

Vorlesung Analysis für Informatik & Statistik

- Dozent: P. Philip
- Assistent: N. Hao
- Internet-Seite zur Vorlesung:
http://www.math.lmu.de/~philip/teaching/2022_calc1_forInfAndStatStudents
- Alle bitte bis 15. Nov. elektronisch bei Uni2work zur Vorlesung anmelden unter <https://uni2work.ifi.lmu.de/course/W22/MI/AnIS>
(danach ist Anmeldung und Teilnahme **nicht** mehr möglich)!
Zugelassen zur Anmeldung sind die Studiengänge gemäß Webseite.
- Klausurtermin: Sa, 11. Februar, 10 Uhr c.t.
Wichtig: Konflikte mit diesem Termin bitte sofort mitteilen,
später sind Änderungen NICHT mehr möglich;
Sie müssen bei NEU mitgeteilten Terminen immer sofort auf Konflikte mit bereits
bekannten Terminen hinweisen.
- Modulprüfung bestanden \Leftrightarrow Klausur bestanden
 \Leftrightarrow 50/100 Punkten in der Klausur
- Übungsbetrieb:
 - Beginn nächste Woche
 - Übungen in Gruppen (keine Zentralübung)
 - ca. 12 alternative Übungstermine (ab Fr auf der Webseite)
 - Jeden Do ein neues Übungsblatt (4 Aufgaben) bei Uni2work
 - Abgabe: Spätestens am 2. Mo nach Ausgabe bis 12:00 Uhr
durch Hochladen bei Uni2work
 - Rückgabe: Nach einer Woche wird die Korrektur bei Uni2work
zum Download bereitgestellt
 - Bilden Sie Vierergruppen, um alle Aufgaben korrigiert zu bekommen

Kurz zum Sinn der Übungsgruppen
- Skript zur Vorlesung (in deutscher und englischer Sprache) auf der Webseite zum
Runterladen
- Literatur: Z. B.: Walter: Analysis 1
Königsberger: Analysis 1
Forster: Analysis 1

Inhaltsverzeichnis

Themenübersicht	4
1 Grundlagen: Logik & Mengenlehre	5
1.1. Einführende Bemerkungen	5
1.2. Aussagenlogik	5
1.2.1. Aussagen	5
1.2.2. Logische Operatoren	6
1.2.3. Regeln	8
1.3. Mengenlehre	12
1.4. Prädikatenlogik	15
2. Funktionen & Relationen	20
2.1. Funktionen	20
2.2. Relationen	28
3. Natürliche Zahlen, Induktion, Größe von Mengen	34
3.1. Induktion & Rekursion	34
3.2. Kardinalität: Die Mächtigkeit (Größe) von Mengen	40
4. Reelle Zahlen	42
4.1. \mathbb{R} als vollständig total geordneter Körper	42
4.2. Wichtige Teilmengen	45
5. Komplexe Zahlen	47
5.1. Definition und grundlegende Arithmetik	47
5.2. Vorzeichen und Betrag	49
5.3. Summen & Produkte	53
5.4. Binomialkoeffizienten & Binomischer Lehrsatz	54
6. Polynome	57
6.1. Arithmetik \mathbb{K} -wertiger Fkt	57
6.2. Polynome	58

7. Grenzwerte und Konvergenz in \mathbb{R} und \mathbb{C}	62
7.1. Folgen	62
7.2. Stetigkeit	73
7.2.1. Definitionen & erste Beispiele	73
7.2.2. Stetigkeit, Folgen und Funktionsarithmetik	75
7.2.3. Beschränkte, abgeschlossene und kompakte Mengen	77
7.2.4. Zwischenwertsatz	82
7.2.5. Umkehrfkt., Existenz von Wurzeln, Exponentialfkt., Logarithmus	84
7.3. Reihen	92
7.3.1. Definition & Konvergenz	92
7.3.2. Konvergenzkriterien	94
7.3.3. Abs. Konv. & Umordnungen	97
7.3.4. b -adische Darstellungen reeller Zahlen	99
8. Konvergenz von \mathbb{K}-wertigen Funktionen	100
8.1. Punktweise & gleichmäßige Konvergenz	100
8.2. Potenzreihen	102
8.3. Exponentialfunktionen	105
8.4. Trigonometrische Funktionen	108
8.5. Polarkoordinaten komplexer Zahlen, Fundamentalsatz der Algebra . . .	113
9. Differentialrechnung	115
9.1. Def. der Ableitung und Regeln	115
9.2. Ableitungen höherer Ordnung; die Mengen C^k	121
9.3. Mittelwertsatz, Monotonie und Extrema	122
9.4. Regel von de L'Hôpital	125
10. Das Riemannintegral auf reellen Intervallen	127
10.1. Definitionen und "einfache" Eigenschaften	127
10.2. Wichtige Sätze	132
10.2.1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	132
10.2.2. Partielle Integration	133
10.2.3. Substitutionsformel	134

Themenübersicht

- Aussagenlogik und Mengenlehre
- Funktionen und Relationen
- natürliche Zahlen und vollständige Induktion
- reelle Zahlen
- komplexe Zahlen
- Summen und Produkte
- Polynome
- Folgen, Grenzwerte, Reihen
- Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen
- Extrema von Funktionen
- Zwischenwertsatz
- Umkehrfunktionen
- Potenzfunktionen, Exponentialfunktion und Logarithmus
- Potenzreihen
- trigonometrische Funktionen
- Ableitung
- Riemannintegral

1. Grundlagen: Logik & Mengenlehre

1.1. Einführende Bemerkungen

Mathematik:

- Wahrheit/Falschheit von Aussagen logisch rigoros beweisen.
- Methoden zur Lösung von Problemklassen bereitstellen, deren Korrektheit beweisen.

Analysis beschäftigt sich mit Grenzwerten/Limiten.

- Hier speziell: Integral- & Differentialrechnung (“Calculus”),
Limiten von Folgen & Funktionen
→ braucht einige Vorbereitung

Den Rahmen liefert die Mengenlehre

→ praktisch alle unsere Aussagen werden Aussagen über Mengen (und Zahlen) sein

→ Ziel: Aussagen nach logischen Regeln beweisen

→ Zu Mengenlehre, Logik, Beweistheorie gibt es jeweils extra Vorlesungen!

1.2. Aussagenlogik

1.2.1. Aussagen

Aussage: Zeichenreihe, der sich sinnvoll ein Wahrheitswert, also wahr (W) oder falsch (F) zuordnen lässt.

Bsp. 1.1: (a) Aussagen:

- A_1 : Jeder Hund ist ein Tier. (W)
- A_2 : Jedes Tier ist ein Hund. (F)
- A_3 : 4 ist ungerade. (F)
- A_4 : $2 + 3 = 5$ (W)
- A_5 : $\sqrt{2} < 0$ (F)
- A_6 : $x + 1 > 0$ gilt für jede natürliche Zahl x . (W)

(b) Keine Aussagen:

→ Denk mal nach!

→ Wer bist Du?

→ $3 \cdot 5 + 7$

↙ ohne Wissen über x weder W noch F

→ $x + 1 > 0$

→ Alle natürlichen Zahlen sind grün.

↖ wird zur Aussage, wenn man definiert,

was es bedeuten soll, dass eine nat. Zahl grün ist

1.2.2. Logische Operatoren

Ziel: Aussagen manipulieren und kombinieren.

Verneinung oder Negation: Operator \neg

- Ist unär, d.h. Anwendung auf eine Aussage:

A : Jeder Hund ist ein Tier.

$\neg A$: Nicht jeder Hund ist ein Tier.

Die Wirkung log. Op. beschreibt man durch Wahrheitstafeln.

Negation:

A	$\neg A$	(1.1)
W	F	
F	W	

Binäre log. Op. kombinieren zwei Aussagen.

Folgende sind für uns unerlässlich:

Konjunktion: A und B , in Zeichen: $A \wedge B$.

Disjunktion: A oder B , || || : $A \vee B$.

Implikation: “ A impliziert B ”, || || : $A \Rightarrow B$.
auch “aus A folgt B ”

Äquivalenz: “ A ist äquivalent zu B ”: $A \Leftrightarrow B$.

“ A gilt genau dann, wenn B gilt”

Wahrheitstafel dazu:

↙ nichtausschließendes Oder

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

(1.2)

Bsp. mit Aussagen aus Bsp. 1.1(a):

$A_1 \wedge A_4$: W, $A_1 \wedge A_3$: F, da A_3 F

umgangssprachlich: "oder" oft "entweder oder"

$$\begin{pmatrix} A & B & \text{entw. } A \text{ oder } B \\ W & W & F \end{pmatrix}$$

logisches oder: $\begin{matrix} A & B & A \vee B \\ W & W & W \end{matrix}$

Bsp.: $A_1 \vee A_4$: W, $A_1 \vee A_3$: W, da A_1 W
 $A_2 \vee A_5$: F.

Wir sehen: Aussagen lassen sich logisch kombinieren, auch wenn sie keinen inhaltlichen Zusammenhang haben.

Gilt auch bei \Rightarrow , \Leftrightarrow : siehe unten.

$A \Rightarrow B$: Man sagt auch: " B ist notwendig für A "
 " A ist hinreichend für B "

$\begin{matrix} A & B & A \Rightarrow B \\ F & W & W \end{matrix}$, da richtige Aussagen aus falschen folgen können:

Z. B.: $\begin{matrix} -1 = 1 & \Rightarrow & 1 = 1 \\ F & & W \end{matrix}$ ↙ quadrieren

$A_1 \Rightarrow A_6$: W, $A_4 \Rightarrow A_2$: F

In Anwendungen: $A \Rightarrow B$ mit Wahrheitswert von A , B unbekannt, aber man versucht A zu beweisen, um B zu beweisen (bringt nichts, falls sich A als falsch rausstellt).

Bsp. 1.2: Sasha studiert Analysis. Dann ist,

“Sasha wiederholt Analysis \Rightarrow mindestens ein*e Student*in wiederholt Analysis”

A

B

wahr:

Wenn A wahr, so auch B wahr.

Wenn A falsch, wissen nicht, ob B wahr oder falsch.

Bsp. zu “ \Leftrightarrow ”: $A_1 \Leftrightarrow A_4$: W, $A_2 \Leftrightarrow A_3$: W

$A_4 \Leftrightarrow A_5$: F.

In Anwendungen wieder $A \Leftrightarrow B$ mit Wahrheitswert

von A , B unbekannt, aber um Wert von B zu

bestimmen, genügt es, Wert von A zu bestimmen.

Bsp. 1.3: Sasha habe die beste Punktzahl in der Analysisprüfung. Dann ist

“Sasha wiederholt Analysis \Leftrightarrow das beste Analysisergebnis hat Wiederholer*in” wahr:

Wenn A wahr, so B wahr.

Wenn A falsch, so B falsch.

\rightarrow wir sehen, \Leftrightarrow ist nützlicher als \Rightarrow

Bem. 1.4: Informatik: W oft als 1 kodiert.

F oft als 0 kodiert.

1.2.3. Regeln

Ausdrücke wie $A \wedge B$ sind keine Aussagen,
da sie Variablen enthalten (hier: A , B), deren
Wahrheitswert (WW) unbekannt ist. Solche Ausdrücke
heißen Aussageformen, sie werden
zu Aussagen, wenn alle Variablen durch
Aussagen ersetzt werden.

WW der Aussageform lässt sich eindeutig
bestimmen, wenn allen Variablen ein WW zugewiesen wird.

Bsp. 1.5: (a) $\begin{matrix} A: W \\ B: F \end{matrix}$, $(A \wedge B) \vee (\neg B)$: ?

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} A & B & A \wedge B & \neg B & (A \wedge B) \vee (\neg B) \\ \hline W & F & F & W & W \end{array} \quad (1.3)$$

(b) $A \vee (\neg A)$: Gesetz des ausgeschlossenen Dritten

A	$\neg A$	$A \vee (\neg A)$	(1.4)
W	F	W	
F	W	W	

Solche Formen, die immer wahr sind, sind besonders wichtig:

Definition 1.6: Aussageformen, die für jede Belegung der Var. mit WW immer wahr sind, heißen Tautologie.

Notation 1.7: $\phi(A_1, \dots, A_n)$ heißt, dass Aussageform ϕ genau A_1, \dots, A_n als Var. enthält.

Def. 1.8: $\phi(A_1, \dots, A_n)$ und $\psi(A_1, \dots, A_n)$ heißen äquivalent genau dann, wenn $\phi(A_1, \dots, A_n) \Leftrightarrow \psi(A_1, \dots, A_n)$ Tautologie ist.

Lemma 1.9: $\phi(A_1, \dots, A_n)$ und $\psi(A_1, \dots, A_n)$ sind äq. genau dann, wenn sie für jede Belegung von A_1, \dots, A_n mit WW den selben WW haben.

Beweis: Sind $\phi(A_1, \dots, A_n)$ und $\psi(A_1, \dots, A_n)$ äq. und A_i hat WW t_i mit $i = 1, \dots, n$, so ist der WW von $\phi(A_1, \dots, A_n) \Leftrightarrow \psi(A_1, \dots, A_n)$ W, da die Form eine Tautologie sein muss. Nach (1.2) müssen ϕ und ψ den selben WW haben (beide W oder beide F).

Haben umgekehrt $\phi(A_1, \dots, A_n)$ und $\psi(A_1, \dots, A_n)$ den selben WW für jede Belegung von A_1, \dots, A_n mit WW, und ist eine Belegung gegeben, so gilt entweder $\begin{matrix} \phi & \psi \\ W & W \end{matrix}$ oder $\begin{matrix} \phi & \psi \\ F & F \end{matrix}$. In beiden Fällen hat $\phi \Leftrightarrow \psi$ den Wahrheitswert W, d.h., $\phi \Leftrightarrow \psi$ ist Tautologie. □

q.e.d. ↗

→ Hat man äq. Aussagen, so kann man sich aussuchen, welche man in einem logischen Argument verwendet!

- Theorem 1.11 stellt wichtige Äquivalenzen bereit, zuvor

Konvention 1.10 (zur Klammerreduktion):

\neg bindet stärker als \wedge , \vee , welche stärker als \Rightarrow , \Leftrightarrow binden.

Zum Beispiel ist

$$(A \vee \neg B \Rightarrow \neg B \wedge \neg A) \Leftrightarrow \neg C \wedge (A \vee \neg D)$$

das selbe wie

$$\left((A \vee (\neg B)) \Rightarrow ((\neg B) \wedge (\neg A)) \right) \Leftrightarrow \left((\neg C) \wedge (A \vee (\neg D)) \right).$$

✓ auch "Satz"

Theorem 1.11: (a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$

(man kann " \Rightarrow " durch " \neg " und " \vee " definieren).

(b) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \underbrace{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}$

A ist notwendig & hinreichend für B

$B \Rightarrow A$ heißt auch Umkehrung von $A \Rightarrow B$

(c) Kommutativgesetz der Konjunktion: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$.

(d) Kommutativgesetz der Disjunktion: $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.

(e) Assoziativgesetz der Konj.: $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$.

(f) Assoziativgesetz der Disj.: $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$.

(g) Distributivgesetz I: $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

(h) Distributivgesetz II: $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

(i) De Morgan-Gesetz I: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.

(j) De Morgan-Gesetz II: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.

(k) Doppelte Verneinung: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$.

(l) Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Bew.: Jeweils Wahrheitstafel plus Lem. 1.9.

(a):

A	B	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
W	W	F	W	W
W	F	F	F	F
F	W	W	W	W
F	F	W	W	W

(b) – (h): Übung.

(i):

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
W	W	F	F	W	F	F
W	F	F	W	F	W	W
F	W	W	F	F	W	W
F	F	W	W	F	W	W

(j): Übung

(k):

A	$\neg A$	$\neg\neg A$
W	F	W
F	W	F

(l):

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
W	W	F	F	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W
F	F	W	W	W	W

□

Die Regeln aus Th. 1.11 werden oft in Beweisen verwendet; es wird dann ggf. darauf verwiesen.

Weitere Regeln in Th. 1.13. Dazu:

Def. 1.12 (Implikation für Aussageformen):

Wir sagen $\phi(A_1, \dots, A_n)$ impliziert $\psi(A_1, \dots, A_n)$

$(\phi(\dots) \Rightarrow \psi(\dots))$ genau dann, wenn jede Belegung mit WW, die ϕ wahr macht, auch ψ wahr macht.

Th. 1.13: (a) Transitivität der Implikation: $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

(b) Transitivität der Äquivalenz: $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$.

Bew.: (a):

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$
W	W	W	W	W	W	W
W	F	W	F	W	F	W
F	W	W	W	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F
W	F	F	F	W	F	F
F	W	F	W	F	F	W
F	F	F	W	W	W	W

Man sieht, dass $A \Rightarrow C$ wahr, falls $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ wahr.

(b): Siehe Skript. □

Def. & Bem. 1.14: Ein Beweis der Aussage B ist eine Folge von Aussagen A_1, \dots, A_n so, dass A_1 wahr ist, $A_i \Rightarrow A_{i+1}$ für $1 \leq i < n$ gilt, sowie $A_n \Rightarrow B$. Nach Th. 1.13(a) ist dann auch B wahr.

1.3. Mengenlehre

Cantor (1895): „Eine Menge M ist die Zusammenfassung zu einem Ganzen von wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens“.

→ Wir nennen m die Elemente von M .

Cantors Mengenlehre ist nicht frei von Widersprüchen (z.B. die Russelsche Antinomie), die in der axiomatischen Mengenlehre vermieden werden (siehe Literatur im Skript).

Not. 1.15: $m \in M$ für “ m ist Element von M ”.

Def. 1.16: Mengen M, N sind gleich ($M = N$) g.d.w. M und N haben genau die selben Elemente.
genau dann wenn

Def. 1.17: Die Menge ohne Elemente heißt leere Menge, Symbol: \emptyset .

Bsp. 1.18: Mengen: $A := \{0\}$, $B := \{0, 17.5\}$, $C := \{5, 1, 5, 3\}$,
↙ per Definition gleich

$D := \{3, 5, 1\}$, $E := \{2, \sqrt{2}, -2\}$.

Es gilt $C = D$ (Reihenfolge ändern, Element mehrfach schreiben ändert Menge nicht).

$F := \{-4, -2, \dots, 20, 22, 24\}$

(solche Abkürzungen nur sinnvoll, wenn Punkte aus Zusammenhang klar).

Def. 1.19: Teilmenge/Inklusion: $A \subseteq B$ g.d.w. jedes Element von A auch Element von B .
Gleichwertig: $B \supseteq A$ (B Obermenge von A).
Achtung: $A = B \Rightarrow A \subseteq B$.

$A \subsetneq B$ für $A \subseteq B \wedge A \neq B$.

↖ “echte Teilmenge”

Ist $P(x)$ Aussage über Element x von B , so def.

$$A := \{x \in B : P(x)\} \quad (1.5)$$

als die Teilmenge von B , bestehend aus allen $x \in B$, für die $P(x)$ wahr ist.

Bsp. 1.20: (a) Immer gilt: $A \subseteq A$, $\emptyset \subseteq A$.

(b) $A \subseteq B \Rightarrow A = \{x \in B : x \in A\}$.

(c) Mit $A := \{-10, -8, \dots, 8, 10\}$ gilt

$$\{-2, 0, 2\} = \{x \in A : x^3 \in A\},$$

$$\emptyset = \{x \in A : x + 21 \in A\}.$$

Bem. 1.21: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

→ Zum Beweis der Gleichheit von Mengen zeigt man oft zwei Inklusionen.

Def. 1.22: (a) Durchschnitt $A \cap B$ besteht aus allen El., die sowohl in A als auch in B sind. A, B heißen disjunkt g.d.w. $A \cap B = \emptyset$.

(b) Vereinigung $A \cup B$ besteht aus allen El., die in A oder in B sind.
logisches Oder ↗

Schreibe $A \dot{\cup} B$, falls $A \cap B = \emptyset$ (disjunkte Vereinigung).

(c) Differenz $A \setminus B$ (“ A ohne B ”, “ A minus B ”):

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}.$$

Ist $B \subseteq A$, so heißt A Grundmenge und

$B^c := A \setminus B$ das Komplement von B .

Bsp. 1.23: (a)

$$\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}, \quad (1.6a)$$

$$\{\sqrt{2}\} \cap \{1, 2, \dots, 10\} = \emptyset. \quad (1.6b)$$

(b)

$$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad (1.7a)$$

$$\{1, 2, 3\} \dot{\cup} \{4, 5\} = \quad || \quad . \quad (1.7b)$$

(c)

$$\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}, \quad (1.8a)$$

$$\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 2, 1, \sqrt{5}\} = \emptyset, \quad (1.8b)$$

$$\{-10, -9, \dots, 9, 10\} \setminus \{0\} = \{-10, -9, \dots, -1\} \cup \{1, 2, \dots, 9, 10\}. \quad (1.8c)$$

Sei nun $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ Grundmenge. Dann

$$\{1, 2, 3\}^c = \{4, 5\}. \quad (1.8d)$$

Brauchen auch Mengen von Mengen.

Bsp.: $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}, \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$.

Def. 1.24: Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ (auch 2^A , siehe Prop. 2.17 unten)
besteht genau aus allen Teilmengen von A .

Bsp. 1.25:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad (1.9a)$$

$$\mathcal{P}(\{0\}) = \{\emptyset, \{0\}\}, \quad (1.9b)$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\})) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{0\}\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{\{0\}\}, \mathcal{P}(\{0\})\}. \quad (1.9c)$$

Beispielmengen waren bisher endlich.

Die einfachste unendl. Menge:

Def. 1.26: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ heißt Menge der
natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Bem. 1.27: Wer mag, kann Zahlen als Mengen
auffassen: $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, $2 := \{0, 1\}$, $3 := \{0, 1, 2\}$, \dots
 $n := \{0, 1, \dots, n-1\} = (n-1) \cup \{n-1\}$.

Wieder Regeln:

Th. 1.28: (a) Kommutativgesetz: $A \cap B = B \cap A$.

(b) $\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad : A \cup B = B \cup A$.

(c) Assoziativg.: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

- (d) \parallel : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
 (e) Distributivg.: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
 (f) \parallel : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
 (g) De Morgan-Gesetz I: $U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$.
 (h) \parallel II : $U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$.
 (i) Doppeltes Komplement: $A \subseteq U \Rightarrow U \setminus (U \setminus A) = A$.

Bew.: Anwendung der Regeln von Th. 1.11:

$$(a): x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \stackrel{\text{Th. 1.11(c)}}{\Leftrightarrow} x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A.$$

(g): Sei $x \in U$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in U \setminus (A \cap B) &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\stackrel{\text{Th. 1.11(i)}}{\Leftrightarrow} \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in U \setminus A \vee x \in U \setminus B \Leftrightarrow x \in (U \setminus A) \cup (U \setminus B). \end{aligned}$$

(b) – (f), (h), (i): Übung. □

Bem. 1.29: Kann allgemein Aussagenregeln in Mengenregeln übersetzen (siehe Skript).

1.4. Prädikatenlogik

Betrachte folgende Aussagen:

$$x + 1 > 0 \text{ gilt für jede nat. Zahl } x. \text{ (W)} \tag{1.10a}$$

$$\text{Alle reellen Zahlen sind positiv. (F)} \tag{1.10b}$$

$$\text{Es gibt eine nat. Zahl größer als 10. (W)} \tag{1.10c}$$

$$\text{Es gibt reelle Zahl } x \text{ mit } x^2 = -1. \text{ (F)} \tag{1.10d}$$

$$\text{Für jede nat. Zahl } n \text{ gibt es eine nat. Zahl größer } n. \text{ (W)} \tag{1.10e}$$

Es kommt der universelle Quantor “für alle”
 und der existentielle Quantor “es gibt”
 vor.

Symbolisch: \forall “für alle”
 \exists “es gibt”

\mathbb{N} : nat. Zahlen, \mathbb{R} : reelle Zahlen

Damit (1.10):

$$\forall_{x \in \mathbb{N}} x + 1 > 0. \text{ (W)} \quad (1.11a)$$

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} x > 0. \text{ (F)} \quad (1.11b)$$

$$\exists_{n \in \mathbb{N}} n > 10. \text{ (W)} \quad (1.11c)$$

$$\exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 = -1. \text{ (F)} \quad (1.11d)$$

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} m > n. \text{ (W)} \quad (1.11e)$$

Def. 1.30: Universelle Aussage:

$$\forall_{x \in A} P(x). \quad (1.12a)$$

Existentielle Aussage:

$$\exists_{x \in A} P(x). \quad (1.12b)$$

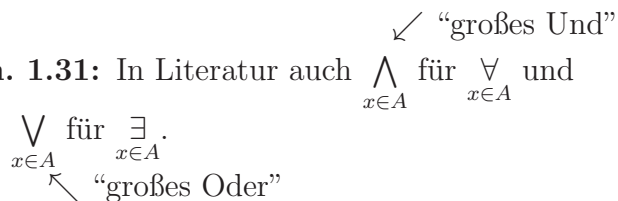
$P(x)$ ist ein “Prädikat” von x , d.h. ein Ausdruck, der für jedes $x \in A$ eine Aussage (W oder F) darstellt. $P(x)$ darf wiederum Quantoren enthalten, aber keine, die sich auf x beziehen (man sagt auch, “die Variable x in $P(x)$ muss frei sein – nicht durch Quantoren gebunden).

Aussage (1.12a) ist wahr g.d.w. $P(x)$

wahr für alle $x \in A$.

Aussage (1.12b) ist wahr g.d.w. $P(x)$

wahr für mindestens ein $x \in A$.

Bem. 1.31: In Literatur auch $\bigwedge_{x \in A}$ für \forall und $\bigvee_{x \in A}$ für \exists .


Bem. 1.32: Eindeutige Existenz:

$$\exists!_{x \in A} P(x) \quad (1.13)$$

steht für “es gibt genau ein $x \in A$ so, dass $P(x)$ gilt”.

Abkürzung für

$$\exists_{x \in A} \left(P(x) \wedge \forall_{y \in A} (P(y) \Rightarrow x = y) \right). \quad (1.14)$$

Bsp. 1.33:

$$\exists!_{n \in \mathbb{N}} n > 10. (F) \quad (1.15a)$$

$$\exists!_{n \in \mathbb{N}} 12 > n > 10. (W) \quad (1.15b)$$

Bem. 1.34: Regeln:

(a) Negation (Verallgemeinerung der de Morgan-Gesetze):

$$\neg \forall_{x \in A} P(x) \Leftrightarrow \exists_{x \in A} \neg P(x), \quad (1.16a)$$

$$\neg \exists_{x \in A} P(x) \Leftrightarrow \forall_{x \in A} \neg P(x). \quad (1.16b)$$

Beide Äquivalenzen sind unmittelbar klar, aber zum Spaß noch einen Beweis für $(1.16a) \Rightarrow (1.16b)$:

$$\begin{aligned} \neg \exists_{x \in A} P(x) &\stackrel{\text{Th. 1.11(k)}}{\Leftrightarrow} \neg \exists_{x \in A} \neg \neg P(x) \stackrel{(1.16a)}{\Leftrightarrow} \neg \neg \forall_{x \in A} \neg P(x) \\ &\stackrel{\text{Th. 1.11(k)}}{\Leftrightarrow} \forall_{x \in A} \neg P(x). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Negation Allgemein: Führende Quantoren “umdrehen” ($\forall \leftrightarrow \exists$) und Prädikat negieren (Bsp. in (1.20e) unten).

(b) Vertauschungen gleicher Quantoren:

$$\forall_{x \in A} \forall_{y \in B} P(x, y) \Leftrightarrow \forall_{y \in B} \forall_{x \in A} P(x, y), \quad (1.18a)$$

$$\exists_{x \in A} \exists_{y \in B} P(x, y) \Leftrightarrow \exists_{y \in B} \exists_{x \in A} P(x, y). \quad (1.18b)$$

Für $A = B$ schreibe auch

$$\forall_{x, y \in A} P(x, y) \quad \text{für} \quad \forall_{x \in A} \forall_{y \in A} P(x, y), \quad (1.19a)$$

$$\exists_{x, y \in A} P(x, y) \quad \text{für} \quad \exists_{x \in A} \exists_{y \in A} P(x, y). \quad (1.19b)$$

Allgemein: Benachbarte gleiche Quantoren darf man vertauschen.

Warnung: Benachbarte verschiedene Quantoren NICHT vertauschen (siehe Bsp. 1.35(d) unten).

Bsp. 1.35: (a) Neg. von (1.11a):

$$\exists_{x \in \mathbb{N}} \overbrace{x + 1 \leq 0}^{\neg(x+1 > 0)}. \quad (\text{F}) \quad (1.20a)$$

Neg. von (b),(c),(d): selbst machen

Neg. von (1.11e):

$$\exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{m \in \mathbb{N}} \overbrace{m \leq n}^{\neg(m > n)}. \quad (\text{F}) \quad (1.20e)$$

(b)

$$\begin{aligned} \neg \exists!_{x \in A} P(x) &\Leftrightarrow \neg \exists_{x \in A} \left(P(x) \wedge \forall_{y \in A} (P(y) \Rightarrow x = y) \right) \\ (1.16b), \text{Th. 1.11(a)} &\Leftrightarrow \forall_{x \in A} \neg \left(P(x) \wedge \forall_{y \in A} (\neg P(y) \vee x = y) \right) \\ \text{Th. 1.11(i)} &\Leftrightarrow \forall_{x \in A} \left(\neg P(x) \vee \neg \forall_{y \in A} (\neg P(y) \vee x = y) \right) \\ (1.16a) &\Leftrightarrow \forall_{x \in A} \left(\neg P(x) \vee \exists_{y \in A} \neg (\neg P(y) \vee x = y) \right) \\ \text{Th. 1.11(j),(k)} &\Leftrightarrow \forall_{x \in A} \left(\neg P(x) \vee \exists_{y \in A} (P(y) \wedge x \neq y) \right) \\ \text{Th. 1.11(a)} &\Leftrightarrow \forall_{x \in A} \left(P(x) \Rightarrow \exists_{y \in A} (P(y) \wedge x \neq y) \right). \quad (1.21) \end{aligned}$$

Der Ausdruck am Ende gilt g.d.w.

$P(x)$ für alle $x \in A$ falsch ist oder es

zwar $x \in A$ so gibt, dass $P(x)$ wahr, aber es

dann auch $y \neq x$ mit $P(y)$ wahr geben muss,

also gerade Neg. der eindeutigen Existenz.

