geq r_{i_1}$ und $r_{i_1} - s_j \leq 0$. Nach Definition 3.2.1 folgt daher

$$\mathcal{T}_=(\mathcal{I}) = \{\{j\} : j \in I_2,\ \mathcal{T}_j(\mathcal{I}) = \emptyset\} \tag{3.21}$$

sowie

$$\forall_{\substack{j\in I_2, \\ \{j\}\notin\mathcal{T}_=(\mathcal{I})}} \quad \mathcal{T}_j(\mathcal{I}) = \{\emptyset\}. \tag{3.22}$$

Formel (3.20) liefert nun die Behauptung $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = n$.

(b) Für alle $j \in I_2 \setminus \{j_1\}$ ist $s_j \geq r_{i_1}$ und $r_{i_1} - s_j \leq 0$. Wie in (a) bekommt man $\mathcal{T}_=(\mathcal{I}) = \{\{j\} : j \in I_2 \setminus \{j_1\},\ \emptyset \notin \mathcal{T}_j(\mathcal{I})\}$. Weiterhin ist $s_{j_1} < r_{i_1}$ und $r_{i_1} - s_j < s_{j_1}$ für $j \neq j_1$. Also ist

$$(3.23) \qquad \mathcal{T}_{j_1}(\mathcal{I}) = \emptyset, \quad \underset{\substack{j \in I_2 \setminus \{j_1\},\\ \{j\} \notin \mathcal{T}_=(\mathcal{I})}}{\forall} \mathcal{T}_j(\mathcal{I}) = \{\emptyset, \{j_1\}\}, \quad \underset{\substack{j \in I_2 \setminus \{j_1\},\\ \{j\} \in \mathcal{T}_=(\mathcal{I})}}{\forall} \mathcal{T}_j(\mathcal{I}) = \{\{j_1\}\}.$$

Mit (3.20) folgt daraus $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 2(n-1)$.
(c) $s_{j_1} + s_{j_2} > r_{i_1}$: Es folgt

$$\mathcal{T}_=(\mathcal{I}) = \{\{j\} : j \in I_2 \setminus \{j_1, j_2\},\ \emptyset \notin \mathcal{T}_j(\mathcal{I})\},$$

$\mathcal{T}_{j_1}(\mathcal{I}) = \{\{j_2\}\}$, $\mathcal{T}_{j_2}(\mathcal{I}) = \{\{j_1\}\}$ sowie

$$(3.24) \qquad \underset{\substack{j \in I_2 \setminus \{j_1, j_2\},\\ \{j\} \notin \mathcal{T}_=(\mathcal{I})}}{\forall} \mathcal{T}_j(\mathcal{I}) = \{\emptyset, \{j_1\}, \{j_2\}\}, \quad \underset{\substack{j \in I_2 \setminus \{j_1, j_2\},\\ \{j\} \in \mathcal{T}_=(\mathcal{I})}}{\forall} \mathcal{T}_j(\mathcal{I}) = \{\{j_1\}, \{j_2\}\}.$$

(3.20) liefert daher $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 3(n-2) + 2$.
$s_{j_1} + s_{j_2} = r_{i_1}$: Dann gilt

$$(3.25) \qquad \mathcal{T}_=(\mathcal{I}) = \{\{j\} : j \in I_2 \setminus \{j_1, j_2\},\ \emptyset \notin \mathcal{T}_j(\mathcal{I})\} \cup \{\{j_1, j_2\}\}, \quad \mathcal{T}_{j_1}(\mathcal{I}) = \mathcal{T}_{j_2}(\mathcal{I}) = \emptyset,$$

$$(3.26) \qquad \underset{\substack{j \in I_2 \setminus \{j_1, j_2\},\\ \{j\} \notin \mathcal{T}_=(\mathcal{I})}}{\forall} \mathcal{T}_j(\mathcal{I}) = \{\emptyset, \{j_1\}, \{j_2\}\}, \quad \underset{\substack{j \in I_2 \setminus \{j_1, j_2\},\\ \{j\} \in \mathcal{T}_=(\mathcal{I})}}{\forall} \mathcal{T}_j(\mathcal{I}) = \{\{j_1\}, \{j_2\}\}.$$

Diesmal liefert (3.20) also $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 3(n-2) + 1$.
$s_{j_1} + s_{j_2} < r_{i_1}$: Es gilt

$$\mathcal{T}_=(\mathcal{I}) = \{\{j\} : j \in I_2 \setminus \{j_1, j_2\},\ \emptyset \notin \mathcal{T}_j(\mathcal{I})\},$$

$\mathcal{T}_{j_1}(\mathcal{I}) = \mathcal{T}_{j_2}(\mathcal{I}) = \emptyset$,

$$(3.27) \qquad \underset{\substack{j \in I_2 \setminus \{j_1, j_2\},\\ \{j\} \notin \mathcal{T}_=(\mathcal{I})}}{\forall} \mathcal{T}_j(\mathcal{I}) = \{\emptyset, \{j_1\}, \{j_2\}, \{j_1, j_2\}\}, \quad \underset{\substack{j \in I_2 \setminus \{j_1, j_2\},\\ \{j\} \in \mathcal{T}_=(\mathcal{I})}}{\forall} \mathcal{T}_j(\mathcal{I}) = \{\{j_1\}, \{j_2\}, \{j_1, j_2\}\}.$$

Also ist $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 4(n-2)$ nach (3.20). ■

Beispiel 3.2.6. Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem mit $\#I_{1,nt} = 2$. Die Bezeichnungen seien wie in Lemma 3.2.5.