(c) Gleiche Quantoren vertauschen:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} x^{2n} \geq 0 \Leftrightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}} x^{2n} \geq 0, \quad (1.22a)$$

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}} ny > x^2 \Leftrightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}} \exists_{y \in \mathbb{R}} ny > x^2. \quad (1.22b)$$

(d) Verschiedene Quantoren vertauschen i.A. nicht:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} y > x \quad (\text{W}) \quad (1.23a)$$

$$\exists_{y \in \mathbb{R}} \forall_{x \in \mathbb{R}} y > x \quad (\text{F}) \quad (1.23b)$$

- (e) $\exists!$ eigentlich nur Abkürzung gemäß (1.14),
kein echter Quantor. Vertauscht i.A. weder mit \exists noch mit sich selbst:

$$\exists_{n \in \mathbb{N}} \exists!_{m \in \mathbb{N}} m < n \quad (\text{W})$$

$$\exists!_{m \in \mathbb{N}} \exists_{n \in \mathbb{N}} m < n \quad (\text{F})$$

$$\exists!_{n \in \mathbb{N}} \exists!_{m \in \mathbb{N}} m < n \quad (\text{W})$$

$$\exists!_{m \in \mathbb{N}} \exists!_{n \in \mathbb{N}} m < n \quad (\text{F}).$$

Bem. 1.36: Beweisstrategien:

- (a) $\forall_{x \in A} P(x)$: Man muss $P(x)$ für jedes $x \in A$ beweisen, d.h.
Beispiele reichen nicht!
- (b) $\neg \forall_{x \in A} P(x)$: Finde ein $x \in A$ so, dass
 $P(x)$ falsch (ein Gegenbeispiel reicht).
- (c) $\exists_{x \in A} P(x)$: Finde ein $x \in A$ so, dass $P(x)$
wahr (ein Bsp. reicht).

Def. 1.37: Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge (genannt
Indexmenge). Für jedes $i \in I$ sei A_i
eine Menge (identische A_i zugelassen).

$$(a) \quad \bigcap_{i \in I} A_i := \left\{ x : \forall_{i \in I} x \in A_i \right\}. \quad (1.24a)$$

$$(b) \quad \bigcup_{i \in I} A_i := \left\{ x : \exists_{i \in I} x \in A_i \right\}. \quad (1.24b)$$

\swarrow heißt disjunkt g.d.w. $\forall_{i, j \in I} (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$

Prop. 1.38: Sei $I \neq \emptyset$ Indexmenge; M, A_i Mengen
für jedes $i \in I$. Regeln:

$$(a) \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cap M = \bigcap_{i \in I} (A_i \cap M).$$

$$(b) \quad \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup M = \bigcup_{i \in I} (A_i \cup M).$$

$$(c) \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup M = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup M).$$

$$(d) \quad \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap M = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap M).$$

$$(e) \quad M \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (M \setminus A_i).$$

$$(f) \quad M \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (M \setminus A_i).$$

Bew.: (a),(b),(d),(f): Übung.

(c): Skript.

(e):

$$\begin{aligned} x \in M \setminus \bigcap_{i \in I} A_i &\Leftrightarrow x \in M \wedge \neg \forall_{i \in I} x \in A_i \Leftrightarrow x \in M \wedge \exists_{i \in I} x \notin A_i \\ &\Leftrightarrow \exists_{i \in I} x \in M \setminus A_i \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (M \setminus A_i). \end{aligned}$$

□

Bsp. 1.39:

$$\bigcap_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{N} = \mathbb{N}, \quad (1.25a)$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{1, 2, \dots, n\} = \{1\}, \quad (1.25b)$$

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{N} = \mathbb{N}, \quad (1.25c)$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1, 2, \dots, n\} = \mathbb{N}, \quad (1.25d)$$

$$\mathbb{N} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{2n\} = \{1, 3, 5, \dots\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{N} \setminus \{2n\}). \quad (1.25e)$$

Vergleich mit Notation aus Def. 1.37:

Z.B. in (1.25a) ist

$$I = \mathbb{R}, \quad \forall_{i \in I} A_i = \mathbb{N}$$

(in (1.25a) steht dabei x statt i).

In (1.25b) ist

$$I = \mathbb{N}, \quad \forall_{n \in I} A_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

2. Funktionen & Relationen

2.1. Funktionen

Def. 2.1: Sei $x \in A, y \in B$. Dann heißt

$$(x, y) := \left\{ \{x\}, \{x, y\} \right\} \quad (2.1)$$

das (geordnete) Paar aus x und y . Kartesisches Produkt:

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}. \quad (2.2)$$

Bsp. 2.2:

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset, \quad (2.3a)$$

$$\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\} \quad (2.3b)$$

$$\neq \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}. \quad (2.3c)$$

Für $x \neq y$:

$$(x, y) = \left\{ \{x\}, \{x, y\} \right\} \neq \left\{ \{y\}, \{x, y\} \right\} = (y, x). \quad (2.4)$$

Def. 2.3: A, B seien Mengen. Eine Funktion / Abbildung f ordnet jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ zu.

Schreibe $f(x)$ für y .

$\mathcal{D}(f) := A$: Definitionsbereich (domain) von f ,

$\mathcal{R}(f) := B$: Wertebereich (range) von f .

Notation:

$$f : A \longrightarrow B, \quad \underbrace{x \mapsto f(x)}_{\text{Zuordnungsvorschrift}} \quad (2.5)$$

$f(x)$: das Bild von x ,

x : ein Urbild von $f(x)$,

$$\text{graph}(f) := \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}. \quad (2.6)$$

Ganz genau: f ist das geordnete Tripel $(A, B, \text{graph}(f))$.

$$\mathcal{F}(A, B) := B^A := \{(f : A \longrightarrow B) : A = \mathcal{D}(f) \wedge B = \mathcal{R}(f)\}. \quad (2.7)$$

\nwarrow Menge der Fkt von A nach B

Def. 2.4: Sei $f : A \longrightarrow B$ Fkt.

(a) Für $T \subseteq A$ heißt

$$f(T) := \{f(x) \in B : x \in T\} \quad (2.8)$$

das Bild von T unter f .

(b) Für $U \subseteq B$ heißt

$$f^{-1}(U) := \{x \in A : f(x) \in U\} \quad (2.9)$$

das Urbild von U unter f .

(c) f heißt injektiv (auch eindeutig) g.d.w. jedes $y \in B$ hat höchstens ein Urbild, d.h.

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\Leftrightarrow \forall_{y \in B} \left(f^{-1}\{y\} = \emptyset \vee \exists!_{x \in A} f(x) = y \right) \\ &\Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in A} (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)). \end{aligned} \quad (2.10)$$

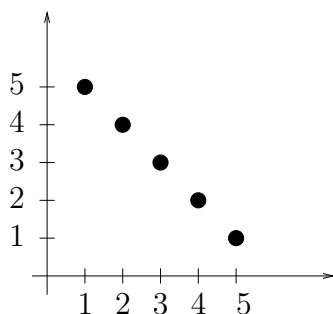
(d) f heißt surjektiv g.d.w. jedes $y \in B$ hat mindestens ein Urbild, d.h.

$$f \text{ surjektiv} \Leftrightarrow \forall_{y \in B} \exists_{x \in A} y = f(x) \Leftrightarrow \forall_{y \in B} f^{-1}\{y\} \neq \emptyset. \quad (2.11)$$

(e) f bijektiv $:\Leftrightarrow f$ injektiv $\wedge f$ surjektiv.

Bsp. 2.5:

$$f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad f(x) := -x + 6. \quad (2.12a)$$



Auch: $x \mapsto -x + 6$ statt $f(x) = -x + 6$

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad g(n) := 2n, \quad (2.12b)$$

$$h : \mathbb{N} \longrightarrow \{2, 4, 6, \dots\}, \quad h(n) := 2n, \quad (2.12c)$$

$$\tilde{h} : \mathbb{N} \longrightarrow \{2, 4, 6, \dots\}, \quad \tilde{h}(n) := \begin{cases} n & \text{für } n \text{ gerade,} \\ n + 1 & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (2.12d)$$

$$G : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad G(n) := n/(n + 1), \quad (2.12e)$$

$$F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \quad F(A) := \mathcal{P}(A). \quad (2.12f)$$

Es ist $g \neq h$ wegen $\mathcal{R}(g) \neq \mathcal{R}(h)$.

Aber $g(\mathbb{N}) = h(\mathbb{N})$.

Weiterhin

$$f(\{1, 2\}) = \{5, 4\} = f^{-1}(\{1, 2\}), \quad \tilde{h}^{-1}(\{2, 4, 6\}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \quad (2.13)$$

f bijektiv, g injektiv (nicht surj.),

\tilde{h} surj. (nicht inj.)

Bsp. 2.6: (a) Identität auf $A \neq \emptyset$:

$\underbrace{\text{Id}}_{\text{auch Id}_A} : A \longrightarrow A, \text{Id}(x) := x$
ist bijektiv.

(b) Konstante Abbildung $f : A \longrightarrow B$:

$$\exists_{c \in B} \forall_{x \in A} f(x) = c.$$

Schreibe auch $f \equiv c$ (“ f ist identisch gleich c ”).

Sei $f \equiv c$, $\emptyset \neq T \subseteq A$ und $U \subseteq B$. Dann:

$$f(T) = \{c\}, \quad f^{-1}(U) = \begin{cases} A & \text{für } c \in U, \\ \emptyset & \text{für } c \notin U. \end{cases} \quad (2.14)$$

f inj. $\Leftrightarrow A = \{x\}$; f surj. $\Leftrightarrow B = \{c\}$.

(c) Für $A \subseteq X$ heißt

$$\iota : A \longrightarrow X, \quad \iota(x) := x, \quad (2.15)$$

Inklusion. Dann: ι inj.; ι surj. $\Leftrightarrow A = X \Leftrightarrow \iota = \text{Id}_A$.

(d) Für $A \subseteq X$, $f : X \longrightarrow B$, $g : A \longrightarrow B$, $\forall_{x \in A} g(x) = f(x)$

heißt g Einschränkung von f auf A ,

f Fortsetzung von g auf X . Schreibe dann $g = f \upharpoonright_A$.

Def. 2.7: Komposition/Hintereinanderausführung

von $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow D$ mit $f(A) \subseteq C$ ist

$$\underbrace{g \circ f}_{\text{lies: "g nach f"}} : A \longrightarrow D, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)). \quad (2.16)$$

Bsp. 2.8:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto n^2, \quad (2.17a)$$

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto 2n. \quad (2.17b)$$

Dann $f(\mathbb{N}) = \{1, 4, 9, \dots\} \subseteq \mathcal{D}(g)$,

$g(\mathbb{N}) = \{2, 4, 6, \dots\} \subseteq \mathcal{D}(f)$,

$$(g \circ f) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(n) = g(n^2) = 2n^2, \quad (2.18a)$$

$$(f \circ g) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(n) = f(2n) = 4n^2. \quad (2.18b)$$

Also i.A. $g \circ f \neq f \circ g$!

Prop. 2.9: $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow D$, $h : E \longrightarrow F$, $f(A) \subseteq C$, $g(C) \subseteq E$.

(a) Assoziativgesetz:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f. \quad (2.19)$$

(b)

$$\forall_{W \in \mathcal{P}(D)} (g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)). \quad (2.20)$$

Bew.: (a)

$$\begin{aligned} \forall_{x \in A} (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(x). \end{aligned} \quad (2.21)$$

(b) Übung. □

Def. 2.10: $g : B \rightarrow A$ heißt rechts- (bzw. links-) invers zu $f : A \rightarrow B$ g.d.w. $f \circ g = \text{Id}_B$ (bzw. $g \circ f = \text{Id}_A$).
 g heißt invers zu f (auch Umkehrabbildung) g.d.w. g rechts- und linksinvers zu f . Schreibe dann $f^{-1} = g$.
 f heißt (rechts-, links-) invertierbar g.d.w. es eine (rechts-, links-) inverse Abb. zu f gibt.

Bsp. 2.11: (a)

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) := 2n, \quad (2.22a)$$

$$g_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad g_1(n) := \begin{cases} n/2 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 1 & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (2.22b)$$

$$g_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad g_2(n) := \begin{cases} n/2 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ 2 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (2.22c)$$

g_1, g_2 beide linksinv. zu f , f hat keine rechtsinv. Abb.
nach Th. 2.12(c) unten.

(b)

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) := \begin{cases} n/2 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ (n+1)/2 & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (2.23a)$$

$$g_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad g_1(n) := 2n, \quad (2.23b)$$

$$g_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad g_2(n) := 2n - 1. \quad (2.23c)$$

g_1, g_2 beide rechtsinv. zu f , f hat keine linksinv. Abb.
nach Th. 2.12(c) unten.

(c)

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) := \begin{cases} n-1 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ n+1 & \text{|| } n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (2.24a)$$



$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad g(n) := \begin{cases} 2 & \text{für } n = 1, \\ 3 & \text{|| } n = 2, \\ 1 & \text{|| } n = 3, \\ n & \text{|| } n \notin \{1, 2, 3\}, \end{cases} \quad (2.24b)$$

$$g^{-1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad g^{-1}(n) := \begin{cases} 3 & \text{für } n = 1, \\ 1 & \text{|| } n = 2, \\ 2 & \text{|| } n = 3, \\ n & \text{|| } n \notin \{1, 2, 3\}. \end{cases} \quad (2.24c)$$

Th. 2.12: Seien $A, B \neq \emptyset$.

(a) $f : A \longrightarrow B$ hat rechtsinv. Abb. $\Leftrightarrow f$ surj.

(b) $f : A \longrightarrow B$ hat linksinv. Abb. $\Leftrightarrow f$ inj.

(c) $f : A \longrightarrow B$ hat inverse Abb. $\Leftrightarrow f$ bijektiv.

In diesem Fall: rechts- und linksinv. Abb. sind eindeutig und $= f^{-1}$.

Bew.: (a) Sei f surj. Dann: $\forall_{y \in B} \exists_{x_y \in A} f(x_y) = y$.

Def.

$$g : B \longrightarrow A, \quad g(y) := x_y. \quad (2.25)$$

g ist rechtsinv.: $\forall_{y \in B} f(g(y)) = y$.

Umgekehrt sei $g : B \longrightarrow A$ rechtsinv. zu f .

$\forall_{y \in B} y = f(g(y))$, d.h. $g(y) \in f^{-1}\{y\}$, d.h. f ist surj.

(b) Sei f inj. und $a \in A$ fest. $\forall_{y \in B} \left(f^{-1}\{y\} \neq \emptyset \Rightarrow \exists!_{x_y \in A} f(x_y) = y \right)$.

Def.

$$g : B \longrightarrow A, \quad g(y) := \begin{cases} x_y & \text{für } f^{-1}\{y\} \neq \emptyset, \\ a & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.26)$$

g linksinv., da $\forall_{x \in A} g(f(x)) = x$.

Umgekehrt sei $g : B \longrightarrow A$ linksinv. zu f . Sind $x_1, x_2 \in A$

mit $f(x_1) = f(x_2) = y$, so

$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2$, also f inj.

(c) Sei g linksinv. zu f , h rechtsinv. zu f . Dann:

$$\forall_{y \in B} g(y) = (g \circ (f \circ h))(y) = ((g \circ f) \circ h)(y) = h(y), \quad (2.27)$$

also $g = h$. Auch:

f inv.bar $\Rightarrow g = h = f^{-1}$ sowie f bij. nach (a), (b).

Umgekehrt: f bij. $\stackrel{(a),(b)}{\Rightarrow} f$ hat Linksinv. g und Rechtsinv. h . Nach (2.27) ist $g = h$ und f inv.bar. \square

Th. 2.13: Sei $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$.

f, g inj. $\Rightarrow g \circ f$ inj.

\parallel surj. $\Rightarrow \parallel$ surj.

\parallel bij. $\Rightarrow \parallel$ bij. und

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \quad (2.28)$$

Bew.: Übung. \square

Def. 2.14: (a) Sei I Indexmenge. $f : I \longrightarrow A$ heißt

dann auch Familie (von Elementen in A); man schreibt

$f = (a_i)_{i \in I}$ mit $a_i := f(i)$ (oft wird dann f und

A gar nicht explizit angegeben). Oft sind die

a_i selbst wieder Mengen.

(b) Folge in A : Familie in A mit $I = \mathbb{N}$.

Schreibe dann $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (a_1, a_2, \dots)

Allgemeiner: Familie heißt auch dann Folge, wenn es

bij. Abb. $\phi : I \longrightarrow B \subseteq \mathbb{N}$ gibt.

(c) Kartesisches Produkt für Familien von Mengen $(A_i)_{i \in I}$:

$$\prod_{i \in I} A_i := \left\{ \left(f : I \longrightarrow \bigcup_{j \in I} A_j \right) : \forall_{i \in I} f(i) \in A_i \right\}. \quad (2.29)$$

Hat I genau $n \in \mathbb{N}$ Elemente, so heißen die El.

von $\prod_{i \in I} A_i$ (geordnete) n -Tupel (Tripel für $n = 3$).

Bsp. 2.15: (a) Def. 1.37 def. \bigcap und \bigcup der Familie $(A_i)_{i \in I}$.
Z.B. in (1.25b):

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad A_n := \{1, 2, \dots, n\}, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{1\}. \quad (2.30)$$

(b) Folgen:

$$\text{In } \{0, 1\} : \quad (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots). \quad (2.31a)$$

$$\text{In } \mathbb{N} : \quad (n^2)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 4, 9, 16, 25, \dots). \quad (2.31b)$$

$$\text{In } \mathbb{R} : \quad ((-1)^n \sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}} = (-1, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \dots). \quad (2.31c)$$

$$\text{In } \mathbb{R} : \quad (1/n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right). \quad (2.31d)$$

$$\text{Endliche Folge in } \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \quad (\{3, 2, 1\}, \{2, 1\}, \{1\}, \emptyset). \quad (2.31e)$$

(c) Für $\forall_{i \in I} A_i = A$ gilt $\prod_{i \in I} A = A^I = \mathcal{F}(I, A)$.

Z.B. $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: Menge der Folgen in \mathbb{R} .

Für $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{i \in I} A = A^{\{1, 2, \dots, n\}} =: \prod_{i=1}^n A =: A^n \quad (2.32)$$

(Menge der n -Tupel in A).

—

Erklärung der Notation 2^A für $\mathcal{P}(A)$:

Def. 2.16: Sei $B \subseteq A$. Dann heißt

$$\chi_B : A \longrightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_B(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B, \\ 0 & \text{für } x \notin B, \end{cases} \quad (2.33)$$

die charakteristische Funktion von B (bez. Grundmenge A)
(man schreibt auch 1_B oder $\mathbb{1}_B$ statt χ_B).

Prop. 2.17: A sei Menge. Dann ist

$$\chi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \underbrace{\{0, 1\}^A}, \quad \chi(B) := \chi_B, \quad (2.34)$$

↙ Menge der Fkt. von A nach $\{0, 1\}$

bijektiv.

Bew.: χ inj.: Seien $B, C \in \mathcal{P}(A)$ mit $\exists_{x \in B} x \notin C$.

Dann: $\chi_B(x) = 1$ und $\chi_C(x) = 0$, also $\chi(B) \neq \chi(C)$.

χ surj.: Zu $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ def. $B := \{x \in A : f(x) = 1\}$.

Dann ist $\chi(B) = \chi_B = f$. □

Schreibt man 2^A für $\mathcal{P}(A)$, so identifiziert man $\mathcal{P}(A)$ mit $\{0, 1\}^A$ gemäß (2.34), wobei in Mengenlehre oft 2 mit $\{0, 1\}$ identifiziert wird.

2.2. Relationen

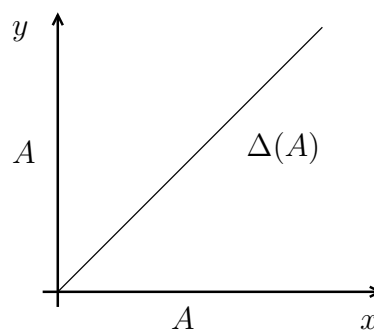
Def. 2.18: Relation R ist eine Teilmenge R von $A \times B$.

Für $A = B$ heißt R Rel. auf A .

Schreibe: $a R b \Leftrightarrow (a, b) \in R$.

Bsp. 2.19: (a) Gleichheitsrel. “=” auf $A \neq \emptyset$:

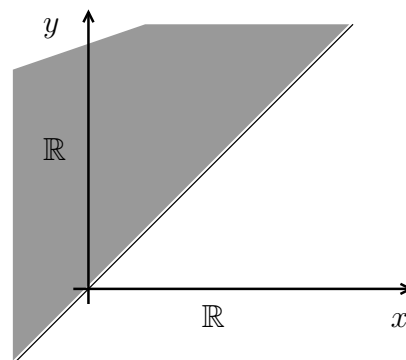
$$R := \underbrace{\Delta(A)}_{\text{Diagonale von } A \times A} := \{(x, x) \in A \times A : x \in A\}. \quad (2.35)$$



$$x = y \Leftrightarrow x R y \Leftrightarrow (x, y) \in R = \Delta(A). \quad (2.36)$$

“ \leq ” auf \mathbb{R} ist

$$R_{\leq} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}. \quad (2.37)$$



(b) Funktion als Relation: Für $f : A \rightarrow B$ gilt

$$R_f = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\} = \text{graph}(f) \quad (2.38)$$

ist Rel.

Relation als Funktion: $R \subseteq A \times B$, $B \neq \emptyset$ lässt sich als die Fkt

$$f_R : A \rightarrow \mathcal{P}(B), \quad f_R(x) = \{y \in B : x R y\}, \quad (2.39)$$

auffassen.

Def. 2.20: Sei R Rel. auf A .

(a)

$$R \text{ reflexiv} \quad \text{g.d.w.} \quad \forall_{x \in A} x R x. \quad (2.40)$$

(b)

$$R \text{ symmetrisch} \quad \text{g.d.w.} \quad \forall_{x, y \in A} (x R y \Rightarrow y R x). \quad (2.41)$$

(c)

$$R \text{ antisym.} \quad \text{g.d.w.} \quad \forall_{x, y \in A} ((x R y \wedge y R x) \Rightarrow x = y). \quad (2.42)$$

(d)

$$R \text{ transitiv} \quad \text{g.d.w.} \quad \forall_{x, y, z \in A} ((x R y \wedge y R z) \Rightarrow x R z). \quad (2.43)$$

Bsp. 2.21:

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : (x, y \text{ beide gerade}) \vee (x, y \text{ beide ungerade})\}, \quad (2.44)$$

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : y = x^2\}. \quad (2.45)$$

	ref.	sym.	a.sym.	trans.
"=" auf $A \neq \emptyset$	W	W	W	W
"≤" auf \mathbb{R} od. \mathbb{N}	W	F	W	W
"<" auf \mathbb{R} od. \mathbb{N}	F	F	W da $(x < y \wedge y < x)$ F	W
R	W	W	F	W
S	F	F	W $xSy \wedge ySx \Rightarrow x = y = 1$	F

Def. 2.22: Rel. R auf A heißt Äquivalenzrel.

$\Leftrightarrow R$ ref., sym. & trans.

Notation bei Äqu.rel. oft $x \sim y$ statt $x R y$.

Bsp. 2.23: (a) "=" ist Äqu.rel. auf $A \neq \emptyset$.

(b) R aus (2.44) ist Äqu.rel. auf \mathbb{N} .

(c) Sei $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, alle $A_i \neq \emptyset$ (Zerlegung von A).

Dann def.

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists_{i \in I} (x \in A_i \wedge y \in A_i). \quad (2.46)$$

Äqu.rel. auf A .

Ist umgekehrt \sim Äqu.rel. auf $A \neq \emptyset$, so gehört dazu eine Zerl. $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ so, dass (2.46) gilt:

$$[x] := \{y \in A : x \sim y\}. \quad (2.47)$$

\curvearrowright Äquivalenzklasse von $x \in A$

Die El. von $[x]$ heißen Repräsentanten von $[x]$.

\sim Äqu.rel. \Rightarrow

$$([x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y) \quad \wedge \quad ([x] \cap [y] = \emptyset \Leftrightarrow \neg(x \sim y)). \quad (2.48)$$

Setze $I := A / \sim := \underbrace{\{[x] : x \in A\}}_{\text{Quotientenmenge von } A \text{ nach } \sim}$.

Mit $A_i := i$ gilt dann $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Def. 2.24: Rel. R auf A heißt Partialordnung (PO) g.d.w.

R ref., antisym. & trans. Für PO: $x \leq y$ statt $x R y$.

Eine PO \leq heißt totale oder lineare Ordnung (TO) g.d.w.

$$\forall_{x, y \in A} (x \leq y \vee y \leq x).$$

Notation 2.25: Sei \leq PO auf $A \neq \emptyset$. Schreibe

$$x < y := x \leq y \wedge x \neq y.$$

\curvearrowright die strenge Ordnung zu \leq

Achtung: $<$ ist keine PO (nicht ref.)

Def. 2.26: \leq sei PO auf $A \neq \emptyset, \emptyset \neq B \subseteq A$.

- (a) $x \in A$ untere Schranke von B g.d.w. $\forall_{b \in B} x \leq b$,
 $x \in A$ obere Schranke von B g.d.w. $\forall_{b \in B} b \leq x$,
 B nach unten beschränkt g.d.w. es gibt untere Schr. von B ,
 B nach oben beschränkt g.d.w. es gibt obere Schr. von B ,
 B beschränkt g.d.w. B nach unten und oben beschränkt.
- (b) $x \in B$ heißt Minimum von B ($x = \min B$) g.d.w. x untere Schr.,
 $x \in B$ heißt Maximum von B ($x = \max B$) g.d.w. x obere Schr.
- (c) \swarrow Infimum
 $\inf B := \max\{x \in A : x \text{ untere Schr. für } B\}$ (muss nicht existieren!)
 $\sup B := \min\{x \in A : x \text{ obere Schr. für } B\}$ (muss nicht existieren!)
 \nwarrow Supremum

Bsp. 2.27: (a) Das übliche \leq ist TO auf jedem $A \subseteq \mathbb{R}$.

Sei $A := \mathbb{R}$ mit üblicher TO \leq .

B	\mathbb{N}	$\{1, 2, 3\}$	$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
ob. Schr. B	/	z.B. 3, 9.9	/
unt. Schr. B	z.B. 0, 1	z.B. $\frac{1}{2}, 1$	z.B. -1, 0
$\max B$	/	3	/
$\min B$	1	1	/
$\sup B$	/	3	/
$\inf B$	1	1	0

(b) $A := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Def.

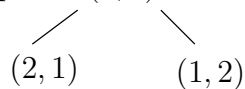
$$(m_1, m_2) \leq (n_1, n_2) \Leftrightarrow m_1 \leq n_1 \wedge m_2 \leq n_2. \quad (2.49)$$

Ist PO, aber nicht TO (z.B. weder $(1, 2) \leq (2, 1)$ noch $(2, 1) \leq (1, 2)$).

Sei

$$B := \{(1, 1), (2, 1), (1, 2)\}. \quad (2.50)$$

$$\sup B = (2, 2)$$



$$(1, 1) = \min B \quad \text{Gibt kein Max. von } B.$$

$$\text{Bew.: } (2, 2) = \sup B:$$

$$\forall_{(m,n) \in B} (m, n) \leq (2, 2).$$

Sei (m, n) ob. Schr. von B . Dann $(2, 1) \leq (m, n) \Rightarrow 2 \leq m$,

$$(1, 2) \leq (m, n) \Rightarrow 2 \leq n,$$

also $(2, 2) \leq (m, n)$.

Andere Ordnung auf A (lexikographische Ord.):

$$(m_1, m_2) \leq (n_1, n_2) \Leftrightarrow m_1 < n_1 \vee (m_1 = n_1 \wedge m_2 \leq n_2). \quad (2.51)$$

Dies ist TO auf A .

Lem. 2.28: \leq sei PO auf $A \neq \emptyset$, $\emptyset \neq B \subseteq A$.

Die Rel. \geq mit

$$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x \quad (2.52)$$

ist auch PO auf A und für alle $x \in A$ gilt:

$$x \leq\text{-untere Schr. für } B \Leftrightarrow x \geq\text{-ob. Schr. für } B, \quad (2.53a)$$

$$x \leq\text{-ob. Schr. für } B \Leftrightarrow x \geq\text{-unt. Schr. für } B, \quad (2.53b)$$

$$x = \min_{\leq} B \Leftrightarrow x = \max_{\geq} B, \quad (2.53c)$$

$$x = \max_{\leq} B \Leftrightarrow x = \min_{\geq} B, \quad (2.53d)$$

$$x = \inf_{\leq} B \Leftrightarrow x = \sup_{\geq} B, \quad (2.53e)$$

$$x = \sup_{\leq} B \Leftrightarrow x = \inf_{\geq} B. \quad (2.53f)$$

Bew.: \leq ref., antisym., trans.

$\Rightarrow \geq$ ref., antisym., trans. (klar).

Weiterhin:

$$x \leq\text{-unt. Schr. für } B \Leftrightarrow \forall_{b \in B} x \leq b \Leftrightarrow \forall_{b \in B} b \geq x$$

$\Leftrightarrow x \geq\text{-ob. Schr. für } B$, was (2.53a) beweist.

Analog: (2.53b). (2.53a) \Rightarrow (2.53c).

(2.53b) \Rightarrow (2.53d).

(2.53e):

$$\begin{aligned} x = \inf_{\leq} B &\Leftrightarrow x = \max_{\leq} \{y \in A : y \leq\text{-unt. Schr. für } B\} \\ &\Leftrightarrow x = \min_{\geq} \{y \in A : y \geq\text{-ob. Schr. für } B\} \\ &\Leftrightarrow x = \sup_{\geq} B, \end{aligned}$$

(2.53f) analog. □

Prop. 2.29: Die El. $\max B$, $\min B$, $\sup B$, $\inf B$ sind eindeutig, sofern sie existieren.

Bew.: Übung. □

Def. 2.30: $A, B \neq \emptyset$ seien Mengen mit PO \leq .

$f : A \rightarrow B$ heißt (streng) isoton/wachsend/ordnungserhaltend g.d.w.

$$\forall_{x,y \in A} (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \underbrace{(\text{bzw. } f(x) < f(y))}_{\text{für streng}}); \quad (2.54a)$$

f heißt (streng) antiton/fallend/ordnungsumkehrend g.d.w.

$$\forall_{x,y \in A} (x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \underbrace{(\text{bzw. } f(x) > f(y))}_{\text{für streng}}). \quad (2.54b)$$

f (streng) monoton g.d.w. f (str.) isoton oder antiton.