(a) Gilt $\#I_{2,nt} = 2$, so ist $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 2$:
Das folgt wegen $r_{i_1} \leq s_{j_2}$ und $2 = 2 \cdot (2-1)$ sofort aus (a) und (b) von Lemma 3.2.5.

(b) Gilt $\#I_{2,nt} = 3$, so ist

- **(i)** $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 3$ für $r_{i_1} \leq s_{j_1}$.
- **(ii)** $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 4$ für $s_{j_1} < r_{i_1} \leq s_{j_2}$.
- **(iii)** $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 4$ für $s_{j_2} < r_{i_1} \leq r_{i_2} \leq s_{j_3}$.
- **(iv)** $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 5$ für $s_{j_2} < r_{i_1} \leq s_{j_3} < r_{i_2}$.
- **(v)** $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 6$ für $s_{j_3} < r_{i_1}$.

Eine entsprechende Aussage gilt, wenn man die Rollen von I_1 und I_2 vertauscht.

Die folgenden Angaben (a), (b), (c) beziehen sich auf Lemma 3.2.5. (i) folgt aus (a), (ii) folgt aus (b), (iii) folgt aus (c), da $s_{j_1} + s_{j_2} \leq r_{i_1}$ und

$$4(3-2) = 3(3-2) + 1 = 4,$$

(iv) folgt aus (c), $s_{j_1} + s_{j_2} > r_{i_1}$. (v) ergibt sich wie folgt: Es ist $\mathcal{T}_{=}(\mathcal{I}) = \emptyset$,

$$\mathcal{T}_{j_1}(\mathcal{I}) = \{\{j_2\}, \{j_3\}\}, \quad \mathcal{T}_{j_2}(\mathcal{I}) = \{\{j_1\}, \{j_3\}\}, \quad \mathcal{T}_{j_3}(\mathcal{I}) = \{\{j_2\}, \{j_1\}\},$$

da

$$\min\{s_{j_1} + s_{j_2}, s_{j_1} + s_{j_3}, s_{j_1} + s_{j_2}\} > r_{i_1}.$$

Wegen (3.20) ist dann $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 6$.

Die Ergebnisse von Beispiel 3.2.6 und die Berechnung von Extremalpunktanzahlen in diversen Spezialfällen mit Hilfe des in Abschnitt A.1 des Anhangs angegebenen Programmes führen zu der Vermutung, daß für vorgegebene Dimension des Randsystems immer alle Zahlen unterhalb eines Maximalwertes für Extremalpunktanzahlen vorkommen (Nullen in den Randvektoren zugelassen).

Es ist recht unbefriedigend, daß es bisher keinen Algorithmus gibt, der im Fall endlicher Randsysteme die Anzahl der Extremalpunkte berechnet, ohne die Extremalpunkte alle explizit zu bestimmen. Obwohl durch die Konstruktion aus Definition 3.2.1 für den $2 \times n$-Fall ein solcher Algorithmus gegeben ist, kann die Aufgabe wohl auch für diesen Fall noch nicht als gelöst betrachtet werden. Zur Berechnung der nach (3.11) und (3.12) definierten Mengen muß das sogenannte „Knapsack-Problem“ gelöst werden, welches, wie schon in der Einleitung erwähnt, NP-vollständig ist. Ob es für die Bestimmung der Anzahl der Extremalpunkte polynomielle Algorithmen geben kann, ist unbekannt.

Zum Abschluß soll für endliche $2 \times n$-Randsysteme eine Prozedur für einen Zufallsspaziergang auf den Extremalpunkten konstruiert werden, der es erlaubt, $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ über einen probabilistischen Algorithmus zu bestimmen. Leider ist es bisher nicht gelungen, die Prozedur auf $k \times n$-Randsysteme mit $k > 2$ auszudehnen.