Prop. 2.31: A, B, \leq wie vorher, $f : A \rightarrow B$.

- (a) f (str.) isoton wird (str.) antiton, wenn \leq entweder auf A oder auf B durch \geq ersetzt wird (und umgekehrt).
- (b) Ist \leq TO auf A und f str. monoton, so ist f inj.
- (c) Ist \leq TO auf A und f inv.bar und str. isoton (bzw. str. antiton), so ist auch f^{-1} str. isoton (bzw. str. antiton).

Bew.: (a) liest man aus (2.54) ab.

(b): Reicht f str. isoton zu betrachten (wegen (a)).

Sei f str. isoton.

$x \neq y \Rightarrow (x < y \vee y < x)$ (da \leq TO auf A).

Also $f(x) < f(y) \vee f(y) < f(x)$, d.h., $f(x) \neq f(y)$,

d.h., f inj.

(c): Wieder reicht f str. isoton wegen (a).

Sei f str. isoton.

Für $u, v \in B$ mit $u < v$

folgt aus $u = f(f^{-1}(u))$ und $v = f(f^{-1}(v))$,

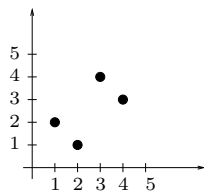
dass $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$

(sonst wäre $f^{-1}(v) < f^{-1}(u)$ (da \leq TO auf A) und

f isoton $\Rightarrow v < u$). □

Bsp. 2.32: (a)

	fallend	str. fallend	steigend	str. steigend
$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) := 2n$	F	F	W	W
$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ konstant	W	F	W	F
$\ , f(n) = \begin{cases} n-1 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ n+1 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$	F	F	F	F



- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := -2x$, ist inv.b. \wedge str. fallend,
 $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) := -\frac{x}{2}$ ebenso.
- (c) weglassen.

3. Natürliche Zahlen, Induktion, Größe von Mengen

3.1. Induktion & Rekursion

Induktion: Beweismethode für Aussagen der Form

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \phi(n). \quad (3.1)$$

Grundlage: \mathbb{N} erfüllt die Peanoaxiome:

P1: \mathbb{N} enthält ein ausgezeichnetes Element, genannt 1.

P2: Es gibt inj. Abb. $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$, genannt
 Nachfolgerfkt. ($S(n)$: Nachfolger (successor) von n).

P3:

$$\forall_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})} \left(1 \in A \wedge \underbrace{S(A) \subseteq A}_{\forall_{n \in A} S(n) \in A} \Rightarrow A = \mathbb{N} \right).$$

Bem. 3.1: In der axiomatischen Mengenlehre zeigt man,
 dass es eine Menge \mathbb{N} gibt, die P1, P2, P3 erfüllt
 und definiert dann $2 := S(1), 3 := S(2), \dots, n + 1 := S(n)$.

Th. 3.2 (Prinzip der Induktion): Gelten (a),(b) mit

- (a) $\phi(1)$ ist wahr,
 (b) $\forall_{n \in \mathbb{N}} (\phi(n) \Rightarrow \phi(n + 1))$,

so ist (3.1) wahr.

Bew.: Sei $A := \{n \in \mathbb{N} : \phi(n)\}$. Zu zeigen: $A = \mathbb{N}$.

Es ist $1 \in A$ nach (a) und

$$n \in A \Rightarrow \phi(n) \stackrel{(b)}{\Rightarrow} \phi(n+1) \Rightarrow S(n) = n+1 \in A, \quad (3.2)$$

also $S(A) \subseteq A$ und dann $A = \mathbb{N}$ nach P3. \square

Bem. 3.3: Induktionsbeweis erfolgt in 2 Schritten:

(a) Ind.verankerung/Ind.anfang: Zeige $\phi(1)$ ist wahr.

(b) Ind.schritt: Zeige $\underbrace{\phi(n)}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} \Rightarrow \phi(n+1)$.

Induktionsvoraussetzung

Bsp. 3.4: Zeige:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \left(\underbrace{1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}}_{\phi(n)} \right) : \quad (3.3)$$

$n = 1$ (Ind.verankerung): $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, d.h. $\phi(1)$ ist wahr.

Ind.voraussetzung: Annahme: $\phi(n)$ ist wahr.

Ind.schritt:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &\stackrel{\phi(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

d.h. $\phi(n+1)$ ist wahr. \square

Korollar 3.5: In Th. 3.2 darf man (b) ersetzen durch

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \left(\underbrace{\left(\forall_{1 \leq m \leq n} \phi(m) \right)}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} \Rightarrow \phi(n+1) \right). \quad (3.5)$$

Bew.: Setze $\psi(n)$. Bew. von $\forall_{n \in \mathbb{N}} \psi(n)$ durch Ind.:

Ind.verankerung ($n = 1$): $\psi(1) = \phi(1)$ und gilt nach Th. 3.2(a).

Ind.schritt: $\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)$ gilt wegen (3.5).

Also gilt $\forall_{n \in \mathbb{N}} \psi(n)$, also auch $\forall_{n \in \mathbb{N}} \phi(n)$. \square

Kor. 3.6: $\forall_{i \in I} \phi(i)$ gilt, falls es $f : \mathbb{N} \rightarrow I$ bij. gibt mit

- (a) $\phi(f(1))$ ist wahr.
 (b) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \left(\phi(f(n)) \Rightarrow \phi(f(n+1)) \right)$.

Zusatz (endl. Induktion): Kor. 3.6 gilt auch für
 $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow I$ bij. (in (b) steht dann statt \mathbb{N}
 die Menge $\{1, \dots, m-1\}$).

Bew.: Nach Th. 3.2 gilt $\psi(n) := \phi(f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für $i \in I$ gilt für $n := f^{-1}(i)$, dass $f(n) = i$.

Also ist $\phi(i) = \phi(f(n)) = \psi(n)$ wahr.

Zusatz: Sei $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow I$ bij. Zeige:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left((n \leq m \wedge \phi(f(n))) \vee n > m \right)}_{\psi(n)}.$$

Ind.verank. ($n = 1$): $\psi(1)$ gilt, da $1 \leq m$ und $\phi(f(1))$ nach (a) gilt.

Ind.schritt:

Fall $1 \leq n < m$: $\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)$ gilt wegen (b).

Fall $n \geq m$: $\psi(n+1)$ gilt, da $n+1 > m$.

Für $i \in I$ gilt für $n := f^{-1}(i)$, dass $n \leq m$ und

$f(n) = i$.

$$n \leq m \wedge \psi(n) \Rightarrow \underbrace{\phi(f(n))}_{\phi(i)}.$$

□

Th. 3.7 (Rekursionssatz): Sei $A \neq \emptyset$, $x \in A$. Zu
 jeder Fkt.folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : A^n \rightarrow A$, gibt es
 genau eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit

(i) $x_1 = x$.

(ii) $\forall_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1} = f_n(x_1, \dots, x_n)$.

Bem.: Wie in Kor. 3.6 geht auch I statt \mathbb{N} .

Bew.: Eindeutigkeit: Sind $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 Folgen in A mit

$$x_1 = y_1 = x \quad \text{und} \tag{3.6a}$$

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} (x_{n+1} = f_n(x_1, \dots, x_n) \wedge y_{n+1} = f_n(y_1, \dots, y_n)), \tag{3.6b}$$

so gilt

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{x_n = y_n}_{\phi(n)} : \tag{3.7}$$

Ind.verank. ($n = 1$): $\phi(1)$ gilt nach (3.6a).

Ind.vor.: $\forall_{m \in \{1, \dots, n\}} x_m = y_m$.

Ind.schritt:

$$x_{n+1} \stackrel{(3.6b)}{=} f_n(x_1, \dots, x_n) \stackrel{(\phi(1), \dots, \phi(n))}{=} f_n(y_1, \dots, y_n) \stackrel{(3.6b)}{=} y_{n+1}, \quad (3.8)$$

d.h. $\phi(n+1)$ gilt.

Existenz: Nur im Skript mit (3.9) – (3.12). \square

Bsp. 3.8: In Rekursion oft $g_n : A \rightarrow A$ und

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} (f_n : A^n \rightarrow A, \quad f_n(a_1, \dots, a_n) := g_n(a_n)). \quad (3.13)$$

(a) Fakultätsfkt: $F : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n!$, rek.

def. durch

$$0! := 1, \quad 1! := 1, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} (n+1)! := (n+1) \cdot n! \quad (3.14a)$$

(also $A = \mathbb{N}$, $g_n(x) := (n+1) \cdot x$).

Dann:

$$(n!)_{n \in \mathbb{N}_0} = (1, 1, 2, 6, 24, \dots). \quad (3.14b)$$

(b) Sei $a, d \in \mathbb{R}$. Arithmetische Folge:

$$a_1 := a, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} a_{n+1} := a_n + d, \quad (3.15a)$$

(also $A = \mathbb{R}$, $g_n = g$ mit $g(x) := x + d$).

$$a = 2, \quad d = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 1.5, 1, \dots). \quad (3.15b)$$

(c) Sei $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Geometr. Folge:

$$x_1 := a, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1} := x_n \cdot q \quad (3.16a)$$

($A = \mathbb{R}$, $g_n = g$ mit $g(x) := x \cdot q$).

$$a = 3, \quad q = -2 \quad \Rightarrow \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (3, -6, 12, \dots). \quad (3.16b)$$

Bsp. 3.9: (a) Fibonaccizahlen:

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} F_{n+1} := F_n + F_{n-1}, \quad (3.17a)$$

also $A = \mathbb{N}_0$ und

$$f_n : A^n \rightarrow A, \quad f_n(a_1, \dots, a_n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ a_n + a_{n-1} & \text{für } n \geq 2. \end{cases} \quad (3.17b)$$

Also

$$(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots). \quad (3.17c)$$

(b) Sei $A := \mathbb{N}$, $x := 1$,

$$f_n : A^n \longrightarrow A, \quad f_n(a_1, \dots, a_n) := a_1 + \dots + a_n. \quad (3.18a)$$

Dann:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, & x_2 &= f_1(1) = 1, & x_3 &= f_2(1, 1) = 2, \\ x_4 &= f_3(1, 1, 2) = 4, & \dots & \end{aligned} \quad (3.18b)$$

Def. 3.10: (a) Summationssymbol: Sei (a_1, a_2, \dots) Folge in A ,
'+' sei auf A definiert (z.B. $A = \mathbb{R}$). Def.

$$\sum_{i=1}^1 a_i := a_1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i := a_{n+1} + \sum_{i=1}^n a_i \text{ für } n \geq 1, \quad (3.19a)$$

also

$$f_n : A^n \longrightarrow A, \quad f_n(x_1, \dots, x_n) := x_n + a_{n+1}. \quad (3.19b)$$

[Statt i in (3.19a) geht alles (z.B. j, α, ν, \dots) außer
 n und a .]

Ist $\phi : \{1, \dots, n\} \longrightarrow I$ bij., so def.

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{i=1}^n a_{\phi(i)}. \quad (3.19c)$$

$$\text{Auch: } \sum_{i \in \emptyset} a_i := 0. \quad (3.19d)$$

(b) Produktsymbol (hier sei ' \cdot ' auf A def.):

$$\prod_{i=1}^1 a_i := a_1, \quad \prod_{i=1}^{n+1} a_i := a_{n+1} \cdot \prod_{i=1}^n a_i \text{ für } n \geq 1, \quad (3.20a)$$

also

$$f_n : A^n \longrightarrow A, \quad f_n(x_1, \dots, x_n) := x_n \cdot a_{n+1}. \quad (3.20b)$$

Ist $\phi : \{1, \dots, n\} \longrightarrow I$ bij., so def.

$$\prod_{i \in I} a_i := \prod_{i=1}^n a_{\phi(i)}. \quad (3.20c)$$

$$\text{Auch: } \prod_{i \in \emptyset} a_i := 1. \quad (3.20d)$$

Bsp. 3.11: (a) Für die arithm. Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus (3.15a) gilt

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} a_n = a + (n-1)d, \quad (3.21a)$$

$$\text{arithm. Summe } \nearrow \forall_{n \in \mathbb{N}} S_n := \sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d). \quad (3.21b)$$

Bew.: Induktion (Übung).

(b) Für die geom. Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus (3.16a) gilt

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} x_n = a q^{n-1}, \quad (3.22a)$$

$$\begin{aligned} \text{geom. Summe } \nearrow \forall_{n \in \mathbb{N}} S_n &:= \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (a q^{i-1}) = a \sum_{i=0}^{n-1} q^i \\ &= \begin{cases} n a & \text{für } q = 1, \\ \frac{a(1-q^n)}{1-q} & \text{für } q \neq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.22b)$$

Bew. von (3.22a) (Ind.):

Ind.verank. ($n = 1$): $x_1 = a q^0 = a$ stimmt.

Ind.schritt:

$$\begin{aligned} \swarrow \text{Ind.vor. } x_n &= a q^{n-1} \\ x_{n+1} &= x_n \cdot q = a q^{n-1} \cdot q = a q^n. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Für $q = 1$ folgt (3.22b) aus (3.21b).

Bew. von (3.22b) für $q \neq 1$ (Ind.):

$$\text{Zeige: } \forall_{n \in \mathbb{N}} S_n = \underbrace{\frac{a(1-q^n)}{1-q}}_{\phi(n)}.$$

Ind.verank. ($n = 1$): $S_1 = \frac{a(1-q)}{1-q} = a$, d.h., $\phi(1)$ stimmt.

Ind.schritt:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + x_{n+1} \stackrel{\text{Ind.vor. } \phi(n)}{=} \frac{a(1-q^n)}{1-q} + a q^n \\ &= \frac{a(1-q^n) + a q^n(1-q)}{1-q} = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

d.h., $\phi(n+1)$ gilt.

3.2. Kardinalität: Die Mächtigkeit (Größe) von Mengen

Def. 3.12: (a) A, B heißen gleichmächtig g.d.w.

$$\exists_{\varphi: A \rightarrow B} \varphi \text{ bij.}$$

(b) A hat Kardinalität/Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$

(Notation: $\#A = n$) g.d.w.

$$\exists_{\varphi: A \rightarrow \{1, \dots, n\}} \varphi \text{ bij.}$$

Auch $\#\emptyset := 0$.

A endlich g.d.w. $\exists_{n \in \mathbb{N}_0} \#A = n$.

Sonst: A unendlich ($\#A = \infty$).

Achtung: Unendl. Mengen sind i.A. nicht gleichmächtig, z.B. sind \mathbb{N} und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht

|| (siehe Th. 3.20 unten).

(c) A abzählbar g.d.w. A endl. oder A gleichmächtig zu \mathbb{N} .

In diesem Abschnitt viele Ergebnisse ohne Beweis (bzw. Bew. nur im Skript).

Th. 3.13: Sei $A \neq \emptyset$ endlich.

(a) $B \subseteq A$ mit $A \neq B$
 $\Rightarrow B$ endl. mit $\#B < \#A$.

(b) $a \in A \Rightarrow \#(A \setminus \{a\}) = \#A - 1$.

Th. 3.14: Für $\#A = \#B = n \in \mathbb{N}$ und $f: A \rightarrow B$ sind äquivalent:

(i) f ist inj.

(ii) f ist surj.

(iii) f ist bij.

Lem. 3.15: Sei A endl. (d.h. $\#A = n \in \mathbb{N}_0$), $B \subseteq A$.
 Dann: $\#(A \setminus B) = \#A - \#B$.

Bew.: Fall $B = \emptyset$: $\#(A \setminus B) = \#A = \#A - 0 = \#A - \#B$.

Fall $B \neq \emptyset$: Endliche Induktion über $\{1, \dots, n\}$:

$$\forall_{m \in \{1, \dots, n\}} \underbrace{(\#B = m \Rightarrow \#(A \setminus B) = \#A - \#B)}_{\phi(m)}.$$

Ind.verank. ($m = 1$): $\phi(1)$ gilt nach Th. 3.13(b).

Ind.vor.: Es gelte $\phi(m)$ für $1 \leq m < n$.

Ind.schritt: Sei $B \subseteq A$ mit $\#B = m + 1$, $b \in B$.

Setze $B_1 := B \setminus \{b\}$. Th. 3.13(b) $\Rightarrow \#B_1 = m$.

Wegen $A \setminus B = (A \setminus B_1) \setminus \{b\}$ folgt

$$\begin{aligned} \#(A \setminus B) &= \#((A \setminus B_1) \setminus \{b\}) = \#(A \setminus B_1) - 1 \\ &\stackrel{\phi(m)}{=} \#A - \#B_1 - 1 = \#A - \#B, \end{aligned}$$

d.h., $\phi(m + 1)$ gilt. □

Th. 3.16: A, B endl. $\Rightarrow \#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

Th. 3.17: A_1, \dots, A_n endl.

$$\Rightarrow \# \prod_{i=1}^n A_i = \#(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \#A_i. \quad (3.25)$$

Th. 3.18: $\#A = n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \#\mathcal{P}(A) = 2^n$.

Bem. 3.19: Widerspruchsbeweis/indirekter Beweis basiert auf

$$\begin{array}{c|c||c} A & \neg A & A \wedge \neg A \\ \hline W & F & F \\ \hline F & W & F \end{array}. \quad (3.26)$$

Um B zu beweisen, zeigt man $\neg B \Rightarrow A \wedge \neg A$
für eine beliebige Aussage A . Da $A \wedge \neg A$ falsch ist,
muss auch $\neg B$ falsch sein, also B richtig.

Th. 3.20: Es gibt keine surj. Abb. $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$
(in diesem Sinn ist immer $\#\mathcal{P}(A) > \#A$).

Bew.: Klar, für $A = \emptyset$. Für $A \neq \emptyset$ Widerspruchsbeweis:
Ang., $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ ist surj. Def.

$$B := \{x \in A : x \notin f(x)\}. \quad (3.27)$$

$$B \subseteq A \Rightarrow \exists_{a \in A} f(a) = B.$$

Wenn $a \in B$, so $a \notin f(a) = B$, d.h. $a \in B \Rightarrow a \in B \wedge \neg(a \in B)$, also folgt $a \notin B$. Daraus folgt $a \in f(a) = B$.

Insgesamt: f surj. $\Rightarrow a \in B \wedge \neg(a \in B)$, d.h.,
 f ist nicht surj. □

Th. 3.21: (a) Ist \leq TO auf A und $\emptyset \neq B \subseteq A$ endl.,
so existieren $\max B$ und $\min B$.

(b) Jedes $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{N}$ hat ein Minimum.

Prop. 3.22: $A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow A$ abzählbar.

Prop. 3.23: Für $A \neq \emptyset$ sind äquivalent:

- (i) A ist abzählbar.
- (ii) Es gibt $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ inj.
- (iii) Es gibt $g : \mathbb{N} \rightarrow A$ surj.

Th. 3.24: Sind A_1, \dots, A_n abzählbar, so ist
 $\prod_{i=1}^n A_i$ abzählbar.

Th. 3.25: Ist $(A_i)_{i \in I}$ abzählbare Familie abzählb.
Mengen (also I abz.b. und alle A_i abz.b.), so ist
auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ abzählbar.

4. Reelle Zahlen

4.1. \mathbb{R} als vollständig total geordneter Körper (engl.: field)

Def. 4.1: Eine TO \leq auf $A \neq \emptyset$ heißt vollständig g.d.w. jede
Teilmenge $\emptyset \neq B \subseteq A$, die nach oben beschr. ist, ein Sup. hat,
d.h., g.d.w.

$$\forall_{B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}} \left(\left(\exists_{x \in A} \forall_{b \in B} b \leq x \right) \Rightarrow \exists_{s \in A} s = \sup B \right). \quad (4.1)$$

Lem. 4.2: TO \leq auf $A \neq \emptyset$ ist vollst. g.d.w.
jede nach unten beschr. Menge $\emptyset \neq B \subseteq A$ ein Inf. hat.

Bew.: “ \Rightarrow ”: Setze

$$C := \{x \in A : x \text{ untere Schr. f\u00fcr } B\}. \quad (4.2)$$

Jedes $b \in B$ ist obere Schr. f\u00fcr C und nach (4.1)

gibt es $s := \sup C$. Wenn $s \in C$, so $s = \inf B$.

Tats\u00e4chlich gilt $s \in C$:

$b \in B \Rightarrow b$ ob. Schr. f\u00fcr C , also $s \leq b$, da s

die kleinste ob. Schr. von C ist. Also s unt. Schr.

f\u00fcr B , d.h. $s \in C$ und $s = \inf B$.

“ \Leftarrow ” folgt nun aus Lem. 2.28. □

Def. 4.3: $A \neq \emptyset$ mit Abb.

$$\circ : A \times A \longrightarrow A, \quad (x, y) \mapsto x \circ y \quad (4.3)$$

\swarrow Verkn\u00fcpfung auf A (Bsp.: $A = \mathbb{R}$, “ \circ ” = “+” oder “ \circ ” = “.”)

he\u00dft Gruppe bez. \circ g.d.w. gelten:

(i) Assoziativit\u00e4t: $\forall_{x, y, z \in A} \quad x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z.$

(ii) Es gibt ein neutrales Element $e \in A$ mit

$$\forall_{x \in A} \quad x \circ e = x.$$

(iii)

$$\forall_{x \in A} \quad \exists_{\bar{x} \in A} \quad x \circ \bar{x} = e. \quad \swarrow \text{inverses Element zu } x$$

Gruppe hei\u00dft kommutativ oder abelsch g.d.w.

(iv) $\forall_{x, y \in A} \quad x \circ y = y \circ x.$

Def. 4.4: $A \neq \emptyset$ mit Abb.

$$\begin{aligned} + : A \times A &\longrightarrow A, & (x, y) &\mapsto x + y, & \swarrow \text{Addition} \\ \cdot : A \times A &\longrightarrow A, & (x, y) &\mapsto \underbrace{x \cdot y}_{\text{auch } xy} & \swarrow \text{Multiplikation} \end{aligned} \quad (4.4)$$

he\u00dft K\u00f6rper (engl.: field) g.d.w.

(i) A ist kom. Gr. bez. + (das neutr. El. bez. + wird mit 0 bezeichnet).

(ii) $A \setminus \{0\}$ ist kom. Gr. bez. \cdot (das neutr. El. bez. \cdot wird mit 1 bezeichnet).

(iii)

$$\text{Distributivgesetz: } \forall_{x,y,z \in A} x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z. \quad (4.5)$$

Ein Körper A mit $\text{TO} \leq$ heißt total geordneter Körper
g.d.w. gilt:

(iv) \leq ist mit $+$ und \cdot verträglich, d.h.

$$\forall_{x,y,z \in A} (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z), \quad (4.6a)$$

$$\forall_{x,y \in A} (0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy). \quad (4.6b)$$

Ist A zusätzlich vollst. nach Def. 4.1, so
heißt A vollst. tot. geord. Körper.

Th. 4.5: Es gibt einen vollst. tot. geord. Körper \mathbb{R}
(genannt Menge der reellen Zahlen). \mathbb{R} ist eindeutig
in folgendem Sinn:

Ist A irgendein vollst. tot. geord. Körper, so
gibt es genau einen Isomorphismus $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$, d.h.
 ϕ ist bij. Abb. mit

$$\forall_{x,y \in A} \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y), \quad (4.7a)$$

$$\forall_{x,y \in A} \phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \quad (4.7b)$$

$$\forall_{x,y \in A} (x < y \Rightarrow \phi(x) < \phi(y)). \quad (4.7c)$$

Bew.: Siehe Literatur im Skript. □

Th. 4.6/4.7: Es gelten alle üblichen Rechengesetze in \mathbb{R} .

Z.B. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ hat genau ein Inverses bez. $+$.

Bew.: Seien a, b inv. zu x . Dann:

$$a = a + 0 = a + x + b = 0 + b = b.$$

$$x + a = y + a \Rightarrow x = y \quad (*)$$

Bew.: $x + a = y + a \Rightarrow x = x + a - a = y + a - a = y.$

$$x \cdot 0 = 0.$$

Bew.: $x \cdot 0 + x \cdot 1 \stackrel{(4.5)}{=} x \cdot (0 + 1) = x \cdot 1 = 0 + x \cdot 1 \Rightarrow x \cdot 0 = 0$ nach (*).

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0 \quad (**)$$

$$\text{Bew.: } xy = 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow y = 1 \cdot y = x^{-1}xy = x^{-1} \cdot 0 = 0.$$

$$x \leq y \wedge z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz.$$

$$\text{Bew.: } x \leq y \Rightarrow 0 \leq y - x \stackrel{(4.6b)}{\Rightarrow} 0 \leq (y - x)z = yz - xz \Rightarrow xz \leq yz.$$

$$x \leq y \wedge z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz.$$

$$\text{Bew.: } x \leq y \Rightarrow 0 \leq y - x \stackrel{(4.6b)}{\Rightarrow} 0 \leq (y - x)(-z) = xz - yz \Rightarrow xz \geq yz.$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x^2 := x \cdot x > 0.$$

$$\text{Bew.: } 0 \leq x \stackrel{(4.6b)}{\Rightarrow} 0 \leq x^2,$$

$$x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x \stackrel{(4.6b)}{\Rightarrow} 0 \leq (-x)(-x) = x^2 \Rightarrow x^2 > 0 \text{ nach } (**).$$

$$x < y \wedge 0 < \lambda < 1 \Rightarrow x < \lambda x + (1 - \lambda)y < y.$$

$$\text{Speziell für } \lambda = \frac{1}{2} \text{ folgt } x < \frac{x+y}{2} < y.$$

$$\text{Bew.: } 0 < \lambda \Rightarrow \lambda x < \lambda y.$$

$$1 - \lambda > 0 \Rightarrow (1 - \lambda)x < (1 - \lambda)y$$

$$\Rightarrow x = \lambda x + (1 - \lambda)x < \lambda x + (1 - \lambda)y < \lambda y + (1 - \lambda)y = y.$$

Th. 4.8: Sei $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Def.

$$A + B := \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}, \quad (4.8a)$$

$$\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}. \quad (4.8b)$$

Für A, B beschränkt gilt:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \quad (4.9a)$$

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B, \quad (4.9b)$$

$$\sup(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \cdot \sup A & \text{für } \lambda \geq 0, \\ \lambda \cdot \inf A & \text{für } \lambda < 0, \end{cases} \quad (4.9c)$$

$$\inf(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \cdot \inf A & \text{für } \lambda \geq 0, \\ \lambda \cdot \sup A & \text{für } \lambda < 0. \end{cases} \quad (4.9d)$$

Bew.: Übung. □

4.2. Wichtige Teilmengen

Bem. 4.9: \mathbb{N} als Teilmenge von \mathbb{R} : 1 neutr. El. bez. “.”.

Def. $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$, \dots , $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ erfüllt

Peanoaxiome P1, P2, P3 aus Abschnitt 3.1.

Axiomatische Mengenlehre: Def. \mathbb{N} zuerst (ähnlich wie

in Bem. 1.27, Def. 1.26), konstruiere daraus \mathbb{R} (siehe Literatur im Skript).

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (4.10a)$$

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (4.10b)$$

$$\mathbb{Z}^- := \{-n : n \in \mathbb{N}\}, \quad (4.10c)$$

$$\mathbb{Z} := \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{N}_0 \quad \leftarrow \text{ganze Zahlen}, \quad (4.10d)$$

$$\mathbb{Q}^+ := \{m/n : m, n \in \mathbb{N}\}, \quad (4.10e)$$

$$\mathbb{Q}_0^+ := \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}, \quad (4.10f)$$

$$\mathbb{Q}^- := \{-q : q \in \mathbb{Q}^+\}, \quad (4.10g)$$

$$\mathbb{Q}_0^- := \mathbb{Q}^- \cup \{0\}, \quad (4.10h)$$

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Q}_0^+ \cup \mathbb{Q}^- \quad \leftarrow \text{rationale Zahlen}, \quad (4.10i)$$

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \quad (\text{positive Zahlen}), \quad (4.10j)$$

$$\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \quad (\text{nichtneg. } \parallel \text{)}, \quad (4.10k)$$

$$\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \quad (\text{negative } \parallel \text{)}, \quad (4.10l)$$

$$\mathbb{R}_0^- := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \quad (\text{nichtpos. } \parallel \text{)}. \quad (4.10m)$$

Intervalle für $a \leq b$:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad (\text{beschr. abg. Int.}), \quad (4.11a)$$

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad (\parallel \text{ offenes } \parallel \text{)}, \quad (4.11b)$$

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad (\parallel \text{ halboffenes } \parallel \text{)}, \quad (4.11c)$$

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad (\parallel \text{ halboffenes } \parallel \text{)}, \quad (4.11d)$$

$$]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \quad (\text{unbeschr. abg. Int.}), \quad (4.11e)$$

$$]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \quad (\parallel \text{ offenes } \parallel \text{)}, \quad (4.11f)$$

$$[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \quad (\text{unbeschr. abg. Int.}), \quad (4.11g)$$

$$]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \quad (\parallel \text{ offenes } \parallel \text{)}. \quad (4.11h)$$

Für a, b beliebig, setze

$$c := \min\{a, b\}, \quad d := \max\{a, b\},$$

$$[a, b] := [c, d], \quad]a, b[:=]c, d[,$$

$$]a, b] := [c, d] \setminus \{a\} = \begin{cases}]c, d] & \text{für } a \leq b, \\ [c, d] & \text{für } b \leq a, \end{cases} \quad]a, b[:= [c, d] \setminus \{b\} = \begin{cases} [c, d[& \text{für } a \leq b, \\]c, d[& \text{für } b \leq a. \end{cases} \quad (4.11i)$$

Für $a = b$ sind die Intervalle degeneriert/trivial mit
 $[a, a] = \{a\}$, $]a, a[=]a, a[= [a, a[= \emptyset$.

Th. 4.10 (archimedische Eigenschaft von \mathbb{R}): Seien $\epsilon, x \in \mathbb{R}$.

$$\epsilon > 0 \wedge x > 0 \Rightarrow \exists_{n \in \mathbb{N}} n\epsilon > x.$$

Bew.: Widerspruchsbeweis: Ang., es gibt ob. Schr. $x \in \mathbb{R}$
 von $A := \{n\epsilon : n \in \mathbb{N}\}$. Nach (4.1) gibt es $s \in \mathbb{R}$
 mit $s := \sup A$, d.h. $s - \epsilon$ ist nicht ob. Schr. von A ,
 d.h. $\exists_{n \in \mathbb{N}} n\epsilon > s - \epsilon$. Dann ist $(n+1)\epsilon > s$ im
 Widerspruch zu $s = \sup A$. Also kann A keine ob. Schr. haben. \square

5. Komplexe Zahlen

5.1. Definition und grundlegende Arithmetik

Wegen $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Th. 4.7(c)), hat
 $x^2 + 1 = 0$ in \mathbb{R} keine Lösung.