Definition 3.2.7. Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem mit

$$\#I_1 = 2, \qquad 2 \leq n := \#I_2 < \infty,$$

$I_1 = \{i_1, i_2\}$ mit $r_{i_2} \geq r_{i_1} > 0$ und $I_2 = I_{2,nt}$. Definiere dann eine Funktion

$$F : \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) \longrightarrow 2^{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2)}$$

wie folgt: Zunächst sei $f : \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) \longrightarrow I_2$ eine Funktion, so daß

$$\underset{P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))}{\forall} \ \underset{j \in I_2 \setminus \{f(P)\}}{\forall} \ 0 \in \{p_{i_1,j}, p_{i_2,j}\}.$$

Für $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ sei

(3.28)
$$T(P) := \{(j_1, j_2) \in I_2 \times I_2 : j_1 \neq j_2, \ f(P) \in \{j_1, j_2\}, \ p_{i_1,j_1} > 0, \ p_{i_2,j_2} > 0\}.$$

Für $(j_1, j_2) \in T(P)$ definiere $\delta^{(j_1,j_2)} := \min\{p_{i_1,j_1}, p_{i_2,j_2}\}$ sowie

$$P^{(j_1,j_2)} = (p_{i,j}^{(j_1,j_2)})_{(i,j)\in I_1\times I_2}$$

durch $P^{(j_1,j_2)}\lceil_{I_1\times(I_2\setminus\{j_1,j_2\})} := P\lceil_{I_1\times(I_2\setminus\{j_1,j_2\})}$ und

$$p_{i,j}^{(j_1,j_2)} := \begin{cases} p_{i,j} + \delta^{(j_1,j_2)} & \text{für } (i,j) \in \{(i_1,j_2),(i_2,j_1)\}, \\ p_{i,j} - \delta^{(j_1,j_2)} & \text{für } (i,j) \in \{(i_1,j_1),(i_2,j_2)\}. \end{cases} \tag{3.29}$$

Schließlich sei

$$F(P) := \{P^{(j_1,j_2)} : (j_1,j_2) \in T(P)\}. \tag{3.30}$$

Im Fall, daß $\mathcal{I} = (I_1, I_2, r, s)$ ein beliebiges Randsystem mit

$$\min\{\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt}\} = 2, \qquad \max\{\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt}\} < \infty$$

ist, kann die Funktion F ganz analog definiert werden.

Lemma 3.2.8. *Sei $\mathcal{I} := (I_1, I_2, r, s)$ ein Randsystem mit $\min\{\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt}\} = 2$, $2 \le n := \max\{\#I_{1,nt}, \#I_{2,nt}\} < \infty$ und $F : \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) \longrightarrow 2^{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1,I_2)}$ gemäß Definition 3.2.7.*

(a) *Für $P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ gilt $F(P) \subseteq \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$.*

(b) *Für $P, Q \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ gibt es eine endliche Folge $(P_i)_{i\in\{1,\dots,k\}} \subseteq \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ mit $P_1 = P$, $P_k = Q$, $\underset{i\in\{1,\dots,k-1\}}{\forall} P_{i+1} \in F(P_i)$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß

$$\#I_1 = 2, \qquad 2 \le n := \#I_2 < \infty,$$

$I_1 = \{i_1, i_2\}$ mit $r_{i_2} \ge r_{i_1} > 0$, $I_2 = I_{2,nt}$ und $s_{j_1} = \min\{s_j : j \in I_2\}$. Die Bezeichnungen seien wie in 3.2.7.
(a) Nach Wahl von f gilt $\underset{(j_1,j_2)\in T(P)}{\forall}\ \underset{j\in I_2\setminus\{j_1,j_2\}}{\forall} 0 \in \{p_{i_1,j}, p_{i_2,j}\}$, und nach Definition von $\delta^{(j_1,j_2)}$ und (3.29) ist

$$\underset{(j_1,j_2)\in T(P)}{\forall} (0 \in \{p_{i_1,j_1}, p_{i_2,j_1}\} \text{ oder } 0 \in \{p_{i_1,j_2}, p_{i_2,j_2}\}). \tag{3.31}$$

Also ist $G(P^{(j_1,j_2)})$ kreisfrei für alle $(j_1,j_2) \in T(P)$. (b) Man definiere auf $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ eine Relation „$\sim$“, wie folgt: Für $P, Q \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ gelte $P \sim Q$ genau dann, wenn es eine endliche Folge $(P_i)_{i\in\{1,\dots,k\}} \subseteq \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ mit $P_1 = P$, $P_k = Q$,

$$\underset{i\in\{1,\dots,k-1\}}{\forall} P_{i+1} \in F(P_i)$$

gibt. Dann ist klar, daß „$\sim$“ reflexiv und transitiv ist. Da nach (3.29)

$$\underset{Q\in F(P)}{\forall} P \in F(Q)$$

gilt, ist „$\sim$“ außerdem symmetrisch.

Damit ist „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation. Der Beweis von (b) erfolgt nun durch Induktion nach n. Aus der Definition von $\delta^{(j_1,j_2)}$ und (3.29) folgt, daß $P \notin F(P)$. Damit ist für $n = 2$ wegen $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = 2$ nichts mehr zu zeigen. Sei also $n > 2$. Setze

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\binom{0}{*}} &:= \{P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) : p_{i_1,j_1} = 0,\, p_{i_2,j_1} = s_{j_1}\}, \\ \mathcal{P}_{\binom{*}{0}} &:= \{P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) : p_{i_1,j_1} = s_{j_1},\, p_{i_2,j_1} = 0\}, \qquad (3.32) \\ \mathcal{P}_{\binom{*}{*}} &:= \{P \in \mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) : p_{i_1,j_1}, p_{i_2,j_1} > 0\}. \end{aligned}$$