Gesucht: Körper $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$ so, dass es
 $i \in \mathbb{C}$ gibt mit $i^2 = -1$.

Da in \mathbb{C} die üblichen Rechengesetze gelten sollen,
 folgt dann für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ mit
 $x, y, u, v \in \mathbb{R}$:

$$z + w = x + iy + u + iv = x + u + i(y + v), \quad (5.1a)$$

$$zw = (x + iy)(u + iv) = xu - yv + i(xv + yu). \quad (5.1b)$$

Außerdem:

$$x + iy = u + iv \Rightarrow (x - u)^2 = -(v - y)^2 \\ \Rightarrow x - u = 0 = v - y, \text{ also } x = u \wedge y = v.$$

→ Idee: Elemente von \mathbb{C} sind Paare $z = (x, y)$ reeller Zahlen.

Def. 5.1: Die Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ heißt Menge der
komplexen Zahlen. Addition und
 Multiplikation motiviert durch (5.1):

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad ((x, y), (u, v)) \mapsto (x, y) + (u, v) := (x + u, y + v), \quad (5.2)$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad ((x, y), (u, v)) \mapsto (x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu). \quad (5.3)$$

Th. 5.2: (a) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper mit
 $(0, 0)$: neutrales El. der Addition,
 $(1, 0)$: neutrales El. der Mult.,

$$-z := (-x, -y) \quad (5.4a)$$

ist additiv invers zu $z = (x, y)$,

$$z^{-1} := \frac{1}{z} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad (5.4b)$$

ist multiplikativ invers zu $z = (x, y) \neq (0, 0)$.

(b) Mit $w - z := w + (-z)$ für $w, z \in \mathbb{C}$ und
 $\frac{w}{z} := wz^{-1}$ für $w, z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq (0, 0)$ gelten
 alle Regeln aus Th. 4.6 in \mathbb{C} (d.h. alle aus \mathbb{R}
 bekannten algebraischen Rechenregeln,
 die kein \leq oder \geq enthalten).

(c) Die Abb.

$$\iota : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \iota(x) := (x, 0), \quad (5.5)$$

ist ein Monomorphismus, d.h. injektiv mit

$$\forall_{x, y \in \mathbb{R}} \quad \iota(x + y) = \iota(x) + \iota(y), \quad (5.6a)$$

$$\forall_{x, y \in \mathbb{R}} \quad \iota(xy) = \iota(x) \cdot \iota(y). \quad (5.6b)$$

Man identifiziert meist \mathbb{R} und $\iota(\mathbb{R})$ und schreibt
 x statt $(x, 0)$.

Bew.: (a), (c): Übung. (b) folgt aus (a), da Th. 4.6
 in jedem Körper gilt. □

Not. 5.3: $i := (0, 1)$ heißt imaginäre Einheit

(tatsächlich gilt

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1).$$

Man schreibt für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$:

$$z = (x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x + iy. \quad (5.7)$$

$\operatorname{Re} z := x$ heißt Realteil von z ;

$\operatorname{Im} z := y$ heißt Imaginärteil von z ;

z heißt rein imaginär für $\operatorname{Re} z = 0$.

Bem. 5.4: Es gibt keine TO “ \leq ” auf \mathbb{C} , die mit
 $+$ und \cdot verträglich ist ((4.6) kann für \leq nicht gelten):

$$\text{Sonst (siehe Th. 4.7(c),(f)): } \left. \begin{array}{l} 0 < 1^2 = 1 \\ 0 < i^2 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < 1 + (-1) = 0,$$

was falsch ist.

Die lexikographische Ordnung auf \mathbb{C} (vgl. (2.51))
ist eine TO auf \mathbb{C} (für die (4.6) nicht gilt).

Def. & Bem. 5.5: Für $z = x + iy$ heißt
 $\bar{z} := x - iy$ die (komplex) konjugierte Zahl zu z .
Regeln für $z = x + iy$, $w = u + iv$:

$$\text{(a) } \overline{z + w} = x + u - iy - iv = \bar{z} + \bar{w},$$

$$\overline{zw} = xu - yv - (xv + yu)i = (x - iy)(u - iv) = \bar{z}\bar{w}.$$

$$\text{(b) } z + \bar{z} = 2x = 2 \operatorname{Re} z, \quad z - \bar{z} = 2yi = 2i \operatorname{Im} z.$$

$$\text{(c) } z = \bar{z} \Leftrightarrow x + iy = x - iy \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

$$\text{(d) } z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_0^+.$$

Not. 5.6: Ganzzahlige Exponenten werden rekursiv
def. für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$z^0 := 1, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_0} z^{n+1} := z \cdot z^n, \quad \text{und für } z \neq 0: \quad z^{-n} := (z^{-1})^n. \quad (5.8)$$

Th. 5.7: Potenzregeln (für $m, n \in \mathbb{N}_0$ sei $z, w \in \mathbb{C}$; für
 $m, n \in \mathbb{Z}$ sei $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$):

$$\text{(a) } z^{m+n} = z^m \cdot z^n.$$

$$\text{(b) } z^n w^n = (zw)^n.$$

$$\text{(c) } (z^m)^n = z^{m \cdot n}.$$

Bew.: 3 einfache Induktionen für $n \in \mathbb{N}_0$, die
Fälle $n \in \mathbb{Z}$ folgen dann auch leicht. □

5.2. Vorzeichen und Betrag

- Betrag komplexer Zahlen benötigt Begriff der (Quadrat-) Wurzel pos. reeller Zahlen.

- Brauchen Begriff der Stetigkeit, um zu zeigen, dass jedes $x \in \mathbb{R}_0^+$ genau eine Wurzel hat (Abschnitt 7.2.5 unten).
- Bis dahin werden wir die Existenz eindeutiger Wurzeln annehmen.
- Für Betrag reeller Zahlen, wird Wurzel nicht benötigt (Lem. 5.10 unten), so dass die Annahme der Ex. von Wurzeln in 7.2.5 nicht benutzt wird (was unzulässig wäre).

Def. & Bem. 5.8: $y \in \mathbb{R}_0^+$ heißt (Quadrat-)wurzel von $x \in \mathbb{R}_0^+$ g.d.w. $y^2 = x$ (Notation: $\sqrt{x} := y$). In Abschnitt 7.2.5 werden wir zeigen, dass jedes $x \in \mathbb{R}_0^+$ genau eine Wurzel hat, und die Fkt. $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $f(x) := \sqrt{x}$, streng steigend (speziell: injektiv) ist.

Def. 5.9: (a) Def. die Vorzeichenfkt. (auch Signumfkt.):

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

(ist nur für reelle Zahlen def.).

(b) Def. die Betragsfkt.

$$\operatorname{abs} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad z = x + iy \mapsto |z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5.10)$$

Lem. 5.10:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} |x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Bew.:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases} \quad (5.12)$$

□

Th. 5.11: Regeln für $z, w \in \mathbb{C}$:

- (a) $z \neq 0 \Rightarrow |z| > 0$.
- (b) $||z|| = |z|$.

(c) $|z| = |\bar{z}|.$

(d) $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$

(e) $|zw| = |z||w|.$

(f) $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ für $w \neq 0.$

(g) Dreiecksungleichung:

$$|z + w| \leq |z| + |w|. \quad (5.13)$$

(h) Umgekehrte Dreiecksungl.:

$$||z| - |w|| \leq |z - w|. \quad (5.14)$$

Bew.: Bew. für $z, w \in \mathbb{C}$ (für $z, w \in \mathbb{R}$ folgt alles direkt aus (5.11), ohne Benutzung von Wurzeln):

Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}.$

(a): $z \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \vee y \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0 \vee y^2 > 0$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 > 0 \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0.$

(b): $a := |z| \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow |a| = \sqrt{a^2} = a = |z|.$

(c): $\bar{z} = x - iy \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$

(d): Es ist $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z.$ Setze $a := \max\{|x|, |y|\}.$
 Dann $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2$
 $\Rightarrow a \leq |z| \leq |x| + |y|.$

(e) folgt aus

$$|zw|^2 = zw \bar{z}\bar{w} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2.$$

(f): Sei $z = 1$ und $w = u + iv.$ Dann:

$$|w^{-1}|^2 \stackrel{(5.4b)}{=} \frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} = \frac{1}{u^2 + v^2} = (|w|^{-1})^2,$$

$$\Rightarrow |w^{-1}| = |w|^{-1}.$$

Nun z beliebig. Dann:

$$|\frac{z}{w}| = |zw^{-1}| = |z||w^{-1}| = |z||w|^{-1} = \frac{|z|}{|w|}.$$

(g) folgt aus

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{w} \\ &\stackrel{\text{Def. \& Bem. 5.5(b)}}{=} |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\stackrel{(d)}{\leq} |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

(h):

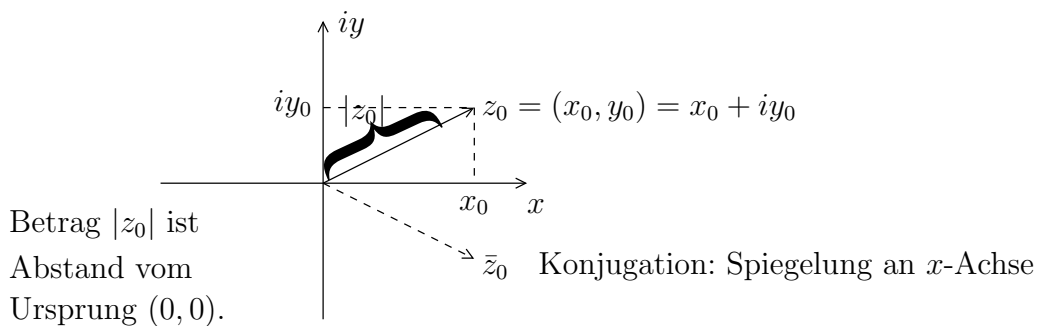
$$|z| = |z - w + w| \stackrel{(g)}{\leq} |z - w| + |w| \Rightarrow |z| - |w| \leq |z - w|,$$

$$|w| = |w - z + z| \stackrel{(g)}{\leq} |z - w| + |z| \Rightarrow -(|z| - |w|) \leq |z - w|,$$

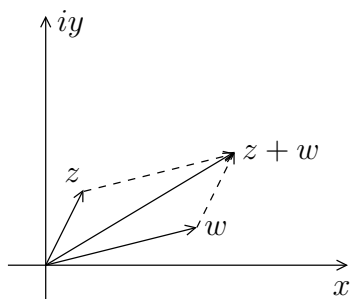
$$\left. \vphantom{\begin{matrix} |z| - |w| \leq |z - w| \\ -(|z| - |w|) \leq |z - w| \end{matrix}} \right\} \stackrel{(5.11)}{\Rightarrow} ||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

□

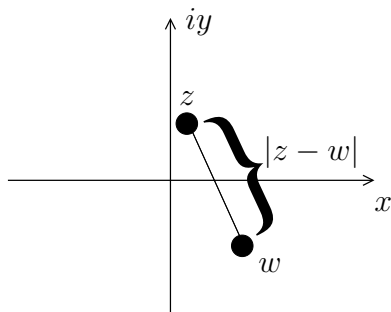
Bem. 5.12: Veranschaulichung von $(x, y) = x + iy$ in der komplexen Ebene:



Addition ist Vektoraddition in Ebene:

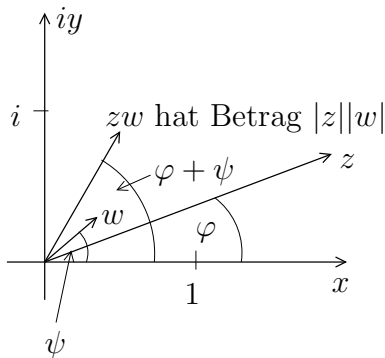


$|z - w|$ ist Abstand der Punkte $z = (x, y)$, $w = (u, v)$



Multiplikation:

Beträge multipl., Winkel addieren (klarer später mit Polarkoordinaten)



5.3. Summen & Produkte

Th. 5.13: (a) Sei $n \in \mathbb{N}$; $\lambda, \mu, z_j, w_j \in \mathbb{C}$ mit $j \in \{1, \dots, n\}$.

Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^n (\lambda z_j + \mu w_j) = \lambda \sum_{j=1}^n z_j + \mu \sum_{j=1}^n w_j.$$

(b)

$$\begin{aligned} \forall_{n \in \mathbb{N}_0} \quad \forall_{z \in \mathbb{C}} \quad & (1 - z)(1 + z + z^2 + \dots + z^n) \\ &= (1 - z) \sum_{j=0}^n z^j = 1 - z^{n+1}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \forall_{n \in \mathbb{N}_0} \quad \forall_{z, w \in \mathbb{C}} \quad & w^{n+1} - z^{n+1} = (w - z) \sum_{j=0}^n z^j w^{n-j} \\ &= (w - z)(w^n + zw^{n-1} + \dots + z^{n-1}w + z^n). \end{aligned}$$

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$; $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt:

$$\left(\forall_{j=1, \dots, n} x_j \leq y_j \right) \Rightarrow \sum_{j=1}^n x_j \leq \sum_{j=1}^n y_j$$

(“=” gilt nur, falls $\forall_{j=1, \dots, n} x_j = y_j$).

(e)

$$\left(\forall_{j=1, \dots, n} 0 < x_j \leq y_j \right) \Rightarrow \prod_{j=1}^n x_j \leq \prod_{j=1}^n y_j$$

(“=” gilt nur, falls $\forall_{j=1, \dots, n} x_j = y_j$).

(f) Dreiecksungleichung (Δ -Ungl.):

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |z_j| \quad \text{für } z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}.$$

Bew.: Alles einfache Induktionen. Wir machen (c) und lassen die anderen Fälle als Übung:

(c): Ind.verank. ($n = 0$): $w^{0+1} - z^{0+1} = w - z = (w - z) \underbrace{z^0 w^{0-0}}_1$

stimmt.

Ind.schritt:

$$\begin{aligned} (w - z) \sum_{j=0}^{n+1} z^j w^{n+1-j} &= (w - z) \left(z^{n+1} w^0 + \sum_{j=0}^n z^j w^{n+1-j} \right) \\ &= (w - z) z^{n+1} + (w - z) w \sum_{j=0}^n z^j w^{n-j} \\ &\stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} (w - z) z^{n+1} + w(w^{n+1} - z^{n+1}) = w^{n+2} - z^{n+2}. \end{aligned}$$

□

5.4. Binomialkoeffizienten & Binomischer Lehrsatz

Ziel: $(z + w)^n$ als Summe schreiben. Für $n = 0, \dots, 3$:

$$(z + w)^0 = 1, \quad (z + w)^1 = z + w, \quad (z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2,$$

$$(z + w)^3 = z^3 + 3z^2w + 3zw^2 + w^3. \quad \text{Die Koeffizienten}$$

ergeben sich aus dem sogenannten Pascalschen Dreieck:

$$\begin{array}{cccccccc} n = 0 : & & & & & & & 1 \\ n = 1 : & & & & & & 1 & 1 \\ n = 2 : & & & & & 1 & 2 & 1 \\ n = 3 : & & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ n = 4 : & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ & & & & \backslash + / & & & \\ n = 5 : & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array} \quad (5.15)$$

Einträge von Zeile n werden mit $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ bezeichnet.

Beobachtung:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \text{ für } k \in \{1, \dots, n\} \right). \quad (5.16)$$

Soviel zur Motivation.

Def. 5.14: Für $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$ def. den Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{k} := \prod_{j=1}^k \frac{\alpha+1-j}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \text{ für } k \in \mathbb{N}. \quad (5.17)$$

Prop. 5.15: (a)

$$\forall_{\alpha \in \mathbb{C}} \quad \forall_{k \in \mathbb{N}} \quad \binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha+1}{k} = \binom{\alpha}{k-1} + \binom{\alpha}{k}. \quad (5.18)$$

(b)

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_0} \quad \binom{n}{n} = 1. \quad (5.19)$$

(insbesondere gilt (5.16))

Bew.: (a): $\binom{\alpha}{0} = 1$ nach (5.17). Weiter:

$$\forall_{\substack{k \in \mathbb{N}, \\ \alpha \in \mathbb{C}}} \quad \binom{\alpha}{k} = \prod_{j=1}^k \frac{\alpha+1-j}{j} = \frac{\alpha+1-k}{k} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\alpha+1-j}{j} = \binom{\alpha}{k-1} \frac{\alpha+1-k}{k}, \quad (5.20)$$

also

$$\begin{aligned} \forall_{\substack{k \in \mathbb{N}, \\ \alpha \in \mathbb{C}}} \quad \binom{\alpha}{k-1} + \binom{\alpha}{k} &= \binom{\alpha}{k-1} \left(1 + \frac{\alpha+1-k}{k} \right) = \binom{\alpha}{k-1} \frac{\alpha+1}{k} \\ &= \frac{\alpha+1}{k} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\alpha+1-j}{j} = \prod_{j=1}^k \frac{\alpha+2-j}{j} = \binom{\alpha+1}{k}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

(b): $\binom{0}{0} = 1$ nach (5.17). Bew. für $n \in \mathbb{N}$ durch Ind.:

Ind.verank. ($n=1$): $\binom{1}{1} = \frac{1+1-1}{1} = 1$ stimmt.

Ind.schritt:

$$\binom{n+1}{n+1} = \prod_{j=1}^{n+1} \frac{n+1+1-j}{j} = \frac{n+1}{n+1} \prod_{j=1}^n \frac{n+1-j}{j} = \binom{n}{n} \stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} 1. \quad (5.22)$$

□

Th. 5.16 (Binomischer Lehrsatz):

$$\begin{aligned} \forall_{z,w \in \mathbb{C}} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}_0} \quad (z+w)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} w^k \\ &= z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} w + \cdots + \binom{n}{n-1} z w^{n-1} + w^n. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Bew.: Ind. über $n \in \mathbb{N}_0$: Ind.verank. ($n=0$): $(z+w)^0 = 1 = \binom{0}{0} z^{0-0} w^0$ stimmt.

Ind.schritt:

$$(z+w)^{n+1} = (z+w)(z+w)^n = z(z+w)^n + w(z+w)^n. \quad (5.24)$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} z(z+w)^n &\stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} z \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} w^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n+1-k} w^k \\ &\stackrel{\binom{n}{n+1}=0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} z^{n+1-k} w^k, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} w(z+w)^n &\stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} w \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} w^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} w^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} z^{n+1-k} w^k. \end{aligned} \quad (5.26)$$

(5.25), (5.26) in (5.24) eingesetzt:

$$\begin{aligned} (z+w)^{n+1} &= \binom{n}{0} z^{n+1} w^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) z^{n+1-k} w^k \\ &\stackrel{\text{Prop. 5.15}}{=} \binom{n+1}{0} z^{n+1} w^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} z^{n+1-k} w^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} z^{n+1-k} w^k, \end{aligned} \quad (5.27)$$

wie gewünscht. □

Kor. 5.17:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_0} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n, \quad (5.28a)$$

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0. \quad (5.28b)$$

Bew.: (5.28a) ist (5.23) mit $z = w = 1$;
 (5.28b) ist (5.23) mit $z = 1$ und $w = -1$. □

Prop. 5.18: (a)

$$\forall_{\substack{\alpha \in \mathbb{C}, \\ k \in \mathbb{N}_0}} \sum_{j=0}^k \binom{\alpha + j}{j} = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha + 1}{1} + \cdots + \binom{\alpha + k}{k} = \binom{\alpha + k + 1}{k}. \quad (5.29)$$

(b)

$$\forall_{n, k \in \mathbb{N}_0} \left(k \leq n \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right). \quad (5.30)$$

Für $n \geq 1$ ist $\binom{n}{k} = \#\mathcal{P}_k(\{1, \dots, n\})$ mit

$$\mathcal{P}_k(A) := \{B \in \mathcal{P}(A) : \#B = k\}, \quad (5.31)$$

d.h., $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.

(c)

$$\forall_{n, k \in \mathbb{N}_0} \sum_{j=0}^k \binom{n + j}{n} = \binom{n}{n} + \binom{n + 1}{n} + \cdots + \binom{n + k}{n} = \binom{n + k + 1}{n + 1}. \quad (5.32)$$

Bew.: (a) und (b) durch Induktion (Übung).
 (c):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \binom{n + j}{n} &\stackrel{(5.30)}{=} \sum_{j=0}^k \frac{(n + j)!}{n!(n + j - n)!} \stackrel{(5.30)}{=} \sum_{j=0}^k \binom{n + j}{j} \\ &\stackrel{(5.29)}{=} \binom{n + k + 1}{k} \stackrel{(5.30)}{=} \frac{(n + k + 1)!}{k!(n + 1)!} = \binom{n + k + 1}{n + 1}. \end{aligned}$$

□

6. Polynome

6.1. Arithmetik \mathbb{K} -wertiger Fkt

Not. 6.1: Wenn wir im Folgenden \mathbb{K} schreiben, so darf für \mathbb{K} sowohl \mathbb{R} als auch \mathbb{C} stehen.

Not. 6.2: Sei $A \neq \emptyset$ Menge; $f, g : A \rightarrow \mathbb{K}$. Def.

$$(f + g) : A \rightarrow \mathbb{K}, \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (6.1a)$$

$$\forall_{\lambda \in \mathbb{K}} (\lambda f) : A \rightarrow \mathbb{K}, \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad (6.1b)$$

$$(fg) : A \rightarrow \mathbb{K}, \quad (fg)(x) := f(x)g(x), \quad (6.1c)$$

$$(f/g) : A \rightarrow \mathbb{K}, \quad (f/g)(x) := f(x)/g(x) \quad \text{für } g(x) \neq 0, \quad (6.1d)$$

$$\operatorname{Re} f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\operatorname{Re} f)(x) := \operatorname{Re}(f(x)), \quad (6.1e)$$

$$\operatorname{Im} f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\operatorname{Im} f)(x) := \operatorname{Im}(f(x)). \quad (6.1f)$$

Nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\max(f, g) : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \max(f, g)(x) := \max \{f(x), g(x)\}, \quad (6.1g)$$

$$\min(f, g) : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \min(f, g)(x) := \min \{f(x), g(x)\}, \quad (6.1h)$$

$$\text{pos. Anteil: } f^+ : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^+ := \max(f, 0), \quad (6.1i)$$

$$\text{neg. Anteil: } f^- : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^- := \max(-f, 0). \quad (6.1j)$$

Wieder auch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$|f| : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad |f|(x) := |f(x)|. \quad (6.1k)$$

Für $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ gilt dann

$$|f| = f^+ + f^-. \quad (6.1l)$$

6.2. Polynome

Def. 6.3: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Jede Fkt. $\mu : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $\mu(x) := x^n$, heißt Monom. Ein Polynom ist eine Linearkombination von Monomen, also eine Fkt.

$$P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad (6.2)$$

mit $a_j \in \mathbb{K}$.

↙ Koeffizienten von P

Grad von $P \neq 0$: $\deg(P) := \max\{j \in \mathbb{N}_0 : a_j \neq 0\}$.

Für $P \equiv 0$ (alle $a_j = 0$), setze $\deg(P) := -1$.

Ein Pol. P vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ ist durch a_0, \dots, a_n eindeutig bestimmt und umgekehrt (Th. 6.6(b)).

$\deg(P) \leq 0$: konstante Fkt.

$\deg(P) \leq 1$: $P(x) = a + bx$, affine Fkt (auch lineare Fkt, was aber eigentlich nur für $a = 0$ korrekt ist, da für lin. Fkt. $P(0) = 0$ sein muss).

$\deg(P) \leq 2$: $P(x) = a + bx + cx^2$, quadratische Fkt.

Gilt $P(\xi) = 0$, so heißt $\xi \in \mathbb{K}$ Nullstelle oder Wurzel von P .

Rationale Fkt.: P/Q mit Pol. P, Q .

Bem. 6.4: Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ und P, Q Pol. Dann sind auch λP ,

$P + Q$ und PQ Pol. Genauer:

$\lambda = 0 \vee P \equiv 0 \Rightarrow \lambda P \equiv 0$; $P \equiv 0 \Rightarrow P + Q = Q$;

$P \equiv 0 \vee Q \equiv 0 \Rightarrow PQ \equiv 0$.

Für $\lambda \neq 0$ und

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= \sum_{j=0}^n a_j x^j, & Q(x) &= \sum_{j=0}^m b_j x^j, \\ \text{mit } \deg(P) &= n \geq 0, & \deg(Q) &= m \geq 0, & n \geq m \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

setze nun $b_j := 0$ für $j \in \{m+1, \dots, n\}$. Dann:

$$(\lambda P)(x) = \sum_{j=0}^n (\lambda a_j) x^j, \quad \deg(\lambda P) = n, \quad (6.4a)$$

$$(P + Q)(x) = \sum_{j=0}^n (a_j + b_j) x^j, \quad \deg(P + Q) \leq n = \max\{m, n\}, \quad (6.4b)$$

$$(PQ)(x) = \sum_{j=0}^{m+n} c_j x^j, \quad \deg(PQ) = m + n \quad (6.4c)$$

mit

$$\forall_{j=0, \dots, n+m} c_j = \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k}. \quad (6.4d)$$

↙ auftretende und bisher nicht definierte Koeffizienten werden = 0 gesetzt.

(6.4c) & (6.4d) folgen aus (6.3), da

$$c_j = \sum_{k+l=j} a_k b_l = \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k}. \quad \left(\begin{array}{l} \text{exakter Beweis} \\ \text{im Skript} \end{array} \right)$$

$\deg(PQ) = m + n$, da $c_{m+n} = a_n b_m \neq 0$.

Th. 6.5: (a) Sei P wie in (6.3). Dann:

$$\forall_{\xi \in \mathbb{K}} \quad P(x) = \sum_{j=0}^n b_j (x - \xi)^j \quad (6.5)$$

mit

$$\left. \begin{array}{l} \forall_{j=0, \dots, n} \quad b_j = \sum_{k=j}^n a_k \binom{k}{j} \xi^{k-j} \\ \text{(speziell: } b_0 = P(\xi), \quad b_n = a_n.) \end{array} \right\} \quad (6.6)$$

(b) Zu P mit $\deg(P) = n \geq 1$ und $\xi \in \mathbb{K}$ gibt es Q mit $\deg(Q) = n - 1$ so, dass

$$P(x) = P(\xi) + (x - \xi) Q(x). \quad (6.7)$$

Für ξ Nullst. von P gilt $P(x) = (x - \xi) Q(x)$.

Bew.: (a): $\xi = 0$: ✓ Sei $\xi \neq 0$. Setze $\eta := x - \xi$. Dann ist $x = \xi + \eta$ und

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^n a_k (\xi + \eta)^k \stackrel{(5.23)}{=} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_k \binom{k}{j} \xi^{k-j} \eta^j \stackrel{\xi \neq 0}{=} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n a_k \binom{k}{j} \xi^{k-j} \eta^j \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_k \binom{k}{j} \xi^{k-j} \eta^j = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n a_k \binom{k}{j} \xi^{k-j} \eta^j. \end{aligned} \quad (6.8)$$

(b): Nach (a) gilt

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = P(\xi) + (x - \xi) Q(x), \\ \text{mit } Q(x) = \sum_{j=1}^n b_j (x - \xi)^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} (x - \xi)^j. \end{array} \right\} \quad (6.9)$$

□

Th. 6.6: (a) P mit $n := \deg(P) \geq 0$ hat höchstens n Nullst.

(b) Seien P, Q wie in (6.3) mit $n = m$, $\deg(P) \leq n$,
 $\deg(Q) \leq n$. Gilt $P(x_j) = Q(x_j)$ an $n + 1$ versch.
 $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, so folgt $\forall_{j=0, \dots, n} a_j = b_j$.

Folgerung 1: Stimmen Pol. P, Q vom Grad $\leq n$ an
 $n + 1$ versch. Pkten überein, so $P = Q$.

Folgerung 2: $P = Q \Rightarrow \forall_{x \in \mathbb{K}} P(x) = Q(x) \Rightarrow \forall_{j=0, \dots, n} a_j = b_j$.

Bew.: (a): $n = 0 \Rightarrow P \equiv a_0 \neq 0$ ohne Nullst.

Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

Ind.verank. ($n = 1$): $P(x) = a_0 + a_1x$ mit $a_1 \neq 0$ hat genau eine
Nullst. bei $\xi = -a_0/a_1$.

Ind.schritt: Sei $\deg(P) = n + 1$. Falls P keine Nullst. hat, o.k.

Hat P Nullst. $\xi \in \mathbb{K}$, so

$$P(x) = (x - \xi) Q(x) \quad (6.10)$$

mit $\deg(Q) = n$ nach Th. 6.5(b).

Ind.vor. $\Rightarrow Q$ hat $\leq n$ Nullst. $\Rightarrow P$ hat $\leq n + 1$ Nullst.

(b): Gilt $P(x_j) = Q(x_j)$ für $n + 1$ versch. x_j , so hat
 $P - Q$ $n + 1$ versch. Nullst. und $\deg(P - Q) \leq n$

$\stackrel{(a)}{\Rightarrow} \deg(P - Q) = -1 \Rightarrow P - Q \equiv 0$

$\Rightarrow \forall_{j=0, \dots, n} a_j - b_j = 0$. □

Bem. 6.7: Sei $n := \deg(P) \geq 0$.

Th. 6.6(a) $\Rightarrow P$ hat $\leq n$ Nullst.

Th. 6.5(b) + Induktion

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists_{k \in \{0, \dots, n\}} P(x) &= Q(x) \prod_{j=1}^k (x - \xi_j) \quad \swarrow \text{Nullst. von } P \\ &= (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_k) Q(x), \end{aligned} \quad (6.11a)$$

mit $\deg(Q) = n - k$ und Q hat keine Nullst. in \mathbb{K} .

Dabei ist $P = Q$ möglich und auch $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_k$.