Sind $P, Q \in \mathcal{P}_{\binom{0}{*}}$ und bezeichnet man die zu „$\sim$“ analoge Relation auf der Menge $\mathcal{I}(P\restriction_{I_1\times(I_2\setminus\{j_1\})})$ wieder mit „$\sim$“, so gilt per Induktion, daß

$$P\restriction_{I_1\times(I_2\setminus\{j_1\})} \sim Q\restriction_{I_1\times(I_2\setminus\{j_1\})}$$

(man kann annehmen, daß für die zu f analoge Funktion $\tilde{f}$ auf

$$\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}(P\restriction_{I_1\times(I_2\setminus\{j_1\})})))$$

gilt, daß $\underset{Q\in\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))}{\forall} f(Q) = \tilde{f}(Q\restriction_{I_1\times(I_2\setminus\{j_1\})}))$. Daraus folgt nun $P \sim Q$.

Behauptung 1. $\underset{P\in\mathcal{P}_{\binom{*}{*}}}{\forall} \; \underset{Q\in\mathcal{P}_{\binom{0}{*}}}{\exists} \; Q \sim P.$

Beweis. Für $P \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(I_1, I_2)$ sei $S_P := \{j \in I_2 \setminus \{j_1\} : p_{i_2,j} > 0\}$ und $m_P := \#S_P$. Angenommen, Behauptung 1 ist falsch. Dann gibt es ein „minimales Gegenbeispiel“, das heißt,

$$\underset{P\in\mathcal{P}_{\binom{*}{*}}}{\exists} \left(\underset{Q\in\mathcal{P}_{\binom{0}{*}}}{\forall} Q \not\sim P \text{ und } \underset{\substack{\tilde{P}\in\mathcal{P}_{\binom{*}{*}},\\ m_{\tilde{P}}<m_P}}{\forall} \; \underset{Q\in\mathcal{P}_{\binom{0}{*}}}{\exists} Q \sim \tilde{P} \right). \qquad (3.33)$$

Insbesondere muß dann $m_P > 0$ gelten, da das für jedes Element von $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ gilt. Nun sei $j \in S_P$. Dann ist $(j_1, j) \in T(P)$. Wegen $P^{(j_1,j)} \notin \mathcal{P}_{\binom{0}{*}}$ muß $p_{i_2,j} < p_{i_1,j_1}$ gelten. Dann ist aber $P^{(j_1,j)}$ ein Gegenbeispiel zu Behauptung 1 mit $m_{P^{(j_1,j)}} < m_P$ im Widerspruch zur Wahl von P. ▲

Behauptung 2. $\underset{P\in\mathcal{P}_{\binom{*}{0}}}{\forall} \; \underset{Q\in\mathcal{P}_{\binom{*}{*}}\cup\mathcal{P}_{\binom{0}{*}}}{\exists} \; Q \in F(P).$

Beweis. Sei $P \in \mathcal{P}_{\binom{*}{0}}$ gegeben. Wähle dann $j \in I_2 \setminus \{j_1\}$ mit $(j_1, j) \in T(P)$. Nach (3.29) ist $p_{i_2,j_1}^{(j_1,j_2)} > 0$, das heißt, es gilt $P^{(j_1,j_2)} \in \mathcal{P}_{\binom{*}{*}}$ oder $P^{(j_1,j_2)} \in \mathcal{P}_{\binom{0}{*}}$. ▲

Da „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation ist und $\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I})) = \mathcal{P}_{\binom{0}{*}} \cup \mathcal{P}_{\binom{*}{0}} \cup \mathcal{P}_{\binom{*}{*}}$ gilt, wird der Beweis von (b) durch die soeben bewiesenen Behauptungen 1 und 2 vollständig. ■

Anhang A

Quelltexte implementierter Algorithmen

A.1 Implementation eines Algorithmus zur Bestimmung extremaler Matrizen im endlichen Fall in Mathematica

```
s[l_]:=Apply[Plus,l]

ok[v_,w_]:=s[v]==s[w]

line[a_,j_,n_]:=ReplacePart[nline[n],a,j]
nline[n_]:=Table[0, {n}]

index[i_,j_]:=Partition[Flatten[Table[{k,l},{k,i},{l,j}]],2]
mindex[v_,w_]:=Select[index[Length[v],Length[w]],
               testmind[#,v,w] &]
testmind[{i_,j_},v_,w_]:=v[[i]]<=w[[j]]
nindex[v_,w_]:=Select[index[Length[v],Length[w]],
               testnind[#,v,w] &]
testnind[{i_,j_},v_,w_]:=v[[i]]>=w[[j]]

ran[min_,max_,{m_,n_},a_]
   :=Map[anzex,Map[conv,
     Table[{Table[Random[Integer,{min,max}],{m}],
     Table[Random[Integer,{min,max}],{n}]},{a}]]]

conv[{l1_,l2_}]:={l1,l2} /; s[l1]==s[l2]
conv[{l1_,l2_}]
    :={l1,ReplacePart[l2,s[l1]-s[l2]+Last[l2],Length[l2]]}
      /; s[l1]>s[l2]
```

```
conv[{l1_,l2_}]
    :={ReplacePart[l1,s[l2]-s[l1]+Last[l1],Length[l1]],l2}
      /; s[l1]<s[l2]

mex[v_,w_]:=Map[MatrixForm,ex[v,w]] /; ok[v,w]
anzex[{v_,w_}]:={{v,w},Length[ex[v,w]]} /; ok[v,w]

ex[{x_},w_]:={{w}} /; ok[{x},w]
ex[v_,{x_}]:={Transpose[{v}]}
ex[v_,w_]:=Union[m[v,w],n[v,w]]

m[v_,w_]:=Apply[Union,Map[mij[v,w,#] &,mindex[v,w]]]
mij[v_,w_,{i_,j_}]
   :=Map[rowin[v,w,i,j,#] &,ex[Delete[v,i],
     ReplacePart[w,w[[j]]-v[[i]],j]]]

rowin[v_,w_,i_,j_,mat_]:=rin[mat,line[v[[i]],j,Length[w]],i]
rin[mat_,r_,i_]:=Insert[mat,r,i]

n[v_,w_]:=Apply[Union,Map[nij[v,w,#] &,nindex[v,w]]]
nij[v_,w_,{i_,j_}]
   :=Map[colin[v,w,i,j,#] &,ex[ReplacePart[v,v[[i]]-w[[j]],i],
     Delete[w,j]]]

colin[v_,w_,i_,j_,mat_]:=cin[mat,line[w[[j]],i,Length[v]],j]
cin[mat_,l_,j_]:=Transpose[rin[Transpose[mat],l,j]]
```

Kurze Beschreibung des Programms (im folgenden sei $\mathcal{I}$ das zu gegebenen Randvektoren `v,w` gehörende Randsystem):

`s[l_]` berechnet die Summe einer Liste `l` von Zahlen. `ok[v_,w_]` testet, ob `v,w` Randvektoren eines Randsystems sind. `nline[n_]` erzeugt eine Liste, die aus `n` Nullen besteht. `line[a_,j_,n_]` ersetzt in einer Liste, die aus `n` Nullen besteht, das `j`-te Element durch `a`. `index[i_,j_]` erzeugt eine Liste, die genau alle Indizes einer `i`$\times$`j` Matrix enthält. `mindex[v_,w_]` und `nindex[v_,w_]` erzeugen Listen, die aus den Elementen der Mengen $M(\mathcal{I})$ beziehungsweise $N(\mathcal{I})$ gemäß (2.52) bestehen. `rin[mat_,r_,i_]` (`cin[mat_,l_,j_]`) fügt in die Matrix `mat` eine neue `i`-te Zeile `r` (`j`-te Spalte `l`) ein. `rowin[v_,w_,i_,j_,mat_]` (`colin[v_,w_,i_,j_,mat_]`) fügt in die Matrix `mat` eine `i`-te Zeile (`j`-te Spalte) ein, die an der `j`-ten (`i`-ten) Stelle `v[[i]]` (`w[[j]]`) stehen hat und sonst nur Nullen. `mij[v_,w_,{i_,j_}]` erzeugt eine Liste der Elemente von $\mathcal{M}_{i,j}(\mathcal{I})$ gemäß (2.55); entsprechend erzeugt `nij[v_,w_,{i_,j_}]` eine Liste der Elemente von $\mathcal{N}_{i,j}(\mathcal{I})$ gemäß (2.56). `m[v_,w_]` beziehungsweise `n[v_,w_]` erzeugen eine Liste der Elemente von $\mathcal{M}(\mathcal{I})$ beziehungsweise $\mathcal{N}(\mathcal{I})$ gemäß (2.57). `ex[v_,w_]` liefert eine Liste der extremalen Matrizen, das heißt der Elemente von $\mathcal{E}(\mathcal{I})$ gemäß Definition 2.5.1. `mex[v_,w_]` gibt die Elemente von `ex[v_,w_]` in Matrixform aus. `anzex[{v_,w_}]` berechnet $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$. `ran[min_,max_,{m_,n_},a_]` wendet die Funktion `anzex` auf `a` „zufällig" erzeugte Randsysteme mit `m` Zeilen und `n` Spalten an, wobei die Einträge der Randvektoren ganze Zahlen zwischen `min` und `max` sind.

Bemerkung A.1.1. Damit die Funktionen dieses Programms zuverlässig funktionieren, muß Mathematica exakte Größenvergleiche durchführen können. Deshalb darf das Programm nur auf ganze Zahlen oder Brüche, nicht aber auf Fließkommazahlen angewendet werden.