Umformulierung:

$$P(x) = Q(x) \prod_{j=1}^l (x - \lambda_j)^{m_j} = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_l)^{m_l} Q(x) \quad (6.11b)$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, $l \in \{0, \dots, k\}$, sind die versch. Nullst. von P ,
 $m_j \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^l m_j = k$, m_j heißt Vielfachheit
der Nullst. λ_j .

7. Grenzwerte und Konvergenz in \mathbb{R} und \mathbb{C}

7.1. Folgen

Nach Def. 2.14(b) ist Folge in \mathbb{K} Fkt. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$,
 $f = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (z_1, z_2, \dots)$ mit $z_n := f(n)$.
 $(z_n)_{n \in I}$ mit $I \neq \emptyset$ abzählbar ist auch erlaubt (z.B. $I = \mathbb{N}_0$).
 \rightarrow Beobachtung: $(1 - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ "kommt 1 beliebig nahe";
 Ziel: Präzisierung dieser Beobachtung.

Def. 7.1: Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{K} heißt konvergent
 mit Grenzwert/Limes $z \in \mathbb{K}$ g.d.w. für jedes
 $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|z_n - z| < \epsilon$ für
 alle $n > N$. Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ oder $z_n \rightarrow z$ für $n \rightarrow \infty$.
 Also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \forall_{\epsilon \in \mathbb{R}^+} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N} |z_n - z| < \epsilon. \quad (7.1)$$

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt divergent g.d.w. $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent.

Bsp. 7.2: (a) Konstante Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a)_{n \in \mathbb{N}}$

hat $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a = a$, denn

$$\forall_{\epsilon > 0} \forall_{n \in \mathbb{N}} |z_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon.$$

(b) $\forall_{a \in \mathbb{C}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+a} = 0$ (hier gilt $z_n = \frac{1}{n+a}$ für $n \neq -a$ und $z_n := w \in \mathbb{C}$

für $n = -a$): Sei $\epsilon > 0$. Für $n > N \geq \epsilon^{-1} + |a|$

gilt $|n + a| = |n - (-a)| \geq |n - |a|| = n - |a| > N - |a| \geq \epsilon^{-1}$

$$\Rightarrow |z_n| = \frac{1}{|n+a|} < \epsilon.$$

(c) $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht konvergent:

$$z_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ -1 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$z \neq 1$ ist nicht Limes: Setze $\epsilon := \frac{|1-z|}{2} > 0$.

Dann: $\forall_{n \text{ gerade}} |z_n - z| = |1 - z| > \epsilon$.

$z = 1$ ist nicht Limes: Setze $\epsilon := 1$.

Dann: $\forall_{n \text{ ungerade}} |z_n - 1| = |-1 - 1| = 2 > \epsilon$.

Also hat die Folge keinen Limes.

Th. 7.3: (a) Folge (z_n) in \mathbb{C} ist konvergent in \mathbb{C} g.d.w.
 $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ beide konv. in \mathbb{R} .

Im Fall der Konvergenz gilt weiter:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z. \quad (7.2)$$

(b) Ist (x_n) Folge in \mathbb{R} und $z \in \mathbb{C}$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z \Rightarrow z \in \mathbb{R}. \quad (7.3)$$

Bew.: (a): Ang., $\lim z_n = z \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$. Dann:

$$\exists_{N \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n > N} \quad |z_n - z| < \epsilon, \text{ also}$$

$$|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| \stackrel{\text{Th. 5.11(d)}}{\leq} |z_n - z| < \epsilon \quad (7.4)$$

$$\Rightarrow \lim \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z.$$

Analog folgt $\lim \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$.

Umgekehrt gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = x \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = y \in \mathbb{R}$.

Beweis von $\lim z_n = x + iy$ mit “ $\frac{\epsilon}{2}$ -Argument”:

Zu $\epsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ so, dass für jedes $n > N$ gilt:

$|\operatorname{Re} z_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|\operatorname{Im} z_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$. Also:

$$\begin{aligned} \forall_{n > N} \quad |z_n - (x + iy)| &= |\operatorname{Re} z_n + i \operatorname{Im} z_n - (x + iy)| \\ &\leq \underbrace{|\operatorname{Re} z_n - x|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|i|}_1 \underbrace{|\operatorname{Im} z_n - y|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned} \quad (7.5)$$

also $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x + iy$.

(b) folgt sofort aus (a). □

Bsp. 7.4: (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2} + \frac{i}{n-17} \right) \stackrel{\text{Bsp. 7.2(a),(b), Th. 7.3(a)}}{=} \sqrt{2} + 0i = \sqrt{2}.$$

(b) Nach Th. 7.3(a) ist $(\frac{1}{n} + (-1)^n i)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent, da $((-1)^n)$ divergent.

Prop. 7.5 (Bernoullische Ungl.):

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_0} \quad \forall_{x \in [-1, \infty[} \quad (1+x)^n \geq 1 + nx \quad (7.6)$$

mit “>” für $(n > 1 \wedge x \neq 0)$.

Bew.: $n = 0: 1 \geq 1 \checkmark$

$n = 1: 1 + x \geq 1 + x \checkmark$

$n = 2: (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x$ gilt mit

“>” für $x \neq 0$.

Ind.schritt für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n (1+x) \stackrel{\text{Ind.vor., } x \geq -1}{\geq} (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x, \end{aligned} \quad (7.7)$$

mit “>” für $x \neq 0$. □

Bsp. 7.6:

$$q \in \mathbb{C} \wedge |q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 : \quad (7.8)$$

$q = 0: \checkmark$

$0 < |q| < 1 \Rightarrow |q|^{-1} > 1 \Rightarrow h := |q|^{-1} - 1 > 0$.

Für $\epsilon > 0$ und $N \geq \frac{1}{\epsilon h}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} n > N &\Rightarrow |q|^{-n} = (1+h)^n \stackrel{(7.6)}{\geq} 1 + nh > nh > 1/\epsilon \\ &\Rightarrow |q^n| = |q|^{-n} < \epsilon. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Def. 7.7: (a) Sei $z \in \mathbb{K}$, $\epsilon > 0$. $B_\epsilon(z) := \{w \in \mathbb{K} : |w - z| < \epsilon\}$
heißt ϵ -Umgebung oder ϵ -Kugel um z .

Bild in \mathbb{C} und Bild in \mathbb{R}

$U \subseteq \mathbb{K}$ heißt Umgebung von z g.d.w.

$\exists_{\epsilon > 0} B_\epsilon(z) \subseteq U$

(z.B. sind \mathbb{R} , $[z - \epsilon, \infty[$ Umg. von z in \mathbb{R} , aber nicht in \mathbb{C} ;
 $\{z\}$, $\{w \in \mathbb{K} : \operatorname{Re} w \geq \operatorname{Re} z\}$, $\{w \in \mathbb{K} : \operatorname{Re} w \geq \operatorname{Re} z + \epsilon\}$
sind keine Umg. von z).

(b) Wir sagen, die Aussage $\phi(n)$ gilt für fast alle

$n \in \mathbb{N}$ g.d.w. $\exists_{A \subseteq \mathbb{N}} A$ endlich und

$\forall_{n \in \mathbb{N} \setminus A} \phi(n)$ wahr.

Bem. 7.8: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow$ jede Umgebung von z enthält fast alle z_n .

Def. 7.9: Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{K} heißt beschränkt g.d.w.

die Menge $\{|z_n| : n \in \mathbb{N}\}$ in \mathbb{R} beschr. ist (siehe Def. 2.26(a)).

Prop. 7.10: (a) Grenzwerte sind eindeutig, d.h.

$$\forall_{z, w \in \mathbb{K}} (\lim z_n = z \wedge \lim z_n = w \Rightarrow z = w).$$

(b) $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschr.

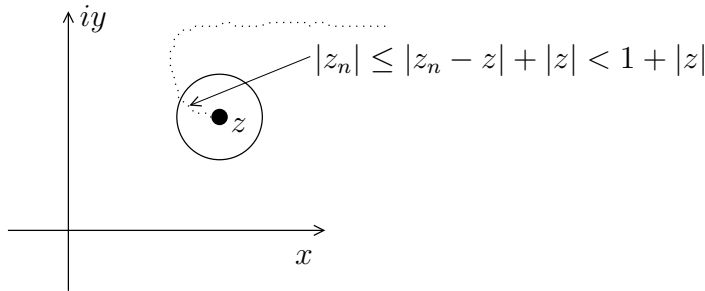
Bew.: (a) Übung.

(b): $\lim z_n = z \Rightarrow A := \{|z_n| : |z_n - z| \geq 1\} \cup \{|z_1|\} \neq \emptyset$

und $\#A < \infty$. Nach Th. 3.21(a) hat

A ob. Schr. M

$\Rightarrow \{|z_n| : n \in \mathbb{N}\}$ hat unt. Schr. 0 und ob. Schr. $\max\{M, |z| + 1\}$,



d.h., $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschr. □

Prop. 7.11: Gelte $\lim z_n = 0$.

(a) Ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $\exists_{C>0} |b_n| \leq C|z_n|$ für fast alle n ,
so gilt $\lim b_n = 0$.

(b) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschr. $\Rightarrow \lim(c_n z_n) = 0$.

Bew.: (a): $\forall_{\epsilon>0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n>N} (|z_n| < \frac{\epsilon}{C} \wedge |b_n| \leq C|z_n|)$

$\Rightarrow \forall_{n>N} |b_n| \leq C|z_n| < C \cdot \frac{\epsilon}{C} = \epsilon \Rightarrow \lim b_n = 0$.

(b): $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschr. $\Rightarrow \exists_{C>0} \forall_{n \in \mathbb{N}} |c_n| \leq C$, also

$\forall_{n \in \mathbb{N}} |c_n z_n| \leq C|z_n| \stackrel{(a)}{\Rightarrow} \lim(c_n z_n) = 0$. □

Bsp. 7.12: $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b)_{n \in \mathbb{N}}$ sind beschr. Folgen.

Also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+a} = 0 \quad \xrightarrow{\text{Prop. 7.11(b)}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n+a} = 0. \quad (7.10)$$

Th. 7.13: (a) Grenzwertsätze: Für $(z_n), (w_n)$ in \mathbb{C} mit
 $\lim z_n = z \in \mathbb{C}$ und $\lim w_n = w \in \mathbb{C}$ gelten:

$$\forall_{\lambda \in \mathbb{C}} \quad \lim(\lambda z_n) = \lambda z, \quad (7.11a)$$

$$\lim(z_n + w_n) = z + w, \quad (7.11b)$$

$$\lim(z_n w_n) = z w, \quad (7.11c)$$

$$\lim z_n / w_n = z / w \quad \text{für } w_n \neq 0 \text{ und } w \neq 0, \quad (7.11d)$$

$$\lim |z_n| = |z|, \quad (7.11e)$$

$$\lim \bar{z}_n = \bar{z}, \quad (7.11f)$$

$$\forall_{p \in \mathbb{N}} \quad \lim z_n^p = z^p. \quad (7.11g)$$

(b) Für $(x_n), (y_n)$ in \mathbb{R} mit $\lim x_n = x \in \mathbb{R}, \lim y_n = y \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{x_n, y_n\} = \max\{x, y\}, \quad (7.12a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{x_n, y_n\} = \min\{x, y\}. \quad (7.12b)$$

(c) In Situation aus (b) gilt:

$$x_n \leq y_n \text{ für f.a. } n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \leq y$$

$$(\text{speziell: } x_n \geq 0 \text{ für fast alle } n \Rightarrow x \geq 0).$$

Bew.: (7.11a): $\lambda = 0$: ✓

$\lambda \neq 0$: Sei $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \lim z_n = z &\Rightarrow \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N} |z_n - z| < \frac{\epsilon}{|\lambda|} \\ &\Rightarrow \forall_{n > N} |\lambda z_n - \lambda z| = |\lambda| |z_n - z| < \epsilon. \end{aligned} \quad (7.13a)$$

(7.11b): $\frac{\epsilon}{2}$ -Argument:

Sei $\epsilon > 0$. $\lim z_n = z, \lim w_n = w$

$$\Rightarrow \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N} |z_n - z| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |w_n - w| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall_{n > N} |z_n + w_n - (z + w)| \leq |z_n - z| + |w_n - w| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad (7.13b)$$

(7.11c): Setze $M_1 := \max\{|z|, 1\}, M_2 := \text{ob. Schr. für } \{|w_n| : n \in \mathbb{N}\},$
 $M_2 > 0$ (ex. nach Prop. 7.10(b)).

Sei $\epsilon > 0$.

$$\exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N} \left(|z_n - z| < \frac{\epsilon}{2M_2} \wedge |w_n - w| < \frac{\epsilon}{2M_1} \right)$$

$$\Rightarrow \forall_{n > N} |z_n w_n - z w| = |(z_n - z)w_n + z(w_n - w)|$$

$$\leq |w_n| \cdot |z_n - z| + |z| \cdot |w_n - w| < \frac{M_2 \epsilon}{2M_2} + \frac{M_1 \epsilon}{2M_1} = \epsilon. \quad (7.13c)$$

(7.11d): Zunächst Fall $\forall_{n \in \mathbb{N}} z_n = 1$.

Sei $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N} \left(|w_n - w| < \frac{\epsilon |w|^2}{2} \wedge \underbrace{|w_n - w| < \frac{|w|}{2}} \right) & \text{ (geht, da } w \neq 0 \text{).} \\ \Rightarrow |w| \leq |w - w_n| + |w_n| < \frac{|w|}{2} + |w_n| \\ \Rightarrow \underbrace{|w_n| > \frac{|w|}{2}} \\ \Rightarrow \forall_{n > N} \left| \frac{1}{w_n} - \frac{1}{w} \right| = \left| \frac{w_n - w}{w_n w} \right| & \leq \frac{2 |w_n - w|}{|w|^2} < \frac{2}{|w|^2} \frac{\epsilon |w|^2}{2} = \epsilon. \end{aligned} \quad (7.13d)$$

Der allgemeine Fall folgt nun aus (7.11c).

(7.11e): Benutze umgekehrte Δ -Ungl. (5.14): Sei $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N} |z_n - z| < \epsilon \\ \Rightarrow \forall_{n > N} \left| |z_n| - |z| \right| \leq |z_n - z| < \epsilon. \end{aligned} \quad (7.13e)$$

(7.11f): Sei $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$ mit $x_n, y_n, x, y \in \mathbb{R}$.

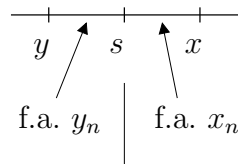
(7.2) $\Rightarrow \lim x_n = x \wedge \lim y_n = y$

$$\Rightarrow \lim \bar{z}_n = \lim(x_n - iy_n) \stackrel{(7.11a), (7.11b)}{=} x - iy = \bar{z}. \quad (7.13f)$$

(7.11g): Durch Induktion aus (7.11c).

(b): Übung.

(c): Kontraposition: Sei $x > y$. Setze $s := \frac{x+y}{2}$.



$$y < s < x \wedge \lim x_n = x \wedge \lim y_n = y$$

$$\Rightarrow y_n < s < x_n \text{ für fast alle } n$$

$$\Rightarrow x_n \leq y_n \text{ gilt nicht für fast alle } n. \quad \square$$

Bsp. 7.14: (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+a}{n+b} = 1$ gilt für alle $a, b \in \mathbb{C}$

(hier ist $z_n := \frac{n+a}{n+b}$ für $n \neq -b$

und $z_n := w$ mit $w \in \mathbb{C}$ beliebig für $n = -b$).

(7.11b) & (7.11d)

$$\Rightarrow \lim \frac{n+a}{n+b} = \lim \frac{1+a/n}{1+b/n} = \frac{\lim 1 + \lim \frac{a}{n}}{\lim 1 + \lim \frac{b}{n}} = \frac{1+0}{1+0} = 1. \quad (7.14)$$

(b) Aus (7.11b), (7.11d), (7.11g):

$$\lim \frac{2n^5 - 3in^3 + 2i}{3n^5 + 17n} = \lim \frac{2 - 3i/n^2 + 2i/n^5}{3 + 17/n^4} = \frac{2 + 0 + 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}. \quad (7.15)$$

Kor. 7.15: Sind $(z_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (z_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in \mathbb{C} , $k \in \mathbb{N}$,
mit $\forall_{j=1, \dots, k} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^{(j)} = z^{(j)}$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k z_n^{(j)} = \sum_{j=1}^k z^{(j)}, \quad (7.16a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^k z_n^{(j)} = \prod_{j=1}^k z^{(j)}. \quad (7.16b)$$

Bew.: Folgt durch einfache Ind. aus (7.11b) & (7.11c). □

Th. 7.16 (Einschachtelungssatz): Seien

$(x_n), (y_n), (a_n)$ Folgen in \mathbb{R} , und gelte $x_n \leq a_n \leq y_n$ für fast alle n .

Dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x. \quad (7.17)$$

Bew.: Sei $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \exists_{N \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n > N} \quad & \left(|x_n - x| < \epsilon \wedge |y_n - x| < \epsilon \wedge x_n \leq a_n \leq y_n \right) \\ \Rightarrow \quad \forall_{n > N} \quad & x - \epsilon < x_n \leq a_n \leq y_n < x + \epsilon. \end{aligned} \quad (7.18)$$

□

Bsp. 7.17:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad 0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \quad \xrightarrow{\text{Th. 7.16}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0. \quad (7.19)$$

Def. 7.18: Folge (x_n) in \mathbb{R} heißt bestimmt divergent g.d.w.

einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{K \in \mathbb{R}} \quad \exists_{N \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n > N} \quad x_n > K, \quad (7.20a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{K \in \mathbb{R}} \quad \exists_{N \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n > N} \quad x_n < K. \quad (7.20b)$$

Th. 7.19: Sei $S := (x_n)$ monotone Folge in \mathbb{R} (steigend oder fallend). Mit $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ gilt dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} \sup A, & \text{wenn } S \text{ steigend und beschr.}, \\ \infty, & \text{wenn } S \text{ steigend und unbeschr.}, \\ \inf A, & \text{wenn } S \text{ fallend und beschr.}, \\ -\infty, & \text{wenn } S \text{ fallend und unbeschr.} \end{cases} \quad (7.21)$$

Bew.: Sei S steigend (fallend geht analog).

S beschr.: Zu $\epsilon > 0$ setze $K := \sup A - \epsilon$.

K keine ob. Schr. $\Rightarrow \exists_{N \in \mathbb{N}} x_N > K \stackrel{S \text{ steigend}}{\Rightarrow} \forall_{n > N} \underbrace{x_n \geq x_N}_{\Rightarrow |\sup A - x_n| < \epsilon}$.

S unbeschr.: Sei $K \in \mathbb{R}$ beliebig.

Dann $\exists_{N \in \mathbb{N}} x_N > K \stackrel{S \text{ steigend}}{\Rightarrow} \forall_{n > N} x_n \geq x_N > K$. □

Bsp. 7.20: Th. 7.19 \Rightarrow

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^k) = -\infty \right). \quad (7.22)$$

Def. 7.21: Sei $A \neq \emptyset$ und $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow A$ Folge in A .

Ist $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (also $(\phi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Indizes), so heißt $(\sigma \circ \phi) : \mathbb{N} \rightarrow A$

- (a) Teilfolge (TF) von σ g.d.w. ϕ streng steigend,
- (b) Umordnung von σ g.d.w. ϕ bijektiv.

Schreibweisen: Für $\sigma = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n = \sigma(n)$

kann man schreiben $\sigma \circ \phi = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$

mit $w_n := (\sigma \circ \phi)(n) = z_{\phi(n)}$.

TF von $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird auch mit $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

bezeichnet; hier ist also $n_k := \phi(k)$.

Bsp. 7.22: Sei $\sigma = (1, 2, 3, \dots)$. $(2, 4, 6, \dots)$ ist

TF, $(2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots)$ ist Umordnung:

Es ist $(2, 4, \dots) = \sigma \circ \phi_1$ mit $\phi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\phi_1(n) := 2n$;

und $(2, 1, 4, 3, \dots) = \sigma \circ \phi_2$ mit $\phi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$\phi_2(n) := \begin{cases} n + 1 & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ n - 1 & \text{für } n \text{ grade.} \end{cases}$$

Prop. 7.23: Gilt $\lim z_n = z$, so hat jede TF und jede Umordnung von (z_n) auch $\lim z$.

Bew.: Sei $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ TF von $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dann gibt es $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ streng steigend

mit $w_n = z_{\phi(n)}$. Sei $\epsilon > 0$.

$\lim z_n = z \Rightarrow \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N} |z_n - z| < \epsilon$.

Wähle $\tilde{N} \in \phi(\mathbb{N})$ mit $\tilde{N} \geq N$ (geht, da ϕ str. st.).

Setze $M := \phi^{-1}(\tilde{N})$ (mit $\phi^{-1} : \phi(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$). Dann:

$\forall_{n > M} \phi(n) > \tilde{N} \geq N \Rightarrow |w_n - z| = |z_{\phi(n)} - z| < \epsilon$,

also $\lim w_n = z$.

Sei nun (w_n) Umordnung von (z_n) , also $w_n = z_{\phi(n)}$ mit

$\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bij. Zu $\epsilon > 0$ gibt es N wie oben.

Setze

$$M := \max\{\phi^{-1}(n) : n \leq N\}. \quad (7.23)$$

$n > M \Rightarrow \phi(n) > N$. Also:

$\forall_{n > M} |w_n - z| = |z_{\phi(n)} - z| < \epsilon$, also $\lim w_n = z$. □

Def. 7.24: $z \in \mathbb{K}$ heißt Häufungspunkt (HP) der

Folge (z_n) in \mathbb{K} g.d.w.

$\forall_{\epsilon > 0} \#\{n \in \mathbb{N} : z_n \in B_\epsilon(z)\} = \infty$,

d.h., g.d.w. jede Umgebung von z unendlich viele

Folgliedern enthält.

Bsp. 7.25: $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat die HP 1 und -1 .

Prop. 7.26: z ist HP von (z_n) g.d.w.

(z_n) hat TF (w_n) mit $\lim w_n = z$.

Bew.: (w_n) TF von (z_n) mit $\lim w_n = z$

$\Rightarrow \forall_{\epsilon > 0} \#\{n \in \mathbb{N} : w_n \in B_\epsilon(z)\} = \infty$

$\Rightarrow \forall_{\epsilon > 0} \#\{n \in \mathbb{N} : z_n \in B_\epsilon(z)\} = \infty$, d.h.,

z ist HP von (z_n) .

Sei umgekehrt z ein HP von (z_n) . Def. $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ rekursiv wie folgt:

$\phi(1) := k$ mit $z_k \in B_1(z)$ beliebig (geht, da z HP).

Nun sei $n > 1$ und $\phi(m)$ für $m < n$ bereits definiert.

Setze $M := \max\{\phi(m) : m < n\}$.

Wähle $z_k \in B_{\frac{1}{n}}(z)$ mit $k > M$ (geht, da z HP), setze

$\phi(n) := k$.

Dann ist ϕ streng steigend, d.h. (w_n) mit $w_n := z_{\phi(n)}$ ist TF von (z_n) .

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \epsilon$.

Dann: $\forall_{n > N} w_n = z_{\phi(n)} \in B_{\frac{1}{n}}(z) \subseteq B_{\frac{1}{N}}(z) \subseteq B_{\epsilon}(z)$,

also $\lim w_n = z$. □

Th. 7.27 (Bolzano-Weierstraß): Jede beschr. Folge

$S := (x_n)$ in \mathbb{K} hat mindestens einen HP in \mathbb{K} .

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt weiterhin: Zu

$A := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ ist HP von } S\}$ ex. $x_* := \min A$

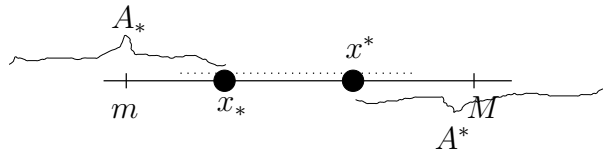
und $x^* := \max A$, d.h., S hat einen kleinsten und einen größten HP. Auch noch gilt:

$\forall_{\epsilon > 0} (x_* - \epsilon < x_n < x^* + \epsilon \text{ gilt für fast alle } n)$.

Bew.: Zunächst Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Setze

$$A^* := \{x \in \mathbb{R} : x_n \leq x \text{ für f.a. } n\}, \quad (7.24a)$$

$$A_* := \{x \in \mathbb{R} : x_n \geq x \text{ für f.a. } n\}. \quad (7.24b)$$



Dann gilt:

(a) $A^* \neq \emptyset$ ist nach unten beschr. mit $x^* = \max A = \inf A^*$.

(b) $A_* \neq \emptyset$ ist nach oben beschr. mit $x_* = \min A = \sup A_*$.

Wir beweisen (a) ((b) geht analog):

Sei m untere und M ob. Schr. für S . Dann $M \in A^*$, d.h., $A^* \neq \emptyset$.

m ist unt. Schr. für A^* . Also gibt es $a := \inf A^* \in \mathbb{R}$.

a unt. Schr. von $A^* \Rightarrow \forall_{\epsilon > 0} a - \epsilon \notin A^*$, d.h.

$\#\{n \in \mathbb{N} : x_n > a - \epsilon\} = \infty$.

$a = \inf A^* \Rightarrow a + \frac{\epsilon}{2} \in A^* \Rightarrow \#\{n \in \mathbb{N} : x_n > a + \frac{\epsilon}{2}\} < \infty$. (1)

Insbesondere gilt $x_n < a + \epsilon$ für fast alle n , also

$\#\{n \in \mathbb{N} : a - \epsilon < x_n < a + \epsilon\} = \infty$, d.h., a ist HP.

Noch zu zeigen: $a = \max A$. Sei dazu $x > a$ und

$\epsilon := x - a > 0$. Dann gilt (1), also auch

$\#\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)\} < \infty$, d.h., x ist nicht HP und

$a = \max A$.

Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Sei $S := (z_n)$ Folge in \mathbb{C} beschr., $z_n = x_n + iy_n$.

Th. 5.11(d) $\Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} (|x_n| \leq |z_n| \wedge |y_n| \leq |z_n|)$

$\Rightarrow S_1 := (x_n)$ beschr. $\wedge S_2 := (y_n)$ beschr.

Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ S_1 hat HP x

Prop. 7.26 $\Rightarrow S$ hat TF $(z_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ so, dass $x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}$.

Nun hat (y_{n_j}) HP y und TF $(y_{n_{j_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ so, dass $y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_{j_k}}$.

Also $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_{j_k}} = x + iy =: z$, d.h., nach Prop. 7.26

ist z HP von S . □

Def. 7.28: (z_n) Folge in \mathbb{K} heißt Cauchyfolge g.d.w.

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N \quad |z_n - z_m| < \epsilon. \quad (7.25)$$

Th. 7.29: (z_n) ist Cauchyfolge g.d.w. (z_n) ist konvergent.

Bew.: " \Leftarrow ": $\lim z_n = z \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad z_n \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(z)$,

also $\forall m, n > N \quad |z_n - z_m| \leq |z_n - z| + |z - z_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$,

d.h., (z_n) ist Cauchyfolge.

" \Rightarrow ": Ang., (z_n) ist Cauchy. Dann ist (z_n) beschr.:

$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N \quad |z_n - z_m| < 1$, d.h.,

$A := \{|z_n| : |z_n - z_{N+1}| \geq 1\} \cup \{|z_1|\} \neq \emptyset$ und A endlich.

Setze $M := \max A$. Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq |z_n| \leq \underbrace{\max\{M, |z_{N+1}| + 1\}}$$

$$\text{da } |z_n - z_{N+1}| < 1 \Rightarrow |z_n| \leq |z_n - z_{N+1}| + |z_{N+1}| < 1 + |z_{N+1}|$$

d.h., (z_n) beschr.

Th. 7.27 $\Rightarrow (z_n)$ hat HP z . Noch zu zeigen: $\lim z_n = z$.

Sei $\epsilon > 0$. (z_n) Cauchy $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N \quad |z_n - z_m| < \frac{\epsilon}{2}$.

HP $\Rightarrow \exists k > N \quad |z_k - z| < \frac{\epsilon}{2}$. Also

$$\forall n > N \quad |z_n - z| \leq |z_n - z_k| + |z_k - z| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad (7.26)$$

d.h. $\lim z_n = z$. □

Bsp. 7.30: Betrachte $S := (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}. \quad (7.27)$$

Beh.: S ist keine Cauchyfolge (also nicht

konvergent nach Th. 7.29): $\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n, m > N \quad |s_n - s_m| > \frac{1}{2}$,

nämlich $m := N + 1$ und $n := 2(N + 1)$:

$$\begin{aligned} s_{2(N+1)} - s_{N+1} &= \sum_{k=N+2}^{2(N+1)} \frac{1}{k} = \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \cdots + \frac{1}{2(N+1)} \\ &> (N+1) \cdot \frac{1}{2(N+1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

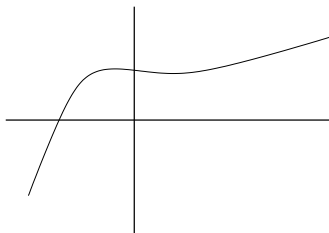
Da S nicht konv. und steigend, folgt $\lim s_n = \infty$
nach Th. 7.19:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty. \quad (7.29)$$

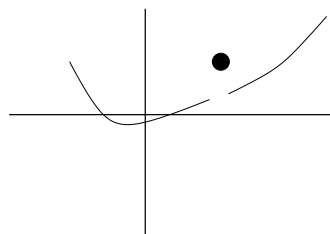
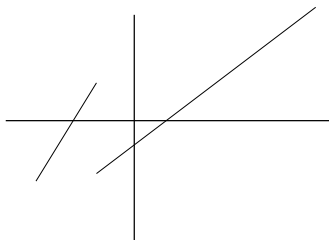
7.2. Stetigkeit

7.2.1. Definitionen & erste Beispiele

Idee:



stetig, d.h. keine "Sprünge"



unstetig, d.h. "Sprünge"

→ stetig heißt grob: kleine Änderung im Input gibt kleine Änderung im Output.

Def. 7.31: Sei $M \subseteq \mathbb{C}$, $\zeta \in M$. Fkt. $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ heißt
stetig in ζ g.d.w.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in M \quad (|z - \zeta| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(\zeta)| < \epsilon). \quad (7.30)$$

Anschaulich: Kleine Umgebungen von ζ werden auf kleine Umg. von $f(\zeta)$ abgebildet.

f stetig $\Leftrightarrow \forall_{\zeta \in M} f$ stetig in ζ .

$C(M, \mathbb{K})$: Menge der stetigen Fkt. $f : M \rightarrow \mathbb{K}$,

$C(M) := C(M, \mathbb{R})$.