A.2 Implementation eines Algorithmus zur Bestimmung extremaler Matrizen im $2 \times n$ Fall in Mathematica

Das folgende Programm benutzt die Funktion `s` aus Abschnitt A.1.

```
fanzex[{v_,w_}]:={{v,w},sanzex[Sort[v],Sort[w]]}
sanzex[{r1_,r2_},w_]:=s[Table[cex[r1,i,w],{i,Length[w]}]]
                      +rcex[r1,w]

subsets[{}]:={{}}
subsets[v_]:=Flatten[Map[h1[#,Last[v]] &,subsets[Drop[v,-1]]],1]
h1[l_,e_]:={l,Append[l,e]}

valid[l_,min_,max_]:=1 /; min<s[l]<max
valid[l_,min_,max_]:=0
valtab[s_,min_,max_]:=Map[valid[#,min,max] &,s]

cex[r1_,i_,w_]:=s[valtab[subsets[subl[r1,i,w]],r1-w[[i]],r1]]
subl[r1_,i_,w_]:=Select[Delete[w,i],#<r1 &]

rval[r1_,l_]:=1 /; s[l]==r1
rval[r1_,l_]:=0
rvaltab[r1_,s_]:=Map[rval[r1,#] &,s]

rcex[r1_,w_]:=s[rvaltab[r1,subsets[rsubl[r1,w]]]]
rsubl[r1_,w_]:=Select[w,#<=r1 &]
```

Kurze Beschreibung des Programms (wieder sei $\mathcal{I}$ das zu gegebenen Randvektoren `v,w` gehörende Randsystem; dabei wird jetzt immer vorausgesetzt, daß `v` zweielementig ist):

`subsets[m_]` liefert eine Liste aller Teilmengen von `m`. `valid[l_,min_,max_]` testet, ob die Summe der Elemente von `l` echt zwischen `min` und `max` liegt. Ist das der Fall, so wird `1` ausgegeben, ansonsten `0`. `valtab[s_,min_,max_]` wendet `valid[l_,min_,max_]` auf eine Liste von Listen `s` an und liefert eine Tabelle der entsprechenden Wahrheitswerte (`0` oder `1`). `subl[r1_,i_,w_]` entfernt aus der Liste `w` das `i`-te Element sowie alle Elemente, die nicht kleiner als `r1` sind. `cex[r1_,i_,w_]` berechnet die Kardinalität der nach (3.12) definierten Menge $\mathcal{T}_i(\mathcal{I})$. Die Funktion `rval` entspricht der Funktion `valid`, nur daß `rval[r1_,l_]` testet, ob die Summe der Elemente von `l` gleich `r1` ist. In der gleichen Weise entsprechen die Funktionen `rvaltab`, `rcex`, `rsubl` den Funktionen `valtab`, `cex` und `subl`. `sanzex[v_,w_]` berechnet $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ nach (3.20), wobei vorausgesetzt wird, daß die Elemente von `v` und `w` der Größe nach sortiert sind. `fanzex[{v_,w_}]` gibt $\#\mathrm{E}(\mathcal{D}(\mathcal{I}))$ zusammen mit `{v,w}` aus, wobei die Elemente von `v` und `w` nicht mehr sortiert sein müssen.

Wieder ist Bemerkung A.1.1 zu beachten.

Literaturverzeichnis

[1] G.D. Birkhoff. *Tres observaciones sobre el algebra lineal.* Univ. Nac. Tucumán Rev. Ser. A **5** (1946) pp. 147–151.

[2] R.A. Brualdi. *Combinatorical properties of symmetric non-negative matrices.* In: Colloquio Internazionale sulle Theorie Combinatorie Roma, 3-15 settembre 1973, Tomo II., pages 99–120. Accademia Nazionale Dei Lincei, Roma, 1976.

[3] M.R. Garey / D.S. Johnson. *Computers and intractability.* W.H. Freeman and Company, New York, 1984.

[4] R. Grząślewicz. *On extreme infinite double stochastic matrices.* Illinois J. of Math. **31** (1987) pp. 529–543.

[5] J.R. Isbell. *Infinite doubly stochastic matrices.* Canadian Math. Bull. **5** (1962) pp. 1–4.

[6] G.J.O. Jameson. *Topology and Normed Spaces.* Chapman and Hall, London, 1974.

[7] W.B. Jurkat / H.J. Ryser. *Term ranks and permanents of nonnegative matrices.* J. of Algebra **5** (1967) pp. 342–357.

[8] D.G. Kendall. *On infinite doubly stochastic matrices and birkhoff's problem 111.* J. London Math. Soc. **35** (1960) pp. 81–84.

[9] J. Lindenstrauss. *A remark on extreme doubly stochastic matrix measures.* Amer. Math. Monthly **72** (1965) pp. 379–382.

[10] J.T. Marti. *Konvexe Analysis.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1977.

[11] L. Mirsky. *On a convex set of matrices.* Arch. math. **10** (1959) pp. 88–92.

[12] H.L. Royden. *Real Analysis.* Macmillian Publ., New York, 3rd edition, 1988.

[13] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York, 3rd edition, 1987.

[14] D.B. West. *Introduction to Graph Theory.* Prentice Hall, 1996.