Bsp. 7.32: (a) $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ konstant $\Rightarrow f$ stetig:

Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ beliebig, z.B. $\delta := 1$.

$$\forall_{z, \zeta \in M} |f(z) - f(\zeta)| = 0 < \epsilon \quad \left(\begin{array}{l} \text{gilt also auch für} \\ z, \zeta \in M \text{ mit } |z - \zeta| < \delta \end{array} \right).$$

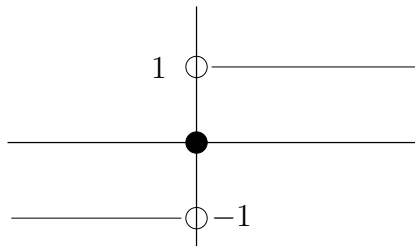
(b) Jede affine Fkt. $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(z) := az + b$ ist stetig:

Fall $a = 0$: Siehe (a).

Fall $a \neq 0$: Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta := \frac{\epsilon}{|a|}$. Dann:

$$\begin{aligned} \forall_{z, \zeta \in \mathbb{K}} |z - \zeta| < \delta = \frac{\epsilon}{|a|} &\Rightarrow |f(z) - f(\zeta)| = |az + b - a\zeta - b| \\ &= |a||z - \zeta| < |a| \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon. \end{aligned} \quad (7.31)$$

(c) sgn aus (5.9) ist nicht stetig.



$\forall_{\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ sgn stetig in ξ ,

aber sgn nicht stetig in $\xi = 0$:

Zu $\xi \neq 0$ und $\epsilon > 0$ wähle $\delta := |\xi|$. Dann:

$|x - \xi| < \delta \Rightarrow |\text{sgn}(x) - \text{sgn}(\xi)| = 0 < \epsilon$.

$$\left[\begin{array}{l} \xi < 0 : x < \xi \Rightarrow x < 0, \\ \quad \quad \quad \xi < x \Rightarrow |x - \xi| = x - \xi < \delta = |\xi| = -\xi \Rightarrow x < 0, \\ \xi > 0 : \text{analog.} \end{array} \right]$$

sgn nicht stetig in 0: Wähle $\epsilon = \frac{1}{2}$. Dann:

$$\forall_{\delta > 0} |\text{sgn}(0) - \text{sgn}(\delta/2)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon. \quad (7.32)$$

Def. 7.33: Sei $M \subseteq \mathbb{C}$.

(a) $z \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt (HP) von M g.d.w.

$$\forall_{\epsilon > 0} \#(M \cap B_\epsilon(z)) = \infty. \quad (7.33)$$

→ HP von M braucht nicht in M sein, z.B. 0, 1 sind HP von $]0, 1[$.

(b) $z \in \mathbb{C}$ heißt isolierter Pkt. von M g.d.w.

$$\exists_{\epsilon > 0} B_\epsilon(z) \cap M = \{z\}.$$

→ z isol. Pkt. von $M \Rightarrow z \in M$.

Prop. 7.34: Für $M \subseteq \mathbb{C}$ gilt:

$$M = \{z \in M : z \text{ HP von } M\} \cup \{z \in M : z \text{ isol. Pkt von } M\}. \quad (7.34)$$

Bew.: Zeige $z \in M$ nicht HP von $M \Rightarrow z$ isol. Pkt. von M .

$$z \text{ nicht HP} \Rightarrow \exists_{\tilde{\epsilon} > 0} \#(\underbrace{(M \cap B_{\tilde{\epsilon}}(z)) \setminus \{z\}}_{=: A}) < \infty.$$

Def.

$$\epsilon := \begin{cases} \min\{|a - z| : a \in A\} & \text{für } A \neq \emptyset, \\ \tilde{\epsilon} & \text{für } A = \emptyset. \end{cases} \quad (7.35)$$

Dann: $B_\epsilon(z) \cap M = \{z\}$.

Disjunktheit ist klar. □

Lem. 7.35: Sei $M \subseteq \mathbb{C}$, $f : M \rightarrow \mathbb{K}$. Dann $\forall_{\zeta \in M} (\zeta \text{ isol. Pkt} \Rightarrow f \text{ st. in } \zeta)$.

Bew.: Wähle $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(\zeta) \cap M = \{\zeta\}$. Dann

$$\forall_{\epsilon > 0} \forall_{z \in M} |z - \zeta| < \delta \Rightarrow z = \zeta \Rightarrow |f(z) - f(\zeta)| = 0 < \epsilon. \quad \square$$

Bsp. 7.36: (a) Sei $M :=]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty[$.

$f = \text{sgn}|_M$ ist stetig:

f st. in $\xi \in M \setminus \{0\}$ folgt wie in Bsp. 7.32(c).

f st. in 0, da 0 isol. Pkt. von M .

(b) Jede Fkt. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ ist stetig, da

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} n \text{ isol. Pkt. von } \mathbb{N}, \text{ da } \{n\} = \mathbb{N} \cap B_{\frac{1}{2}}(n).$$

7.2.2. Stetigkeit, Folgen und Funktionsarithmetik

→ Th. 7.37 erlaubt Stetigkeit durch Folgenkonvergenz zu überprüfen.

Th. 7.37 (Folgenkriterium): $M \subseteq \mathbb{C}$, $f : M \rightarrow \mathbb{K}$, $\zeta \in M$.

$$f \text{ stetig in } \zeta \Leftrightarrow \forall_{\substack{(z_n) \text{ Folge} \\ \text{in } M}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(\zeta) \right). \quad (7.36)$$

Bew.: Fall (1): ζ isol. Pkt. Jede Fkt f ist st. in ζ
nach Lem. 7.35. Auch gilt:

$$\begin{aligned} & \swarrow \text{da } \exists_{\delta > 0} B_\delta(\zeta) \cap M = \{\zeta\} \\ \forall_{\substack{(z_n) \text{ Folge} \\ \text{in } M}} & \left(\lim z_n = \zeta \Rightarrow z_n = \zeta \text{ f\"ur fast alle } n \right. \\ & \left. \Rightarrow \lim f(z_n) = f(\zeta) \right). \end{aligned}$$

Fall (2): ζ ist HP von M :

Sei f st. in ζ und (z_n) Folge in M mit $\lim z_n = \zeta$.

$$\text{Dann: } \forall_{\epsilon > 0} \left(\exists_{\delta > 0} \forall_{z \in M} \left(|z - \zeta| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(\zeta)| < \epsilon \right) \right. \\ \left. \text{und } \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N} |z_n - \zeta| < \delta \right).$$

Also $\forall_{n > N} |f(z_n) - f(\zeta)| < \epsilon$, d.h., $\lim f(z_n) = f(\zeta)$.

Sei nun f nicht st. in ζ . Ziel: Finde (z_n) Folge in M
mit $\lim z_n = \zeta$ und $\neg(\lim f(z_n) = f(\zeta))$.

$$f \text{ nicht st. in } \zeta \Rightarrow \exists_{\epsilon_0 > 0} \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{z_n \in M} \left(|z_n - \zeta| < \frac{1}{n} \wedge |f(z_n) - f(\zeta)| \geq \epsilon_0 \right).$$

Also $\lim z_n = \zeta$ und nicht $\lim f(z_n) = f(\zeta)$. □

Th. 7.38: $M \subseteq \mathbb{C}$; $f, g : M \rightarrow \mathbb{K}$; $\lambda \in \mathbb{K}$, $\zeta \in M$. Sind f, g
st. in ζ , so auch λf , $f + g$, fg , f/g f\"ur $g \neq 0$,
 $|f|$, $\text{Re } f$ und $\text{Im } f$.
 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, f^+ , f^- sind auch st. in ζ .

Bew.: Sei (z_n) Folge in M mit $\lim z_n = \zeta$

$$f, g \text{ st. in } \zeta \Rightarrow \left(\lim f(z_n) = f(\zeta) \wedge \lim g(z_n) = g(\zeta) \right).$$

Also

$$\begin{aligned} (7.11a) & \Rightarrow \lim(\lambda f)(z_n) = (\lambda f)(\zeta), \\ (7.11b) & \Rightarrow \lim(f + g)(z_n) = (f + g)(\zeta), \\ (7.11c) & \Rightarrow \lim(fg)(z_n) = (fg)(\zeta), \\ (7.11d) & \Rightarrow \lim(f/g)(z_n) = (f/g)(\zeta) \text{ f\"ur } g \neq 0, \\ (7.11e) & \Rightarrow \lim |f|(z_n) = |f|(\zeta), \\ (7.2) & \Rightarrow \lim(\text{Re } f)(z_n) = (\text{Re } f)(\zeta), \\ (7.2) & \Rightarrow \lim(\text{Im } f)(z_n) = (\text{Im } f)(\zeta). \end{aligned}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$(7.12a) \quad \Rightarrow \quad \lim \max(f, g)(z_n) = \max(f, g)(\zeta),$$

$$(7.12b) \quad \Rightarrow \quad \lim \min(f, g)(z_n) = \min(f, g)(\zeta).$$

$\max(f, g)$ st. in $\zeta \Rightarrow f^+, f^-$ st. in ζ . □

Kor. 7.39: $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, $M \subseteq \mathbb{C}$, st. in $\zeta \in M$ g.d.w.

$\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ beide st. in ζ .

Bew.: f st. in $\zeta \xrightarrow{\text{Th. 7.38}} \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ st. in ζ .

Sind $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ st. in ζ , so gilt wegen

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f, \tag{7.37}$$

dass f st. in ζ (wieder nach Th. 7.38). □

Bsp. 7.40: (a) $\operatorname{abs} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto |z|$ st. folgt aus (7.11e)

oder aus $z \mapsto z$ st. (Bsp. 7.32(b)) plus $|f|$ st. nach Th. 7.38.

(b) Jedes Polynom $P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{K}$,
ist st.: Jedes $x \mapsto x^j$ ist st. nach (7.11g).

P st. folgt aus (7.16a) und auch durch

Ind. aus $(f + g)$ -Fall von Th. 7.38.

(c) Seien $P, Q : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ Pol., $A := Q^{-1}\{0\}$ Menge der Nullst.
von Q . Dann ist $(P/Q) : \mathbb{K} \setminus A \rightarrow \mathbb{K}$ st. nach (b)
und dem (f/g) -Fall von Th. 7.38.

Th. 7.41: Sei $D_f, D_g \subseteq \mathbb{C}$, $f : D_f \rightarrow \mathbb{C}$, $g : D_g \rightarrow \mathbb{K}$,

$f(D_f) \subseteq D_g$.

f st. in $\zeta \in D_f \wedge g$ st. in $f(\zeta) \in D_g \Rightarrow (g \circ f) : D_f \rightarrow \mathbb{K}$ st. in ζ .

Speziell: f, g st. $\Rightarrow (g \circ f)$ st.

Bew.: Sei $\zeta \in D_f$, f st. in ζ , g st. in $f(\zeta)$.

$$\forall_{\substack{(z_n) \text{ Folge} \\ \text{in } D_f}} \left(\lim z_n = \zeta \xrightarrow{f \text{ st. in } \zeta} \lim f(z_n) = f(\zeta) \xrightarrow{g \text{ st. in } f(\zeta)} \lim g(f(z_n)) = g(f(\zeta)) \right),$$

also $g \circ f$ st. in ζ . □

7.2.3. Beschränkte, abgeschlossene und kompakte Mengen

Def. 7.42: Sei $A \subseteq \mathbb{C}$.

- (a) A heißt beschränkt g.d.w. $A = \emptyset$ oder $\{|z| : z \in A\}$ beschr. in \mathbb{R} , d.h., g.d.w.

$$\exists_{M \in \mathbb{R}^+} A \subseteq B_M(0).$$

- (b) A heißt abgeschlossen g.d.w. der Grenzwert jeder Folge in A , die in \mathbb{C} konvergiert, in A liegt (dann ist auch \emptyset abg.).
- (c) A heißt kompakt g.d.w. A abg. & beschr.

Bsp. 7.43: (a) \emptyset kompakt, $\forall_{z \in \mathbb{C}} \{z\}$ komp.

\mathbb{C} und \mathbb{R} sind abg., aber nicht beschr.

- (b) Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Beschr. Intervalle $]a, b[,]a, b]$, $[a, b[, [a, b]$ sind beschr. (z.B. durch $M := 2 \max\{|a|, |b|\}$).

$[a, b]$, $[a, \infty[$, $] - \infty, b]$ sind abg.:

Z.B. folgt aus (x_n) Folge in $[a, b]$ mit $x = \lim x_n$, dass $x \in [a, b]$ (Th. 7.13(c)).

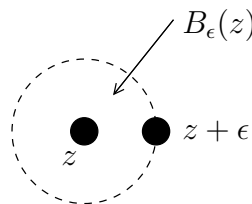
Offene und halboffene Intervalle sind nicht abg.:

Z.B. ist $(b - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $[a, b[$ (für n groß genug), aber $\lim_{n \rightarrow \infty} (b - \frac{1}{n}) = b \notin [a, b[$.

Nur Intervalle der Form $[a, b]$ sind kompakt.

- (c) $\forall_{\epsilon > 0, z \in \mathbb{C}} B_\epsilon(z)$ beschr., aber nicht abg.:

$B_\epsilon(z) \subseteq B_{\epsilon+|z|}(0)$, da $|w - z| < \epsilon \Rightarrow |w| < \epsilon + |z|$ nach Δ -Ungl.; für große n ist $(z + \epsilon - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $B_\epsilon(z)$ mit $\lim(z + \epsilon - \frac{1}{n}) = z + \epsilon \notin B_\epsilon(z)$.



Insbesondere ist $B_\epsilon(z)$ nicht kompakt.

Prop. 7.44: (a) Endliche Vereinigungen von beschr. (bzw. von abg. bzw. von kompakten) Mengen sind beschr. (bzw. abg. bzw. kompakt).

- (b) Beliebige (endl. oder unendl.) Durchschnitte von beschr. (bzw. abg. bzw. komp.) Mengen sind beschr. (bzw. abg. bzw. komp.).

Bew.: (a): Übung.

(b): Sei $I \neq \emptyset$ Indexmenge, A_j für $j \in I$ Mengen, $A := \bigcap_{j \in I} A_j$.

Seien alle A_j beschr. und $j_0 \in I$.

Dann $\exists_{M>0} A_{j_0} \subseteq B_M(0)$, also

$A = \bigcap_{j \in I} A_j \subseteq A_{j_0} \subseteq B_M(0)$, d.h., A beschr.

Sind alle A_j abg. und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Folge in A mit

$\lim a_n = z \in \mathbb{C}$, so ist $\forall_{j \in I} z \in A_j$,

da (a_n) Folge in A_j und A_j abg.,

also $z \in A$ und A abg.

Alle A_j komp. \Rightarrow alle A_j abg. & beschr. $\Rightarrow A$ abg. & beschr.

$\Rightarrow A$ komp. □

Bsp. 7.45: (a) Nach Prop. 7.44(a) sind alle endl. Teilmengen von \mathbb{C} kompakt.

(b) $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$ ist unendl. Vereinigung komp. Mengen, die nicht beschr. ist.

$]0, 1[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ ist unendl. Vereinigung komp. Mengen, die nicht abg. ist.

Bem. 7.46:

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{K} \text{ stetig und } A \subseteq \mathbb{K} \text{ abg.} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(A) \subseteq \mathbb{C} \text{ abg.} \quad (7.38)$$

Bew.: Sei f st., $A \subseteq \mathbb{K}$ abg. und (z_n) Folge in $f^{-1}(A)$

mit $\lim z_n = z \in \mathbb{C}$. Dann ist $(f(z_n))$ Folge in A

und $\lim f(z_n) = f(z)$, da f st. in z . Also $f(z) \in A$,

da A abg., also $z \in f^{-1}(A)$, d.h., $f^{-1}(A)$ abg.

[Auch Umkehrung von (7.38) gilt: Siehe Analysis 2.]

Bsp. 7.47: (a) $\forall_{z \in \mathbb{C}} \forall_{r>0} \overline{B}_r(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}$ ist abg.
 \swarrow abg. Kreisscheibe um z mit Radius r

nach (7.38), da

$$\overline{B}_r(z) = f^{-1}[0, r] \quad (7.39)$$

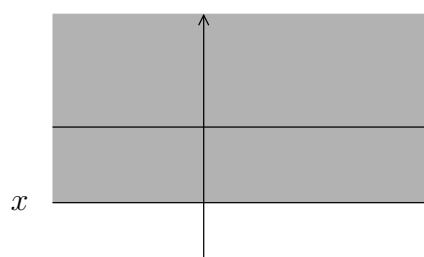
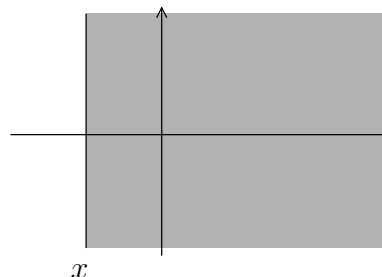
mit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, f(w) := |z - w|$ stetig.

$\overline{B}_r(z)$ ist auch beschr., also kompakt.

(b) $\forall_{z \in \mathbb{C}} \forall_{r>0} S_r(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| = r\} = f^{-1}\{r\}$
 \swarrow Kreis/1-Sphäre um z mit Radius r
 mit f wie oben ist abg. & beschr. (d.h. komp.).

(c) (7.38)

$$\Rightarrow \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq x\} = \operatorname{Re}^{-1}[x, \infty[\text{ abg.},$$



$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq x\} = \operatorname{Im}^{-1}[x, \infty[\text{ abg.}$$

Th. 7.48: $K \subseteq \mathbb{C}$ komp.
 \Leftrightarrow jede Folge in K hat Teilfolge (TF) mit Limes $z \in K$.
Bew.: “ \Rightarrow ”: Sei K komp., d.h. beschr. & abg. Sei (z_n) Folge in K .

Nach Bolzano-Weierstraß Th. 7.27, Prop. 7.26 hat

 (z_n) eine konv. TF (w_n) mit $\lim w_n = z \in \mathbb{C}$. K abg. $\Rightarrow z \in K$.“ \Leftarrow ”: Sei (z_n) Folge in K mit $\lim z_n = w \in \mathbb{C}$. (z_n) hat TF mit Limes $z \in K$, d.h. $w = z \in K$ nach Prop. 7.23,d.h., K abg.Wäre K unbeschr., so $\exists_{(z_n) \text{ Folge in } K} \lim |z_n| = \infty$, d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} |z_{n_k}| = \infty$ für jede TF von (z_n) , d.h.keine TF von (z_n) konv. in \mathbb{C} (oder K). □**Warnung/Ausblick 7.49:** Es gibt in allgemeinen metrischenRäumen (Analysis 2) abg. & beschr. Mengen, die nicht

kompakt sind (komp. Mengen sind aber immer abg. & beschr.).

→ Komp. Mengen sind z.B. nützlich, weil stetige \mathbb{R} -wertige Fkt.

auf komp. Mengen Maxima und Minima annehmen

(Th. 7.54 unten).

Def. 7.50: Sei $M \subseteq \mathbb{C}$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) f hat (strenges) globales Min. in $z \in M$ g.d.w.
 $\forall_{w \in M \setminus \{z\}} f(z) \leq f(w)$ (bzw. $f(z) < f(w)$);
 f hat (strenges) globales Max. in $z \in M$ g.d.w.
 $\forall_{w \in M \setminus \{z\}} f(z) \geq f(w)$ (bzw. $f(z) > f(w)$);
 f hat in z (str.) globalen Extremwert g.d.w.
 f hat in z (str.) globales Min. oder Max.
- (b) f hat (str.) lokales Min. in $z \in M$ g.d.w.
 $\exists_{\epsilon > 0} \forall_{w \in (B_\epsilon(z) \cap M) \setminus \{z\}} f(z) \leq f(w)$ (bzw. $f(z) < f(w)$);
 (str.) lok. Max.: $\forall_{w \in (B_\epsilon(z) \cap M) \setminus \{z\}} f(z) \geq f(w)$ (bzw. $f(z) > f(w)$);
 f hat in z (str.) lok. Extremwert g.d.w.
 f hat in z (str.) lok. Min./Max.

Bem. 7.51: f hat (str.) globales/lokales Min in z g.d.w.

$$-f \quad || \quad \text{Max in } z.$$

Jedes (str.) globale Min/Max ist auch (str.)
lok. Min/Max.

Th. 7.52: $K \subseteq \mathbb{C}$ komp. $\wedge f : K \rightarrow \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow f(K)$ komp.

Bew.: Sei (w_n) Folge in $f(K)$. Dann gibt es Folge (z_n) in K

mit $\forall_{n \in \mathbb{N}} w_n = f(z_n)$.

K komp. $\Rightarrow \exists_{(a_n) \text{ TF von } (z_n)} \lim a_n = a \in K$.

Dann ist $(f(a_n))$ TF von $(w_n) = (f(z_n))$ und

$\lim f(a_n) = f(a)$, da f st.

Da $f(a) \in f(K)$, folgt $f(K)$ komp. nach Th. 7.48. □

Lem. 7.53: $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}$ komp. $\Rightarrow \exists_{m, M \in K} \forall_{x \in K} m \leq x \leq M$
 (K hat kl. und gr. Element).

Bew.: K beschr.

$$\Rightarrow -\infty < m := \inf K \leq \sup K =: M < \infty.$$

Dann: $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x_n, y_n \in K} m \leq x_n \leq m + \frac{1}{n} \wedge M - \frac{1}{n} \leq y_n \leq M$.

K abg. $\Rightarrow m = \lim x_n \in K \wedge M = \lim y_n \in K$. □

Th. 7.54: $K \subseteq \mathbb{C}$ komp., $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ hat gl. Max und Min,

d.h., $\exists_{z_m, z_M \in K} f$ hat gl. Min in z_m und gl. Max in z_M

(gilt insbesondere für $K = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ komp. Intervall).

Bew.: K komp., f st. $\xrightarrow{\text{Th. 7.52}}$ $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ komp.

$\xrightarrow{\text{Lem. 7.53}}$ $f(K)$ hat kl. El. m und gr. El. M

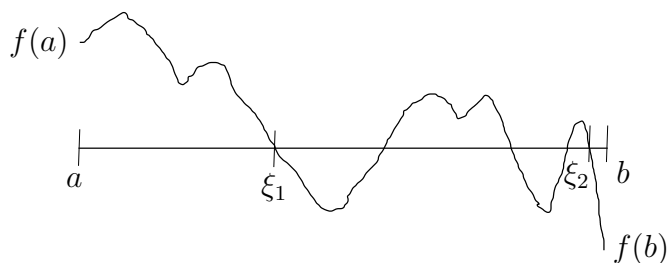
$\Rightarrow \exists_{z_m, z_M \in K} f(z_m) = m \wedge f(z_M) = M.$ □

Bsp. 7.55: $\text{Id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$, zeigt, dass st. Fkt. auf unbeschr. Menge kein Max oder Min haben muss.

$f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := 1/x$, zeigt, dass st. Fkt. auf beschr., nicht abg. Menge kein Max. haben muss.

7.2.4. Zwischenwertsatz

Th. 7.56 (Nullstellensatz von Bolzano): Ist $a < b$,
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ st., $f(a) > 0 \wedge f(b) < 0$, so hat f
 mindestens eine Nullst. in $]a, b[$. Für $A := f^{-1}\{0\}$
 gibt es $\xi_1 := \min A, \xi_2 := \max A$ mit $a < \xi_1 \leq \xi_2 < b$,
 $f > 0$ auf $[a, \xi_1[$ und $f < 0$ auf $] \xi_2, b]$.



Bew.: Setze $\xi_1 := \inf f^{-1}(\mathbb{R}_0^-)$.

(a): Es gilt $f(\xi_1) \leq 0$: Klar, falls $\xi_1 = b$. Sonst gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

groß genug: Es gibt $x_n \in [\xi_1, \xi_1 + \frac{1}{n}[$

mit $f(x_n) \leq 0$. Dann: $\lim x_n = \xi_1$

$\Rightarrow \lim f(x_n) = f(\xi_1) \leq 0$.

$\swarrow f$ st. \swarrow Th. 7.13(c)

(a) $\Rightarrow \xi_1 > a$ und $f > 0$ auf $[a, \xi_1[$.

(b): $f(\xi_1) \geq 0$: f st. $\Rightarrow \lim f(\xi_1 - \frac{1}{n}) = f(\xi_1)$.

Da $f(\xi_1 - \frac{1}{n}) > 0$ nach (a), folgt $f(\xi_1) \geq 0$ aus Th. 7.13(c).

(b) $\Rightarrow \xi_1 < b$.

(a) & (b) $\Rightarrow f(\xi_1) = 0 \wedge a < \xi_1 < b$.

Für $\xi_2 := \sup f^{-1}(\mathbb{R}_0^+)$ folgt $f(\xi_2) = 0$ und $a < \xi_2 < b$

ganz analog. Dann ist aber auch $f < 0$ auf $] \xi_2, b]$ und

$\xi_1 \leq \xi_2$ klar. □

Th. 7.57 (Zwischenwertsatz): Sei $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, d.h.

$$\left[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\} \right] \subseteq f([a, b]). \quad (7.40)$$

Bew.: Fall $f(a) = f(b)$: ✓

Fall $f(a) < f(b)$: Zu $\eta \in]f(a), f(b)[$ def.

$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \eta - f(x)$. Dann g st.

mit $g(a) = \eta - f(a) > 0$, $g(b) = \eta - f(b) < 0$.

Th. 7.56 $\Rightarrow \exists_{\xi \in]a, b[} g(\xi) = \eta - f(\xi) = 0$, also $f(\xi) = \eta$.

Fall $f(b) < f(a)$ geht analog mit $g(x) := f(x) - \eta$. □

Th. 7.58: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ st., so

ist auch $f(I)$ Intervall. Genauer:

$$I = [a, b] \Rightarrow f(I) = [\min f(I), \max f(I)].$$

↙ Th. 7.54 & Th. 7.57

Sonst gibt es 9 Möglichkeiten:

$$f(I) = \mathbb{R}, \quad (7.41a)$$

$$\text{oder } f(I) =] - \infty, \sup f(I)], \quad (7.41b)$$

$$\text{oder } f(I) =] - \infty, \sup f(I)[, \quad (7.41c)$$

$$\text{oder } f(I) = [\inf f(I), \infty[\quad (7.41d)$$

$$\text{oder } f(I) = [\inf f(I), \sup f(I)], \quad (7.41e)$$

$$\text{oder } f(I) = [\inf f(I), \sup f(I)[, \quad (7.41f)$$

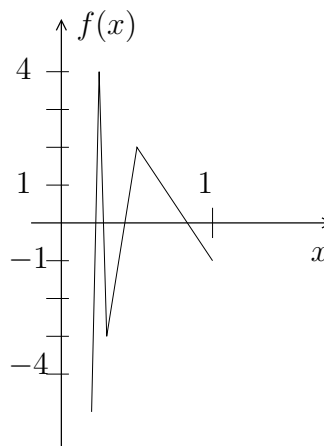
$$\text{oder } f(I) =] \inf f(I), \infty[, \quad (7.41g)$$

$$\text{oder } f(I) =] \inf f(I), \sup f(I)], \quad (7.41h)$$

$$\text{oder } f(I) =] \inf f(I), \sup f(I)[. \quad (7.41i)$$

Bew.: Folgt aus Th. 7.57 (siehe Skript). □

Bsp. 7.59: Finde $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ st. mit $f(]0, 1[) = \mathbb{R}$:



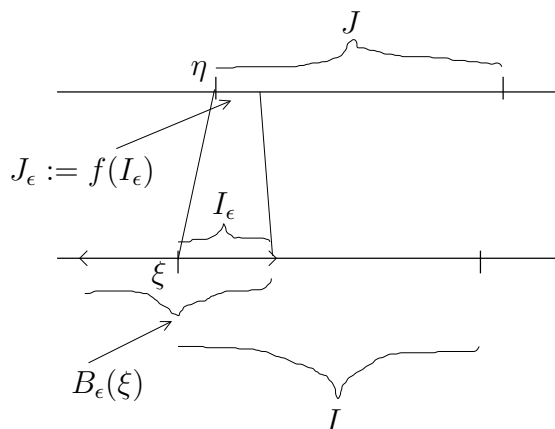
Z.B. f stückweise affin mit $\forall_{n \in \mathbb{N}} f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \cdot n$

(Formel im Skript).

7.2.5. Umkehrfkt., Existenz von Wurzeln, Exponentialfkt., Logarithmus

Th. 7.60: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und streng steigend (bzw. fallend). Dann hat f eine auf $J := f(I)$ def. Umkehrfkt. $f^{-1} : J \rightarrow I$ und f^{-1} ist stetig und str. steigend (bzw. fallend). Ist f stetig, so ist J Intervall.

Bew.: Prop. 2.31(b) $\Rightarrow f : I \rightarrow \mathbb{R}$ inj.
 Also $f : I \rightarrow f(I)$ bij. und f^{-1} str. steigend (bzw. fallend) nach Prop. 2.31(c).
 Noch zu zeigen: $f^{-1} : J \rightarrow I$ stetig.
 Sei f str. steigend (sonst betrachte $-f$),
 $\eta \in J$, $\xi \in I$ mit $f(\xi) = \eta$.
 Z.z.: f^{-1} stetig in η .



Zu betrachten sind 3 Fälle:

- (a) $\xi = \min I \neq \max I$,
- (b) $\xi = \max I \neq \min I$,
- (c) ξ weder $= \min I$ noch $= \max I$.

Wir machen (c) ((a),(b) gehen analog: Übung): Sei $\epsilon > 0$.

Wähle $\xi_1, \xi_2 \in I$ mit

$$\xi - \epsilon < \xi_1 < \xi < \xi_2 < \xi + \epsilon \quad (7.42)$$

(geht wegen (c)).

f str. st. $\Rightarrow f(\xi_1) < \eta < f(\xi_2)$.

Wähle $\delta > 0$ so, dass $f(\xi_1) < \eta - \delta < \eta < \eta + \delta < f(\xi_2)$.

Dann:

$$\forall_{y \in J \cap B_\delta(\eta)} \left(f(\xi_1) < y < f(\xi_2) \stackrel{f^{-1} \text{ str. st.}}{\Rightarrow} \xi_1 < f^{-1}(y) < \xi_2 \stackrel{(7.42)}{\Rightarrow} f^{-1}(y) \in B_\epsilon(\xi) \right),$$

d.h. f^{-1} st. in η .

Th. 7.58 $\Rightarrow J = f(I)$ ist Intervall, falls f stetig. □

Bem. & Def. 7.61 (Wurzeln):

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \left(f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^n, \text{ st. und str. steigend mit } J := f(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+ \right. \\ \left. \stackrel{\text{Th. 7.60}}{\Rightarrow} f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \text{ st. und str. steigend} \right).$$

Schreibe $\sqrt[n]{x} := x^{\frac{1}{n}} := f^{-1}(x)$.

\nwarrow n . Wurzel von x .

Dann: $(\sqrt[n]{x})^n = (x^{\frac{1}{n}})^n = x$.

$\sqrt{x} := \sqrt[2]{x}$.

Bem. & Def. 7.62: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$:

Ang., $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, nicht beide gerade (sonst kürzen).

Dann: $m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ und m gerade, also $m = 2p$ mit $p \in \mathbb{N}$.

Also $2n^2 = m^2 = 4p^2 \Rightarrow n^2 = 2p^2 \Rightarrow n^2$ und n gerade ζ .

Die Elemente von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen irrationale Zahlen.

Es gilt: \mathbb{Q} abzählbar; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nicht abzählbar (Literaturverweis im Skript).

Th. 7.63 (AGM-Ungleichung):

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \forall_{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_0^+} \quad \underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}_{\text{geometr. Mittel}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}}_{\text{arithm. Mittel}}; \quad (7.43)$$

“=” gilt g.d.w. $x_1 = \cdots = x_n$.

Bew.: Klar, falls ein $x_j = 0$.

Auch klar, falls $x_1 = \cdots = x_n$.

Bleibt der Fall, dass alle $x_j > 0$ und nicht alle gleich.

Zunächst gelte $\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = 1$.

Dann: $\exists_k x_k \neq 1$. Beweis von (7.43) durch Ind. für $n = 2, 3, \dots$

in der Form

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j = n \quad \wedge \quad \exists_{k \in \{1, \dots, n\}} x_k \neq 1 \right) \Rightarrow \prod_{j=1}^n x_j < 1.$$

Ind.verank. ($n = 2$): Es gilt $x_1 + x_2 = 2$ und

$$\exists_{\epsilon > 0} x_1 = 1 + \epsilon, x_2 = 1 - \epsilon \Rightarrow x_1 x_2 = 1 - \epsilon^2 < 1.$$

Ind.schritt: Es ist $n \geq 2$ und $0 < x_1, \dots, x_{n+1}$ mit

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_j = n + 1 \text{ und } \exists_{k,l} \exists_{\alpha, \beta > 0} x_k = 1 + \alpha, x_l = 1 - \beta.$$

Setze $y := x_k + x_l - 1 = 1 + \alpha - \beta$.

Dann $\beta < 1 \Rightarrow y > 0$ und

$$y + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k, l}}^{n+1} x_j = -1 + \sum_{j=1}^{n+1} x_j = n \stackrel{\text{Ind.vor.}}{\Rightarrow} y \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq k, l}}^{n+1} x_j \leq 1.$$

Wegen $x_k x_l = (1 + \alpha)(1 - \beta) = 1 + \alpha - \beta - \alpha\beta = y - \alpha\beta < y$,

folgt also $\prod_{j=1}^{n+1} x_j < 1$.

Bleibt der allg. Fall $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \lambda > 0$, nicht alle x_j gleich:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \lambda \sqrt[n]{\frac{x_1}{\lambda} \cdots \frac{x_n}{\lambda}} \stackrel{\text{Spezialfall}}{<} \lambda \frac{x_1 + \dots + x_n}{\lambda n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

□

Kor. 7.64: Für $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$, $n \in \{2, 3, \dots\}$, $p \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt:

$$\sqrt[p]{a^p} < 1 + \frac{p}{n}(a-1); \quad p = 1 \text{ liefert } \sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a-1}{n}. \quad (7.44)$$

Bew.:

$$\sqrt[p]{a^p} = \sqrt[n]{a^p \cdot \prod_{j=1}^{n-p} 1} \stackrel{\text{Th. 7.63}}{<} \frac{p a + n - p}{n} = 1 + \frac{p}{n}(a-1). \quad (7.45)$$

□

Bsp. 7.65: Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 : \quad (7.46)$$

Wegen $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^n < 1$ folgt

$$\forall_{n > 1} (\sqrt[n]{n})^n = n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} > 1. \text{ Weiter}$$

$$\forall_{n > 1} \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \sqrt{n} \cdot \prod_{k=1}^{n-2} 1} \stackrel{\text{Th. 7.63}}{<} \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}. \quad (7.47)$$

Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \stackrel{\text{Übung 0}}{=} 0 \quad (7.48)$$

folgt (7.46) aus $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$ und Th. 7.16.

Bsp. 7.66 (Eulersche Zahl e):

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (7.49)$$

Es gilt $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $e = 2.71828\dots$

Wir zeigen nur, dass der Grenzwert existiert:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \forall_{\substack{x \in [-n, \infty[, \\ x \neq 0}} \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \underbrace{1 \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}_{\substack{(n+1) \text{ Faktoren} \\ \text{nicht alle gleich} \\ \Sigma = n+1+x}} \stackrel{\text{Th. 7.63}}{<} \underbrace{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}_{\substack{(n+1) \text{ Fakt.} \\ \text{alle gleich} \\ \Sigma = n+1+x}}. \quad (7.50)$$

Def.

$$\begin{aligned} a_n &:= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, & b_n &:= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \\ \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad c_n &:= b_{n+1}^{-1} = \left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \end{aligned} \quad (7.51)$$

(7.50) mit $x = 1 \Rightarrow (a_n)$ str. steigend,

(7.50) mit $x = -1 \Rightarrow (b_n)$ str. steigend $\Rightarrow (c_n)$ str. fallend.

$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad a_n < c_n \Rightarrow c_1$ ist ob. Schr. für (a_n) ,

a_1 ist unt. Schr. für (c_n)

$\stackrel{\text{Th. 7.19}}{\Rightarrow} (a_n)$ und (c_n) sind konvergent.

Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n(1 + 1/n)) = e \cdot 1 = e$ und

$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad a_n < e < c_n$ lässt sich e beliebig genau berechnen.

Def. 7.67: $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt dicht in \mathbb{R} g.d.w.

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad \forall_{\epsilon \in \mathbb{R}^+} \quad A \cap B_\epsilon(x) \neq \emptyset.$$

Th. 7.68: (a) \mathbb{Q} ist dicht in \mathbb{R} .

(b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist dicht in \mathbb{R} .

(c) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad \exists_{\substack{(r_n), (s_n) \\ \text{Folgen in } \mathbb{Q}}} \left((r_n) \text{ str. steigend} \wedge (s_n) \text{ str. fallend} \right. \\ \left. \wedge x = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \right).$

Bew. nur im Skript. □

Def. & Bem. 7.69 (Potenzen): Ziel: a^x für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ def. (a): $x \in \mathbb{Q}$, (b): $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(a) Sei $x = \frac{k}{n}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Def.

$$a^x := a^{\frac{k}{n}} := \sqrt[n]{a^k}. \quad (7.52)$$

Zeige: Def. hängt nicht von Darstellung von x ab, d.h., $x = \frac{k}{n} = \frac{km}{nm} \Rightarrow a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{km}{nm}}$. Dazu:

$$\left(a^{\frac{k}{n}}\right)^{nm} = \left(\sqrt[n]{a^k}\right)^{nm} = a^{km} \quad \text{und} \quad \left(a^{\frac{km}{nm}}\right)^{nm} = \left(\sqrt[nm]{a^{km}}\right)^{nm} = a^{km} \quad (7.53)$$

$\Rightarrow a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{km}{nm}}$, da $\lambda \mapsto \lambda^{nm}$ injektiv.

Potenzregeln für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (7.54a)$$

$$a^x b^x = (ab)^x, \quad (7.54b)$$

$$(a^x)^y = a^{xy}. \quad (7.54c)$$

Z.B. für (7.54a): $\exists_{k,l \in \mathbb{Z}} \exists_{n \in \mathbb{N}} x = \frac{k}{n}, y = \frac{l}{n}$ und

$$\begin{aligned} (a^{x+y})^n &= \left(a^{\frac{k+l}{n}}\right)^n = a^{k+l} \stackrel{\text{Th. 5.7(a)}}{=} a^k a^l = \left(a^{\frac{k}{n}}\right)^n \left(a^{\frac{l}{n}}\right)^n \\ &\stackrel{\text{Th. 5.7(b)}}{=} (a^x a^y)^n. \end{aligned}$$

Monotonie: Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$\forall_{x>0} \left(a < b \Rightarrow a^x < b^x \right), \quad (7.55a)$$

$$\forall_{x<0} \left(a < b \Rightarrow a^x > b^x \right), \quad (7.55b)$$

$$\forall_{a>1} \left(x < y \Rightarrow a^x < a^y \right), \quad (7.55c)$$

$$\forall_{0<a<1} \left(x < y \Rightarrow a^x > a^y \right). \quad (7.55d)$$

Abschätzungen: Für $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$a > 1 \wedge x > 0 \Rightarrow a^x - 1 < x \cdot a^{x+1}, \quad (7.56)$$

$$\begin{aligned} \forall_{m \in \mathbb{N}} \left(x, y \in [-m, m] \Rightarrow |a^x - a^y| \leq L |x - y|, \right. \\ \left. \text{mit } L := \max\{a^{m+1}, (1/a)^{m+1}\} \right). \end{aligned} \quad (7.57)$$

Bew. v. (7.56): $x \geq 1$: $a^x < a^{x+1} < x \cdot a^{x+1} + 1$.

$x < 1$: $x = \frac{p}{n}$ mit $p < n \Rightarrow a^x \stackrel{(7.44)}{<} 1 + x(a-1) < 1 + xa < 1 + x \cdot a^{x+1}$.

Bew. v. (7.57): $x = y$: ✓

Sei $x < y$ (bei $x > y$ ggf. x, y umbenennen).

$a = 1$: ✓

$a > 1$: Setze $z := y - x > 0 \stackrel{(7.56)}{\Rightarrow} a^z - 1 < z a^{z+1}$

$$\stackrel{a^x}{\Rightarrow} a^x a^z - a^x = a^y - a^x < z \cdot a^x a^{z+1} = (y - x) a^{y+1} \leq (y - x) a^{m+1}.$$

$a < 1$: $a^{-1} > 1$

$$\Rightarrow |a^x - a^y| = |(a^{-1})^{-x} - (a^{-1})^{-y}| \leq |y - x| (a^{-1})^{m+1}.$$

(b) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ def.

$$a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n}, \quad \text{wobei } (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathbb{Q} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x. \quad (7.58)$$

zeige: lim ex. und hängt nicht von Folge ab

Für die Existenz wählt man monotone Folge q_n nach Th. 7.68(c) und bemerkt, dass $(a^{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton & beschr. ist.

Sei nun (r_n) in \mathbb{Q} beliebig mit $x = \lim r_n$. Dann gilt

$$\lim |q_n - r_n| = 0 \stackrel{(7.57)}{\Rightarrow} \exists_{L > 0} \forall_{n \in \mathbb{N}} |a^{q_n} - a^{r_n}| \leq L |q_n - r_n| \rightarrow 0 \quad (7.59)$$

$$\Rightarrow \lim a^{r_n} = \lim (a^{r_n} - a^{q_n} + a^{q_n}) = 0 + a^x = a^x, \quad (7.60)$$

d.h., (7.58) hängt nicht von der Folge ab.

Prop. 7.70: (7.54) – (7.57) gelten auch für

$x, y \in \mathbb{R}$. Außerdem:

$$\forall_{a > 0} \quad \forall_{(x_n) \text{ Folge in } \mathbb{R}} \left(\lim x_n = x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim a^{x_n} = a^x \right). \quad (7.61)$$

Bew. (exemplarisch): (7.57): Seien $(p_n), (q_n)$ monotone Folgen in $\mathbb{Q} \cap [-m, m]$, $m \in \mathbb{N}$ mit $\lim p_n = x \in \mathbb{R}$, $\lim q_n = y \in \mathbb{R}$.

Dann:

$$\begin{aligned} \forall_{n \in \mathbb{N}} |a^{p_n} - a^{q_n}| &\stackrel{(7.57) \text{ für } \mathbb{Q}}{\leq} L |p_n - q_n| \\ &\stackrel{\text{Th. 7.13(c)}}{\Rightarrow} |a^x - a^y| \leq L |x - y|. \end{aligned}$$

(7.61) folgt nun wegen

$$0 \leq |a^{x_n} - a^x| \leq L |x_n - x| \rightarrow 0.$$

(7.54a):

$$a^{x+y} = \lim a^{p_n+q_n} \stackrel{(7.54a) \text{ für } \mathbb{Q}}{=} \lim (a^{p_n} a^{q_n}) = a^x a^y.$$

□

Def. 7.71: (a) Jede Fkt. der Form

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (7.62)$$

heißt Potenzfkt. Für $\alpha > 0$ setze auch $0^\alpha := 0$;
für $\alpha \in \mathbb{Z}$ ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ def.; für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ auf \mathbb{R} .

(b) Jede Fkt. der Form

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) := a^x, \quad a > 0, \quad (7.63)$$

heißt (allgemeine) Exponentialfkt. Oft ist mit
Exponentialfkt. der Fall $a = e$ gemeint. Schreibe
auch $\exp(x) := e^x$.

Th. 7.72: (a) Jede Potenzfkt. ist auf ihrem Def.bereich stetig.

$\alpha > 0$: str. steigend auf $[0, \infty[$;

$\alpha < 0$: str. fallend auf $]0, \infty[$.

(b) Jede Exp.fkt. ist stetig.

$a > 1$: str. steigend;

$0 < a < 1$: str. fallend.

Bew.: (a): (7.55a) & (7.55b): Monotonie.

$\alpha \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$ Polynom (st. nach Bsp. 7.40(b)),

$\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ rat. Fkt. (st. nach Bsp. 7.40(c)).

$\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+$: Siehe Bsp. 7.76(a) unten.

Stetigkeit in $x = 0$ für $\alpha > 0$:

Sei (x_n) Folge in \mathbb{R}^+ mit $\lim x_n = 0$ sowie $k \in \mathbb{N}$
mit $\frac{1}{k} \leq \alpha$.

$$\exists_{N \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n > N} \quad x_n \leq 1 \Rightarrow 0 < x_n^\alpha \leq x_n^{1/k}.$$

$$x \mapsto x^{1/k} \text{ st.} \Rightarrow \lim x_n^{1/k} = 0 \stackrel{\text{Th. 7.16}}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow x \mapsto x^\alpha \text{ st. in } x = 0.$$

(b): (7.61) \Rightarrow Stetigkeit.

(7.55c) & (7.55d) \Rightarrow Monotonie. □

Bem. & Def. 7.73 (Logarithmus): Sei $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Nach Th. 7.72(b) ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, f(x) := a^x$, stetig und
str. monoton. Auch $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ (Übung).

Th. 7.60 $\Rightarrow f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert, ist st. und str.

monoton. $\log_a x := f^{-1}(x)$ heißt Logarithmus

von x zur Basis a . Spezialfälle:

$$\ln x := \log_e x, \quad \text{lb } x := \log_2 x, \quad \lg x := \log_{10} x. \quad (7.64)$$

\swarrow natürlicher Log. (wichtig)

Kor. 7.74: Für alle $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ist $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ stetig;
für $a > 1$ str. steigend; für $0 < a < 1$ str. fallend. \square

Th. 7.75 (Logarithmengesetze):

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \log_a 1 = 0, \quad (7.65a)$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \log_a a = 1, \quad (7.65b)$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \quad \forall_{x \in \mathbb{R}^+} a^{\log_a x} = x, \quad (7.65c)$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \quad \forall_{x \in \mathbb{R}} \log_a a^x = x, \quad (7.65d)$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \quad \forall_{x, y \in \mathbb{R}^+} \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad (7.65e)$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \quad \forall_{x \in \mathbb{R}^+} \quad \forall_{y \in \mathbb{R}} \log_a(x^y) = y \log_a x, \quad (7.65f)$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \quad \forall_{x, y \in \mathbb{R}^+} \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y, \quad (7.65g)$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \quad \forall_{x \in \mathbb{R}^+} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x, \quad (7.65h)$$

$$\forall_{a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \quad \forall_{x \in \mathbb{R}^+} \log_b x = (\log_b a) \log_a x. \quad (7.65i)$$

Bew. (exemplarisch): Benutze $\log_a x = f^{-1}(x)$ mit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) := a^x$.

$$(7.65c): a^{\log_a x} = f(f^{-1}(x)) = x.$$

(7.65e): Wegen

$$f(\log_a x + \log_a y) = a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} \stackrel{(7.65c)}{=} xy,$$

$$\text{folgt } \log_a(xy) = f^{-1}(xy) = f^{-1}(f(\log_a x + \log_a y)) = \log_a x + \log_a y. \quad \square$$

Bsp. 7.76: (a) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (7.66)$$

stetig: $f = \exp \circ (\alpha \ln) \stackrel{\swarrow \text{st. nach Kor. 7.74.}}{\Rightarrow} f \text{ st. nach Th. 7.41.}$
 $\searrow \text{st. nach Th. 7.72(b)}$

(b) Nach Th. 7.41 sind auch stetig:

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) := (\exp(\lambda + x^2))^\alpha,$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) := \frac{1}{e^{\alpha x} + \lambda},$$

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) := \frac{x^5}{(\lambda + |x|)^\alpha}$$

(für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$).

7.3. Reihen

7.3.1. Definition & Konvergenz

Def. 7.77: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathbb{K} (oder in anderer Menge A , wo Addition def. ist). Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad s_n := \sum_{j=1}^n a_j, \quad (7.67)$$

heißt (unendl.) Reihe. Notation:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j := \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j := (s_n)_{n \in \mathbb{N}}. \quad (7.68)$$

a_j : Summanden, s_n : Partialsummen.

Die Reihen $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$ heißen Reste von $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Für $(a_j)_{j \in I}$ mit $\phi: \mathbb{N} \rightarrow I$ bij. def.

$$\sum_{j \in I} a_j := \sum_{j=1}^{\infty} a_{\phi(j)}. \quad (7.69)$$

Achtung: $\sum_{j \in I} a_j$ hängt von ϕ ab!

→ Reihen sind spezielle Folgen.

Def. 7.78: Reihe (s_n) aus Def. 7.77 heißt konvergent g.d.w. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{K}$.
Schreibe dann:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = s \quad (7.70)$$

und nenne s Summe der Reihe.

(s_n) divergent : \Leftrightarrow (s_n) nicht konvergent.

Auch $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \pm\infty$: \Leftrightarrow $\lim s_n = \pm\infty$.

Warnung 7.79: Notation $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ wird mit zwei verschiedenen Bedeutungen benutzt, die man aus dem Zusammenhang erkennen muss:

- (a) als Folge (z.B. in “ $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}$ konvergiert”),
 (b) als Zahl (z.B. in “ $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1$ ”).

Bsp. 7.80: (a) Geometrische Reihe: $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ für $|q| < 1$.

$$s_n = \sum_{j=0}^n q^j \stackrel{(3.22b)(\text{gilt auch für } q \in \mathbb{C})}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

$$\forall_{|q|<1} \sum_{j=0}^{\infty} q^j = \lim s_n = \lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}. \quad (7.71)$$

$\lim q^{n+1} = 0$ nach Bsp. 7.6

(b) Harmonische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty. \quad (7.72)$$

\nwarrow Bsp. 7.30

Kor. 7.81: Seien $\sum_{j=1}^{\infty} a_j, \sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent.

(a) Linearität:

$$\forall_{\lambda, \mu \in \mathbb{C}} \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda a_j + \mu b_j) = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} a_j + \mu \sum_{j=1}^{\infty} b_j. \quad (7.73)$$

(b) Konjugation:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \overline{a_j} = \overline{\sum_{j=1}^{\infty} a_j}. \quad (7.74)$$

(c) Monotonie:

$$\left(\forall_{j \in \mathbb{N}} a_j, b_j \in \mathbb{R} \wedge a_j \leq b_j \right) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} b_j. \quad (7.75)$$

(d) $\lim a_n = 0$, $\forall_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j$ konvergiert.

Mit $S := \sum_{j=1}^{\infty} a_j, r_n := \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j$ gilt:

$$\left(\forall_{n \in \mathbb{N}} S = s_n + r_n \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0. \quad (7.76)$$

Bew.: Alles folgt einfach aus den entsprechenden Grenzwertsätzen. Z.B.:

(b)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \overline{a_j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \overline{a_j} \stackrel{\text{Def. \& Bem. 5.5(a)}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\sum_{j=1}^n a_j} \stackrel{(7.11f)}{=} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j} = \overline{\sum_{j=1}^{\infty} a_j},$$

(d)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = S - S = 0, \\ \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad r_n &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^k a_j = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k - s_n) = S - s_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} r_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S - s_n) = S - S = 0. \end{aligned}$$

□

7.3.2. Konvergenzkriterien

Kor. 7.82: Für $a_j \in \mathbb{R}_0^+$, $s_n := \sum_{j=1}^n a_j$ gilt

$$\lim s_n = \begin{cases} \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} & \text{für } (s_n) \text{ beschr.}, \\ \infty & \text{für } (s_n) \text{ unbeschr.} \end{cases} \quad (7.77)$$

Bew.: Folgt aus (7.21), da (s_n) steigend ist. □

Th. 7.83: Ang., $\exists_{k \in \mathbb{N}} \quad \forall_{j \geq k} \quad |a_j| \leq |b_j|$, $(a_j, b_j \in \mathbb{C})$.

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|$ konv. $\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konv. und

$$\left| \sum_{j=k}^{\infty} a_j \right| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |b_j|. \quad (7.78)$$

(b) $\sum a_j$ divergent $\Rightarrow \sum |b_j|$ div.

Bew.: Genügt, (a) zu zeigen ((b) ist Kontraposition).

Setze $s_n := \sum_{j=1}^n a_j$, $t_n := \sum_{j=1}^n |b_j|$.

(t_n) konv. $\Rightarrow (t_n)$ ist Cauchy nach Th. 7.29, d.h.,

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{N \geq k} \forall_{n > m > N} |t_n - t_m| = |b_{m+1}| + \dots + |b_n| < \epsilon$$

d.h., für $n > m > N$:

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= |a_{m+1} + \dots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \dots + |a_n| \\ &\leq |b_{m+1}| + \dots + |b_n| < \epsilon, \end{aligned}$$

d.h., auch (s_n) ist Cauchy und somit konv.

(7.78) folgt dann aus Th. 7.13(c). □

Def. 7.84: $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ mit $a_j \in \mathbb{R}$ heißt alternierend g.d.w.

$$\forall_{j \in \mathbb{N}} \quad \text{sgn}(a_{j+1}) = -\text{sgn}(a_j) \neq 0.$$

Th. 7.85 (Leibnizkriterium): Sei $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ alternierend,
 $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ streng fallend und $\lim a_n = 0$. Dann ist
 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konv. und

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \exists_{0 < \theta_n < 1} \quad r_n := \underbrace{\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j}_{= \sum_{j=1}^{\infty} a_j - s_n = \text{“Abbruchfehler”}} = \theta_n a_{n+1} . \quad (7.79)$$

Bew. nur im Skript.

Bsp. 7.86: (a) Nach Th. 7.85 sind konvergent:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \dots, \quad (7.80a)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2j-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots, \quad (7.80b)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\ln(j+1)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - + \dots \quad (7.80c)$$

(b) im Skript zeigt, dass Th. 7.85 ohne Vor., dass $(|a_n|)$ str. fallend, i.A. falsch wird.

Def. 7.87: $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ heißt absolut konv. $:\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ konv.

Kor. 7.88: $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ abs. konv. $\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konv.
 und Δ -Ungl. gilt, d.h.,

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|. \quad (7.81)$$

Bew.: Setze $a_j = b_j$ in Th. 7.83(a). □

Th. 7.89: (a) $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ konv. $\wedge \forall_{j \in \mathbb{N}} |a_j| \leq c_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ abs. konv.

(b) Wurzelkriterium:

$$\left(\exists_{0 < q < 1} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N} \right) \right) \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ abs. konv.}, \quad (7.82a)$$

$$\# \left\{ n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \right\} = \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ div.} \quad (7.82b)$$

(c) Quotientenkriterium: Seien alle $a_n \neq 0$.

$$\left(\exists_{0 < q < 1} \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \text{ für fast alle } n \right) \right) \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ abs. konv.}, \quad (7.83a)$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \text{ für fast alle } n \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ div.} \quad (7.83b)$$

Bew.skizze: (a) ist Spezialfall von Th. 7.83(a).

(7.82a) & (7.83a) aus (a) durch Vergleich mit geometr. Reihe.

In (7.82b) und (7.83b) folgt zunächst

$\neg(\lim a_n = 0)$. □

Warnung 7.90: Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ ist

$$\forall_{n \geq 2} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1, \quad \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} < 1, \text{ d.h.,}$$

“< 1” reicht nicht in (7.82a) oder (7.83a).

Bsp. 7.91: (a) Wurzelkrit.

$$\Rightarrow \forall_{|z| < 1} \forall_{p \in \mathbb{N}_0} \sum_{n=1}^{\infty} n^p z^n \text{ abs. konv.:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p |z|^n} = |z| < 1.$$

$\nwarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$ nach Bsp. 7.65

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$. Quot.krit.

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n n!}{n^n} \text{ abs. konv. für alle } |z| < e \right.$$

$$\wedge \quad \left. \left| \right| \quad \text{div. für alle } |z| \geq e \right):$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|z| (n+1) n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{|z|}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{(7.49)} \frac{|z|}{e} \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (7.84)$$

Also $|z| < e \Rightarrow$ Konv. mit (7.83a),
 $|z| > e \Rightarrow$ Div. mit (7.83b),
 $|z| = e \Rightarrow$ Div. mit (7.83b), da
 $\forall_{n \in \mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ nach Bsp. 7.66.

7.3.3. Abs. Konv. & Umordnungen

Th. 7.92: Ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Umordnung von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (siehe Def. 7.21) und $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ abs. konv., so ist auch $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ abs. konv., und es gilt $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$.

Th. 7.93 (großer Umordnungssatz): Sei I abzählbar mit $\#I = \#\mathbb{N}$ und

$$I = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad (7.85)$$

eine disjunkte Zerlegung von I (die I_n sind völlig beliebig, dürfen also leer, endlich oder unendlich sein).

(a) Ist $\sum_{j \in I} a_j$ abs. konv., so gilt

$$\sum_{j \in I} a_j = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in I_n} a_{\alpha}. \quad (7.86)$$

(b) Es sind äquivalent:

- (i) $\sum_{j \in I} a_j$ ist abs. konv.
- (ii) Es gibt $C \geq 0$ so, dass $\sum_{j \in J} |a_j| \leq C$ für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$.
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in I_n} |a_{\alpha}| < \infty$.

Bsp. 7.94: Anwendung von Th. 7.93 auf Reihen mit $I := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (sogenannte Doppelreihen).
 Notation:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} := \sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{(m,n)}. \quad (7.87)$$

Nach Th. 3.24 ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar, und es gibt $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijektiv. Nach (7.69) ist

$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{\phi(j)}$, und das Konvergenzverhalten und (falls existent) die Summe der Reihe hängt i.A. von ϕ ab!

Ist die Reihe jedoch abs. konv., so hängt der Wert nach Th. 7.92 nicht von ϕ ab, und wir können Th. 7.93 anwenden. Die Zerlegungen

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \dot{\bigcup}_{m \in \mathbb{N}} \{(m, n) : n \in \mathbb{N}\}, \quad (7.88a)$$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} \{(m, n) : m \in \mathbb{N}\}, \quad (7.88b)$$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m + n = k\} \quad (7.88c)$$

liefern

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{(m,n)} &\stackrel{(7.88a)}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \stackrel{(7.88b)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \\ &\stackrel{(7.88c)}{=} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m+n=k} a_{mn} := \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{k-1} a_{m,k-m}. \end{aligned} \quad (7.89)$$

Th. 7.95: Sind $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ abs. konv., so lässt sich ihr Produkt als Doppelreihe berechnen:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n = \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\sum_{m=1}^{k-1} a_m b_{k-m}}_{a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_{k-1} b_1}. \end{aligned} \quad (7.90)$$

Man bezeichnet dies auch als Cauchyprodukt der Reihen.

Bew.: Setze $A := \sum_{m=1}^{\infty} |a_m|$, $B := \sum_{m=1}^{\infty} |b_m|$. Dann:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_m b_n| = \sum_{m=1}^{\infty} (|a_m| B) = AB < \infty,$$

d.h., $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n$ ist abs. konv. nach Th. 7.93(b)(iii).

Dann folgt (7.90) aus (7.89), da

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m b_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right)}. \quad \square$$

7.3.4. b -adische Darstellungen reeller Zahlen

Beispiel im Dezimalsystem:

$$\begin{aligned} x &= \frac{395}{3} = 131.\bar{6} = 131.66\dots \\ &= 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + \sum_{n=1}^{\infty} 6 \cdot 10^{-n}, \end{aligned} \quad (7.91a)$$

wobei

$$\sum_{n=1}^{\infty} 6 \cdot 10^{-n} \stackrel{(7.71)}{=} 6 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3}.$$

Im Dualsystem:

$$x = 10000011.\bar{10} = 2^7 + 2^1 + 2^0 + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(2n+1)}, \quad (7.91b)$$

wobei

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(2n+1)} = \frac{2}{3} \quad (\text{Übung}).$$

Def. 7.96: Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$.

- (a) Ist $N \in \mathbb{Z}$ und $(d_N, d_{N-1}, d_{N-2}, \dots)$ Folge in $\{0, \dots, b-1\}$, so heißt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \underbrace{d_{N-\nu}}_{\text{Ziffern}} b^{N-\nu} \quad \swarrow \text{Basis} \quad (7.92)$$

b -adische Reihe.

- (b) Ist $x \in \mathbb{R}_0^+$ die Summe der Reihe in (7.92), so heißt die Reihe b -adische Darstellung oder b -adische Entwicklung von x .