[15] S. Wolfram. *Mathematica. A system for doing mathematics by computer.* Addison-Wesley, 2nd edition, 1993.

Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung	Seite
$\mathrm{E}(M)$	Menge der Extremalpunkte von M	4
$\binom{V}{2}$	Menge der zweielementigen Teilmengen von V	5
$G = (V, E)$	Graph mit Eckenmenge V und Kantenmenge E	5
$G = (V, E, w)$	gewichteter Graph mit Gewichtsfunktion w	5
$V(G)$	Eckenmenge des Graphen G	5
$E(G)$	Kantenmenge des Graphen G	5
$w\restriction_E$	Einschränkung der Funktion w auf E	5
$G' \leq G$	G' ist Subgraph von G	5
$G\restriction_U$	von U induzierter Teilgraph von G	5
$V \dot\cup V'$	disjunkte Vereinigung der Mengen V und V'	5
$G - \hat{V}$	Graph G ohne die Eckenmenge $\hat{V}$	5
$G - \hat{E}$	Graph G ohne die Kantenmenge $\hat{E}$	5
$G - \hat{G}$	Differenz der Graphen G und $\hat{G}$	5
$G + G'$	Summe der Graphen G und G'	5
$G +_v V'$	Eckenmenge V' zum Graphen G hinzugefügt	5
$G +_e E'$	Kantenmenge E' zum Graphen G hinzugefügt	5
$\#M$	Kardinalität der Menge M	5
$d_G(v)$	Grad der Ecke v im Graphen G	5
$d(v)$	Grad der Ecke v, Abhängigkeit vom Graphen unterdrückt	5
$l(K)$	Länge des Kantenzuges K	5
uv-Weg	Weg, der die Ecken u und v verbindet	5
$d_G(u, v)$	Abstand der Ecken u und v im Graphen G	6
$d(u, v)$	wie $d_G(u, v)$, Abhängigkeit vom Graphen unterdrückt	6
$\mathrm{Zhk}_G(v)$	Zusammenhangskomponente der Ecke v im Graphen G	6
$\mathrm{Zhk}(v)$	wie $\mathrm{Zhk}_G(v)$, Abhängigkeit vom Graphen unterdrückt	6
$\mathrm{Zhk}(G)$	Menge der Zusammenhangskomponente des Graphen G	6
$\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$	Produkt-σ-Algebra von $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$	7
$\mathcal{D}(m_1, m_2)$	Menge der doppelt stochastischen Maße bezüglich m_1, m_2	7
$\mathcal{D}(= m_1, = m_2)$	alternative Bezeichnung für $\mathcal{D}(m_1, m_2)$	7
$\mathcal{D}(\leq m_1, \leq m_2)$	Menge der doppelt substochastischen Maße bezüglich m_1, m_2	7

Symbol	Bedeutung	Seite
2^I	Potenzmenge von I	7
$\#_{nt}I$	Anzahl der „nichttrivialen“ Punkte in I	7
$L_1(m_1)$	L_1-Raum zum Maß m_1	8
$\mathcal{F}$	$L_1(m_1) + L_1(m_2)$	8
$\\| \\|_1$	L_1-Norm	8
$\vert\nu\vert$	Totalvariation des Maßes ν	8
$L_\infty(\mu)$	L_∞-Raum zum Maß μ	9
$\\| \\|_\infty$	L_∞-Norm	9
1_A	Indikatorfunktion der Menge A	9
ν^+	positiver Anteil des signierten Maßes ν	9
ν^-	negativer Anteil des signierten Maßes ν	9
X^*	Dualraum von X	11
K^I	Menge der Funktionen von I nach K	12
$\mathcal{M}_K(I_1, I_2)$	Menge der Matrizen indiziert mit Elementen aus $I_1 \times I_2$ und Koeffizienten in K	12
$\mathcal{M}_{sp}(I_1, I_2)$	Menge der Subpermutationsmatrizen mit Zeilenindizes aus I_1 und Spaltenindizes aus I_2	12
$\mathcal{M}_p(I_1, I_2)$	Menge der Permutationsmatrizen mit Zeilenindizes aus I_1 und Spaltenindizes aus I_2	12
$\mathcal{M}_{sp}(I_1)$	$= \quad \mathcal{M}_{sp}(I_1, I_1)$	12
$\mathcal{M}_p(I_1)$	$= \quad \mathcal{M}_p(I_1, I_1)$	12
$\mathrm{supp}(P)$	Träger der Matrix P	13
$G(P)$	gewichteter Graph der Matrix P	13
$S(P)$	Trägermatrix der Matrix P	13
$\mathcal{I} = (I_1, I_2, r, s)$	$\leq$-Randsystem mit Indexmengen I_1, $I_@$ und Randvektoren r, s	14
$I_{1,nt}$	Menge der nichttrivialen Indizes in I_1	14
$I_{2,nt}$	Menge der nichttrivialen Indizes in I_2	14
$l(r)$	Länge des Randvektors r	14
$l(s)$	Länge des Randvektors s	14
$\tilde{\mathcal{I}} \leq \mathcal{I}$	Relation zwischen Randsystemen $\tilde{\mathcal{I}}$ und $\mathcal{I}$	14
$\mathcal{G}(\mathcal{I})$	dem Randsystem $\mathcal{I}$ zugeordnete Gruppe $\mathcal{G}$	14
$\langle M \rangle$	von M erzeugte Gruppe	14
$\mathcal{D}(\mathcal{I})$	Menge der doppelt stochastischen Matrizen bezüglich $\mathcal{I}$	14
$\mathcal{D}(= \mathcal{I})$	alternative Bezeichnung für $\mathcal{D}(\mathcal{I})$	14
$\mathcal{D}(\leq \mathcal{I})$	Menge der doppelt substochastischen Matrizen bezüglich $\mathcal{I}$	14
$\mathcal{I}(P)$		14
$P(\mathcal{I})$	Standardelement von $\mathcal{D}(\mathcal{I})$	17
ω	kleinste unendliche Kardinalzahl	18
$T = (V, E, q)$	Wurzelbaum mit Wurzel q	27
$T = (V, E, q, w)$	gewichteter Wurzelbaum mit Wurzel q	27
$L_n(q, T)$	n-tes Level im Wurzelbaum T	27
$L_n(q)$	wie $L_n(q, T)$, T-Abhängigkeit unterdrückt	27
L_n	wie $L_n(q, T)$, q, T-Abhängigkeit unterdrückt	27
$N_T^+(v)$		27
$N^+(v)$	wie $N_T^+(v)$, T-Abhängigkeit unterdrückt	27
$N_T^-(v)$		27
$N^-(v)$	wie $N_T^-(v)$, T-Abhängigkeit unterdrückt	27
$E_n(q, T)$		27

Symbol	Bedeutung	Seite
$E_n(q)$	wie $E_n(q,T)$, T-Abhängigkeit unterdrückt	27
E_n	wie $E_n(q,T)$, q,T-Abhängigkeit unterdrückt	27
$T' \leq T$	Relation zwischen Wurzelbäumen T' und T	27
v^-	eindeutig bestimmtes Element von $N^-(v)$	28
$B = (G, T_1, T_2)$	Doppelbaum B	30
$B' \leq B$	Relation zwischen Doppelbäumen B' und B	30
$\mathrm{dist}(t, M)$	Abstand der Zahl t zur Menge M	38
$\mathrm{di}(p)$	$\mathrm{dist}(p, \mathcal{G})$	38
$V_<(P)$		43
$V_<$	wie $V_<(P)$, Abhängigkeit von P unterdrückt	43
$M(\mathcal{I})$		49
$N(\mathcal{I})$		49
$\mathcal{I}_M^{i_0,j_0}$		49
$r_M^{i_0}, s_M^{j_0}$	Randvektoren von $\mathcal{I}_M^{i_0,j_0}$	49
$\mathcal{I}_N^{i_0,j_0}$		49
$r_N^{i_0}, s_N^{j_0}$	Randvektoren von $\mathcal{I}_N^{i_0,j_0}$	49
$\mathcal{E}(\mathcal{I})$		49
$\mathcal{M}_{i_0,j_0}(\mathcal{I})$		49
$\mathcal{N}_{i_0,j_0}(\mathcal{I})$		49
$\mathcal{M}(\mathcal{I})$		50
$\mathcal{N}(\mathcal{I})$		50
$\mathrm{UT}(m, n)$	Menge der oberen $m \times n$ Dreiecksmatrizen	53
$\mathrm{LT}(m, n)$	Menge der unteren $m \times n$ Dreiecksmatrizen	53
P^t	transponierte Matrix der Matrix P	53
$\Sigma(I)$	Menge der Permutationen von I	53
$\mathrm{per}(P)$	Permanente der Matrix P	53
$D_n(M)$		58
$\mathcal{Z}(P)$	$=$ $\mathrm{Zhk}(G(P))$	59
$\mathcal{T}(H)$		59
$\mathcal{F}(P)$		59
$\mathcal{E}(f)$		59
$\mathcal{E}(P)$		59
P^I		59
$\mathcal{E}(\leq \mathcal{I})$		59
$\mathrm{Exp}(M)$	Menge der exponierten Punkte der Menge M	62
$E_n(P)$		63
$M_n(P)$		63
$m_n(P)$		63
$\mathcal{I}^t$	transponiertes $\leq$-Randsystem zum $\leq$-Randsystem $\mathcal{I}$	69
$m\mathcal{I}$		70
$\mathcal{T}_=(\mathcal{I})$		73
$\mathcal{T}_{j_0}(\mathcal{I})$		73
$P^{T,=}$		73
$\mathcal{E}_2^=(\mathcal{I})$		73
P^{T,j_0}		74
$\mathcal{E}_2^{j_0}(\mathcal{I})$		74
$\mathcal{E}_2(\mathcal{I})$		74
$T(P)$		78
$P^{(j_1,j_2)}$		79

Index