Th. 7.97: Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Jedes $x \in \mathbb{R}_0^+$ hat eine b -adische Darstellung, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \quad \exists N \in \mathbb{Z} \quad \exists \text{ Folge } (d_N, d_{N-1}, \dots) \text{ in } \{0, \dots, b-1\} \quad x = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{N-\nu} b^{N-\nu}. \quad (7.93)$$

Für $x > 0$ und $d_N \neq 0$ gibt es genau eine oder genau zwei solche Darstellungen. Genauer sind äquivalent:

- (i) Die b -adische Darstellung von x ist nicht eindeutig.
(ii) Es gibt genau zwei b -ad. Darst. von x .
(iii) Es gibt eine b -ad. Darst. von x so, dass gilt:

$$\exists_{n_0 < N} \quad \forall_{n \leq n_0} \quad d_n = 0.$$
(iv) Es gibt eine b -ad. Darst. von x so, dass gilt:

$$\exists_{n_0 \leq N} \quad \forall_{n \leq n_0} \quad d_n = b - 1.$$

Bew.: Siehe Literatur im Skript. □

Bsp. 7.98: Jedes $n \in \mathbb{N}$ hat genau 2 dezimale
(d.h. 10-adische) Darstellungen. Z.B.

$$2 = 2.\bar{0} = 1.\bar{9} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} \stackrel{(7.71)}{=} 1 + 9 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 1 + 9 \cdot \frac{1}{9}. \quad (7.94)$$

8. Konvergenz von \mathbb{K} -wertigen Funktionen

8.1. Punktweise & gleichmäßige Konvergenz

→ Ziel: Konvergenz von Folgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit
 $f_n : M \rightarrow \mathbb{K}, M \subseteq \mathbb{C}$, studieren.

→ Dabei sind verschiedene Konvergenzbegriffe
sinnvoll.

Def. 8.1: (f_n) sei Funktionenfolge, $f_n : M \rightarrow \mathbb{K}$,
 $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$.

- (a) (f_n) konvergiert punktweise (p.w.) gegen
 $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ g.d.w. $\forall_{z \in M} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$, also
g.d.w.

$$\forall_{z \in M} \quad \forall_{\epsilon \in \mathbb{R}^+} \quad \exists_{N \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n > N} \quad |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad (8.1)$$

(N hängt in (8.1) i.A. von z und ϵ ab).

- (b) (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ g.d.w.

$$\forall_{\epsilon \in \mathbb{R}^+} \quad \exists_{N \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n > N} \quad \forall_{z \in M} \quad |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad (8.2)$$

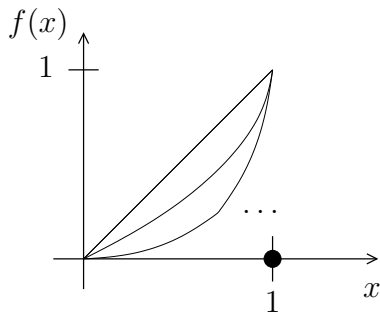
(N hängt in (8.2) nicht von z ab, aber i.A.
immernoch von $\epsilon \rightarrow$ Konv. ist glm. in z).

Bem. 8.2: Glm. Konv. \Rightarrow p.w. Konv. (klar);
p.w. Konv. $\not\Rightarrow$ glm. Konv. (Bsp. 8.3(b)).

Bsp. 8.3: (a) $f_n : M \rightarrow \mathbb{K}$, $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, $f_n(z) := \frac{1}{n}$. Dann: (f_n) konv. glm. gegen $f \equiv 0$.

(b) (f_n) mit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$, konv. p.w., aber nicht glm. gegen

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1 : \end{cases} \quad (8.3)$$



p.w.: $\lim 1^n = \lim 1 = 1$,
 $\forall_{0 \leq x < 1} \lim x^n = 0$ (Bsp. 7.6);

nicht glm.: Für $\epsilon = \frac{1}{2}$ gilt nach Th. 7.57,

$\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{\xi_n \in]0,1[} f_n(\xi_n) = \xi_n^n = \frac{1}{2}$, also

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} |f_n(\xi_n) - f(\xi_n)| = \xi_n^n = \frac{1}{2} = \epsilon. \quad (8.4)$$

Th. 8.4: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : M \rightarrow \mathbb{K}$.

Sind alle f_n stetig in $\zeta \in M$ und

(f_n) konv. glm. gegen $f : M \rightarrow \mathbb{K}$, so ist f st. in ζ

(speziell: sind alle f_n st. auf M , so auch f).

Bew.: Sei $\epsilon > 0$.

$$f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f \Rightarrow \exists_{m \in \mathbb{N}} \forall_{z \in M} |f_m(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (8.5)$$

$$f_m \text{ st. in } \zeta \Rightarrow \exists_{\delta > 0} \forall_{z \in M \cap B_\delta(\zeta)} |f_m(z) - f_m(\zeta)| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (8.6)$$

Also

$$\forall_{z \in M \cap B_\delta(\zeta)} |f(z) - f(\zeta)| \leq |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_m(\zeta)| + |f_m(\zeta) - f(\zeta)| < 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \quad (8.7)$$

also f st. in ζ . □

8.2. Potenzreihen

Def. 8.5: (a) Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, (f_n) Fkt.folge, $f_n : M \rightarrow \mathbb{K}$.

Def. die Fkt.reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j := (s_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (8.8)$$

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad s_n := \sum_{j=1}^n f_j.$$

(b) Ist $f_n : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f_n(z) = a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{K}$, so heißt

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j := \sum_{j=0}^{\infty} f_j \quad (8.9)$$

Potenzreihe mit Koeffizienten a_j .

Warnung: In (8.9) schreibt man links $a_j z^j = f_j(z)$, obwohl man eigentlich f_j meint. Bei Potenzreihen muss man oft aus dem Zhg erschließen, ob Zahlen oder Funktionen gemeint sind.

Def. 8.6: Seien f_j, s_n wie in Def. 8.5(a).

(a) Schreibe

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \quad (8.10)$$

g.d.w. (s_n) p.w. gegen $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ konv.

$\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ heißt dann Reihenentwicklung von f ;

Potenzreihenentw., wenn $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ Potenzreihe ist.

Achtung: $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ kann Fkt. oder Fkt.folge bedeuten (vgl. Warnung 7.79).

(b) $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ konv. glm. gegen f g.d.w. (s_n) glm. gegen f konv. gemäß Def. 8.1(b).

Kor. 8.7: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, $f_j : M \rightarrow \mathbb{K}$.

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ konv. glm. gegen f g.d.w. alle $\sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(z)$ konv. gegen $r_n(z) \in \mathbb{K}$ und

$$\forall_{\epsilon \in \mathbb{R}^+} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N} \forall_{z \in M} |r_n(z)| < \epsilon. \quad (8.11)$$

(b) Sind $a_j \in \mathbb{R}_0^+$, $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konv. in \mathbb{R} und

$$\forall_{z \in M} \forall_{j \in \mathbb{N}} |f_j(z)| \leq a_j, \quad (8.12)$$

so konv. $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ glm.

(c) Sind alle f_j stetig (in $\zeta \in M$) und $\sum_{j=1}^{\infty} f_j \xrightarrow{\text{glm.}} f$,
so ist auch f st. (in ζ).

Bem. 8.8: Problem für $f_j : M \rightarrow \mathbb{K}$: Für welche $z \in M$
konv. $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$? Oft schwer zu lösen. Bei
Potenzreihen hilft Th. 8.9:

Th. 8.9: Für jede Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ gibt es
 $r \in [0, \infty] := \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, genannt Konvergenzradius (KR) der Reihe so,
dass

$$\left(z \in \mathbb{K} \wedge |z| < r \right) \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \text{ konv. abs. in } \mathbb{K}, \quad (8.13a)$$

$$\left(z \in \mathbb{K} \wedge |z| > r \right) \Rightarrow \quad || \quad \text{divergiert in } \mathbb{K}. \quad (8.13b)$$

Insbesondere: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ konv. p.w. auf $B_r(0)$.

Weiter

$$\forall_{0 < r_0 < r} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \text{ konv. glm. auf } \overline{B}_{r_0}(0) \right). \quad (8.14)$$

Es gilt

$$r = \frac{1}{L}, \quad \text{mit} \quad L := \underbrace{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{:= \begin{cases} \text{größter HP, falls } (\sqrt[n]{|a_n|}) \text{ beschr.}, \\ \infty \text{ sonst} \end{cases}}. \quad (8.15)$$

(hier: $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$).

Einfacher gilt

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}_{\text{falls alle } a_n \neq 0 \text{ und } || \text{ ex. in } \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}}. \quad (8.16)$$

falls alle $a_n \neq 0$ und $||$ ex. in $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$.

Bew. idee: Wurzelkriterium aus Th. 7.89(b) anwenden,
bzw. Quot.krit aus Th. 7.89(c) für (8.16). □

Kor. 8.10: Hat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ KR $r > 0$, so ist

$$f : B_r(0) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad f(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \quad (8.17)$$

stetig (stetig auf \mathbb{K} für $r = \infty$).

Bew.: Folgt aus (8.14) und Th. 8.4. □

Bsp. 8.11: (a) $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}}$ KR für $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n$ ist $r = 1$, da

$$\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\alpha}} = 1 \quad (8.18)$$

(folgt für $\alpha \in \mathbb{Z}$ aus (7.46) & Th. 7.13(a) und dann für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ aus Th. 7.16).

$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ (Fall $\alpha = 0$) div. für $|z| = 1$ ($|z^n| \not\rightarrow 0$),
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ (Fall $\alpha = -1$) div. für $z = 1$ (harm. Reihe), konv. für $z = -1$ (Bsp. 7.86(a)).

(b) KR von (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ und (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ ist $r = \infty$:

$$(a): \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty, \quad (8.19a)$$

$$(b): \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \quad (8.19b)$$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ hat KR $r = 0$, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0. \quad (8.20)$$

Warnung 8.12: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ konv. i.A. nicht glm. auf $B_r(0)$ (r : KR)

(z.B. konv. $\sum z^j$ nicht glm. auf $B_1(0)$, Übung).

Für $|z| = r$ kann $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ div. oder konv.

(siehe Bsp. 8.11(a)).

Def. & Bem. 8.13: Das Cauchyprodukt von $p := \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$

und $q := \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$ ist

$$p * q := \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, \quad \text{mit} \quad \forall_{j \in \mathbb{N}_0} c_j := \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k} = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + \cdots + a_j b_0.$$

\curvearrowright heißt auch Faltung von p und q (8.21)

Achtung: $p * q$ ist Funktionenfolge und muss nicht konvergieren. Aber:

Wenn r_p : KR von p , r_q KR von q und $r_p, r_q > 0$, so sind

$$\begin{aligned} f : B_r(0) &\longrightarrow \mathbb{K}, & f(z) &:= \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \\ g : B_r(0) &\longrightarrow \mathbb{K}, & g(z) &:= \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j, \end{aligned} \tag{8.22}$$

wohldef. für $r := \min\{r_p, r_q\}$ und

$$(7.90) \quad \Rightarrow \quad \forall_{z \in B_r(0)} \quad f(z)g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \quad \text{mit } c_j \text{ aus (8.21)}. \tag{8.23}$$

8.3. Exponentialfunktionen

→ können exp jetzt auf ganz \mathbb{C} fortsetzen:

Def. & Bem. 8.14: Def. die Exponentialfkt. durch

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \tag{8.24}$$

→ nach Bsp. 8.11(b) ist KR = ∞ .

Wir benutzen nun zunächst diese neue Def. von exp,

sowie die neuen Def. $e := \exp(1) > 1 > 0$

und $\ln x := \log_{\exp(1)}(x)$ für $x \in \mathbb{R}^+$.

Wir werden zeigen, dass die neuen Def. mit den alten übereinstimmen, nämlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \tag{8.25}$$

und

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \tag{8.26}$$

(siehe (8.36) und Th. 8.16(c) unten).

Prop. 8.15: Ist $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gilt

$$a := E(1) > 0 \quad \text{und} \quad (8.27a)$$

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} E(x+y) = E(x)E(y), \quad (8.27b)$$

so folgt

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} E(x) = a^x. \quad (8.28)$$

Bew.: $a = E(1) = E(0+1) = E(0)E(1) = E(0)a \stackrel{a>0}{\Rightarrow} E(0) = 1.$

$$\begin{aligned} \forall_{x \in \mathbb{R}} 1 = E(0) = E(x-x) = E(x)E(-x) &\Rightarrow E(-x) = E(x)^{-1} \\ &\Rightarrow E(x) \neq 0. \end{aligned}$$

$$E(1) > 0 \wedge \text{Th. 7.57} \Rightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} E(x) > 0.$$

Induktion liefert

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} E(n \cdot x) = (E(x))^n. \quad (8.29)$$

$$x = 1 \Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} E(n) = a^n.$$

$$x = \frac{1}{n} \Rightarrow a = E(1) = (E(\frac{1}{n}))^n \Rightarrow E(\frac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \forall_{n,k \in \mathbb{N}} E(k/n) \stackrel{(8.29)}{=} (E(1/n))^k = (a^{\frac{1}{n}})^k = a^{\frac{k}{n}},$$

d.h., (8.28) gilt für $x \in \mathbb{Q}^+$.

$$\forall_{x \in \mathbb{R}^+} \lim_{\substack{q_n = x \\ q_n \in \mathbb{Q}^+}} q_n \Rightarrow a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} E(q_n) = E(x). \quad \swarrow E \text{ stetig}$$

$$\forall_{x \in \mathbb{R}^-} a^x = (a^{-x})^{-1} = (E(-x))^{-1} = E(x).$$

□

Th. 8.16: Mit exp aus (8.24) gilt:

(a) exp ist stetig auf \mathbb{C} .

(b) $\forall_{z,w \in \mathbb{C}} \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w).$

(c) Mit $e := \exp(1)$ gilt

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Bew.: (a) gilt nach Kor. 8.10.

(b): Nach (7.90) gilt:

$$\forall_{z,w \in \mathbb{C}} \left(\begin{array}{l} \exp(z) \exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \\ \text{mit } c_n = \sum_{j=0}^n \frac{z^j w^{n-j}}{j! (n-j)!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j w^{n-j} \stackrel{(5.23)}{=} \frac{(z+w)^n}{n!} \end{array} \right). \quad (8.30)$$

(c) folgt aus (a), (b) und Prop. 8.15. \square

Def. 8.17: Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und ζ sei Häufungspunkt von M .

$f : M \rightarrow \mathbb{K}$ hat Limes $\eta \in \mathbb{K}$ für $z \rightarrow \zeta$

(Notation: $\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z) = \eta$)

g.d.w.

$$\forall_{\text{Folge } (z_k) \text{ in } M \setminus \{\zeta\}} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \zeta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = \eta \right). \quad (8.31)$$

$\rightarrow f$ braucht in ζ nicht definiert sein!

Th. 8.18: Mit $e^z := \exp(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ und $\ln x := \log_{\exp(1)}(x)$

für $x \in \mathbb{R}^+$ gelten:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1 \quad (z \in M := \mathbb{C} \setminus \{0\}), \quad (8.32)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (x \in M :=]-1, \infty[\setminus \{0\}), \quad (8.33)$$

$$\forall_{\xi \in \mathbb{R}} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \xi x)^{\frac{1}{x}} = \xi \quad (x \in M := \{x \in \mathbb{R} : 1 + \xi x > 0\} \setminus \{0\}), \quad (8.34)$$

$$\forall_{\xi \in \mathbb{R}} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \xi x)^{\frac{1}{x}} = e^{\xi} \quad (x \in M := \{x \in \mathbb{R} : 1 + \xi x > 0\} \setminus \{0\}), \quad (8.35)$$

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (8.36)$$

Bew.: (8.32):

$$(8.24) \Rightarrow \forall_{z \neq 0} \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots$$

\Rightarrow (8.32), da $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$ stetig nach Kor. 8.10.

(8.33): Betrachte $f :]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \ln(x+1)$ mit $f^{-1}(x) = e^x - 1$. Dann:

$$\begin{aligned} \forall_{(x_k) \text{ in }]-1, \infty[\setminus\{0\}} \quad \lim x_k = 0 &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x_k)}{x_k} = \lim \frac{\ln(1+f^{-1}(f(x_k)))}{f^{-1}(f(x_k))} \\ &= \lim \frac{\ln(1+e^{f(x_k)}-1)}{e^{f(x_k)}-1} = \lim \frac{f(x_k)}{e^{f(x_k)}-1} \stackrel{(8.32)}{=} 1. \\ &\qquad \qquad \qquad \lim f(x_k) = \ln 1 = 0 \nearrow \end{aligned}$$

(8.34), (8.35): Übung.

(8.36): $x_n := \frac{1}{n}$ in (8.35) liefert:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x. \quad \square$$

Def. 8.19 (komplexe Exponenten): Für $a \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{C}$ setze

$$a^z := \exp(z \ln a). \quad (8.37)$$

Th. 8.20: (a)

$$\underbrace{\forall_{a,b>0} \quad \forall_{z,w \in \mathbb{C}}}_{\parallel} \quad a^{z+w} = a^z a^w, \quad (8.38a)$$

$$\parallel \quad a^z b^z = (ab)^z. \quad (8.38b)$$

(b)

$$\forall_{a>0} \quad f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := a^z, \quad \text{stetig}, \quad (8.39a)$$

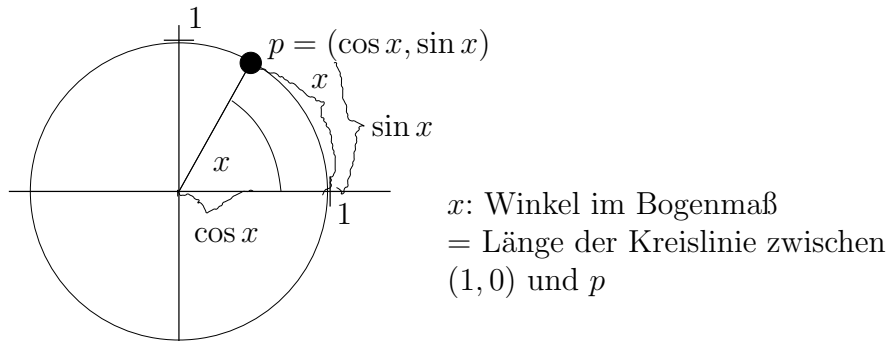
$$\forall_{\zeta \in \mathbb{C}} \quad g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(x) := x^\zeta, \quad \text{stetig}. \quad (8.39b)$$

(c)

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (8.40)$$

8.4. Trigonometrische Funktionen

“Schuldefinition” von sin und cos am Einheitskreis:



Def. ist nicht mathematisch rigoros – und wie soll man z.B. $\sin 1$ berechnen?

Def. & Bem. 8.21:

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots, \quad (8.41a)$$

$$\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots \quad (8.41b)$$

- (a) In beiden Fällen gilt $|a_n| \leq \frac{|z|^n}{n!}$, also
 $\forall_{z \in \mathbb{C}} |\sin z|, |\cos z| \leq e^{|z|} < \infty$, d.h. beide
 Reihen sind abs. konv., die Potenzreihen haben
 KR = ∞ . Kor. 8.10 \Rightarrow \sin, \cos stetig.
- (b) Def. $\pi := 2 \min\{x \in \mathbb{R}^+ : \cos x = 0\}$.
 Zu zeigen: Das Min. existiert. Dazu:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}^+} \forall_{k \in \mathbb{N}} \left(\underbrace{\frac{x^k}{k!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}} \Leftrightarrow 1 > \frac{x}{k+1} \Leftrightarrow k+1 > x \right).$$

gilt also für alle $k \geq 2, 0 < x < 3$,

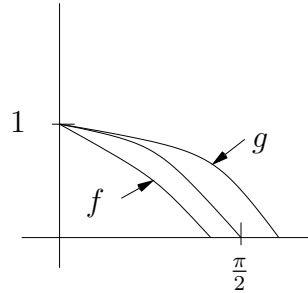
und $\frac{x^k}{k!} \rightarrow 0$ monoton für $k \rightarrow \infty$.

Aus Th. 7.85 und (7.79) folgt dann

$$\forall_{0 < x < 3} \left(\begin{array}{l} f(x) := 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} =: g(x), \\ x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}. \end{array} \right) \quad (8.42)$$

f hat kl. pos. Nullst. $\sqrt{2}$;

g hat kl. pos. Nullst. $\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$; $f(0) = g(0) = 1$.



Zwischenwertsatz \Rightarrow Min. ex. und

$$1.4 < \sqrt{2} < \frac{\pi}{2} < \sqrt{6 - 2\sqrt{3}} < 1.6 \quad (8.43)$$

Man kann zeigen, dass
 $\pi \notin \mathbb{Q}$, $\pi = 3.14159\dots$ (Literatur im Skript).

Th. 8.22 (Trigonometr. Identitäten):

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad (8.44a)$$

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad \sin z = -\sin(-z), \quad \cos z = \cos(-z), \quad (8.44b)$$

$$\forall_{z, w \in \mathbb{C}} \quad \sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \quad (8.44c)$$

$$\forall_{z, w \in \mathbb{C}} \quad \cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \quad (8.44d)$$

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad (\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1, \quad (8.44e)$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \forall_{x \in [0, \frac{\pi}{2}[} \quad \cos x > 0, \quad (8.44f)$$

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \quad \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z, \quad (8.44g)$$

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad \sin(z + \pi) = -\sin z, \quad \cos(z + \pi) = -\cos z, \quad (8.44h)$$

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z \quad (8.44i)$$

(d.h., \sin, \cos sind 2π -periodisch),

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - 1}{z^2} = -\frac{1}{2}. \quad (8.44j)$$

Bew. (exemplarisch): (a),(b) direkt aus (8.41).

(c),(d): Mit Cauchyprodukt (7.90) ähnlich wie in (8.30).

(e):

$$\begin{aligned} (\sin z)^2 + (\cos z)^2 &\stackrel{(8.44b)}{=} \cos z \cos(-z) - \sin z \sin(-z) \\ &\stackrel{(8.44d)}{=} \cos(z - z) = \cos 0 = 1. \end{aligned}$$

(j):

$$\forall_{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \frac{\sin z}{z} = 1 - \underbrace{\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - + \dots}_{=: f(z)}$$

Wie in Def. & Bem. 8.21 folgt KR $r = \infty$
und Stetigkeit auf \mathbb{C} . Also

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = f(0) = 1. \quad \square$$

Th. 8.23: $\sin(\mathbb{R}) = \cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Monotonie:

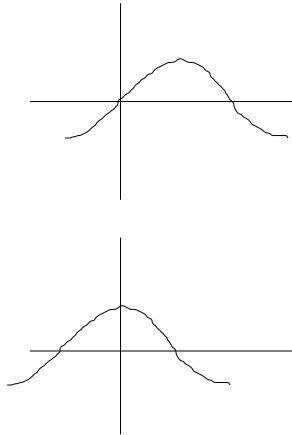
$$\forall_{k \in \mathbb{Z}} \sin \text{ ist str. steigend auf } \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right], \quad (8.45a)$$

$$\parallel \sin \text{ ist str. fallend auf } \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right], \quad (8.45b)$$

$$\parallel \cos \text{ ist str. steigend auf } [(2k-1)\pi, 2k\pi], \quad (8.45c)$$

$$\parallel \cos \text{ ist str. fallend auf } [2k\pi, (2k+1)\pi], \quad (8.45d)$$

d.h., für $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi]$ durchläuft
($\cos x, \sin x$) den Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn.



Bew. für \cos : $\sin^2 + \cos^2 = 1 \Rightarrow \cos(\mathbb{R}) \subseteq [-1, 1]$.

Zwischenwertsatz $\Rightarrow [-1, 1] \subseteq \cos(\mathbb{R})$.

$$\forall_{0 \leq x < x+y \leq \frac{\pi}{2}} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \stackrel{(*)}{\leq} \cos x \cos y \stackrel{(**)}{<} \cos x.$$

$$(*): (8.42) \Rightarrow 0 < x - \frac{x^3}{6} < \sin x \quad \text{für } x \in]0, \frac{\pi}{2}];$$

$$(**): (8.42) \Rightarrow \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} < 1 \quad \parallel \quad .$$

Dann (8.44)(b,g-i) \Rightarrow Monotonie auf anderen Intervallen. \square

Th. 8.24:

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (\text{Eulerformel}), \quad (8.46a)$$

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (8.46b)$$

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (8.46c)$$

Bew.: (a) direkt aus Potenzreihendef.

$$(b): e^{iz} + e^{-iz} \stackrel{(8.46a)}{=} \cos z + i \sin z + \cos(-z) + i \sin(-z) = 2 \cos z.$$

$$(c): e^{iz} - e^{-iz} \stackrel{(8.46a)}{=} \cos z + i \sin z - \cos(-z) - i \sin(-z) = 2i \sin z. \quad \square$$

Th. 8.25:

$$\exp^{-1}\{1\} = \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}, \quad (8.47a)$$

↖ alle Lösungen von $e^z = 1$

$$\exp^{-1}\{0\} = \emptyset \quad (\text{exp hat keine Nullstellen}), \quad (8.47b)$$

$$\sin^{-1}\{0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad (8.47c)$$

$$\cos^{-1}\{0\} = \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \quad (8.47d)$$

((8.47c) und (8.47d) liefern alle Nullst. von \cos, \sin in \mathbb{R} und \mathbb{C}).

Def. & Bem. 8.26: Def.

$$\tan : \mathbb{C} \setminus \cos^{-1}\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad (8.48a)$$

$$\cot : \mathbb{C} \setminus \sin^{-1}\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}, \quad (8.48b)$$

\tan, \cot sind π -periodisch:

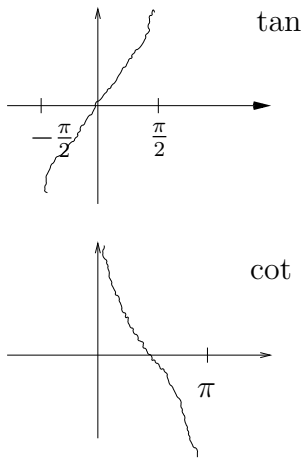
$$\tan(z + \pi) = \frac{\sin(z + \pi)}{\cos(z + \pi)} \stackrel{(8.44h)}{=} \frac{-\sin z}{-\cos z} = \tan z \quad (8.49)$$

(cot analog).

Auch folgt $\tan(\mathbb{R} \setminus \cos^{-1}\{0\}) = \cot(\mathbb{R} \setminus \sin^{-1}\{0\}) = \mathbb{R}$,

$$\forall_{k \in \mathbb{Z}} \tan \text{ str. steigend auf } \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[, \quad (8.50a)$$

$$\forall_{k \in \mathbb{Z}} \cot \text{ str. fallend auf } \left] k\pi, (k+1)\pi \right[. \quad (8.50b)$$



Def. & Bem. 8.27: Die strenge Monotonie von \sin , \cos , \tan , \cot liefert Umkehrfkt.

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2], \quad (8.51a)$$

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi], \quad (8.51b)$$

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[, \quad (8.51c)$$

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[, \quad (8.51d)$$

nach Th. 7.60 alle stetig,
 \arcsin, \arctan : str. steigend,
 $\arccos, \operatorname{arccot}$: str. fallend.

Achtung: In der Literatur werden mit \arcsin, \dots auch Umkehrfkt. von \sin, \dots auf anderen Monotonieintervallen von \sin, \dots bezeichnet, und unsere Fkt. aus (8.51) als Hauptwerte.

8.5. Polarkoordinaten komplexer Zahlen, Fundamentalsatz der Algebra

Th. 8.28:

$$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad \exists_{\substack{r \in \mathbb{R}_0^+, \\ \varphi \in \mathbb{R}}} \quad z = r e^{i\varphi}. \quad (8.52)$$

Dabei ist $r = |z|$ und φ ist für $z \neq 0$ bis auf Addition eines Vielfachen von 2π bestimmt, d.h.

$$\forall_{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \quad \left(z = r e^{i\varphi_1} = r e^{i\varphi_2} \wedge r \geq 0 \quad \Rightarrow \quad r = |z| \wedge \exists_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k \right). \quad (8.53)$$

Bew.: $z = 0$: ✓

Sei $z \neq 0$, $z = x + iy$. Setze $r := |z|$.

Fall $y \geq 0$. Dann:

$$\frac{z}{r} = \xi + i\eta \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{x}{r}, \quad \eta = \frac{y}{r} \geq 0, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1. \quad (8.54)$$

Also $\xi \in [-1, 1]$ und $\varphi := \arccos \xi \in [0, \pi]$.

Also $\xi = \cos \varphi$, $\sin \varphi \geq 0$ und

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - (\cos \varphi)^2} = \sqrt{1 - \xi^2} \stackrel{(8.54)}{=} \eta.$$

Also

$$\frac{z}{r} = \xi + i\eta = \cos \varphi + i \sin \varphi \stackrel{(8.46a)}{=} e^{i\varphi}.$$

Fall $y \leq 0$: Wende obigen Fall auf $\bar{z} = x - iy$ an.

Gilt $r e^{i\varphi_1} = r e^{i\varphi_2}$, $r > 0$, so folgt

$$e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = 1 \stackrel{(8.47a)}{\Rightarrow} i(\varphi_1 - \varphi_2) \in \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}. \quad \square$$

Def. & Bem. 8.29: Gilt $z = r e^{i\varphi}$, so heißen

(r, φ) Polarkoordinaten von $z \in \mathbb{C}$;

(x, y) für $z = x + iy$ kartesische Koordinaten.

(r, φ) eindeutig, falls $z \neq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$.

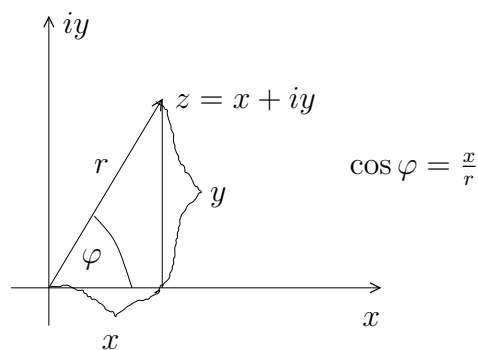
r : Betrag, φ : Argument.

In kompl. Ebene:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

(Beträge mult., Argumente add.)



Kor. 8.30: Die Abb.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad f(\varphi) := e^{i\varphi}, \quad (8.55)$$

ist surjektiv und $f(\varphi_1) = f(\varphi_2) \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k$. □

Kor. 8.31 (Einheitswurzeln): Gleichung $z^n = 1$ hat genau die n verschiedenen Lösungen $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\forall_{k=1, \dots, n} \quad \zeta_k := e^{k2\pi i/n} \stackrel{(8.46a)}{=} \cos \frac{k2\pi}{n} + i \sin \frac{k2\pi}{n} = \zeta_1^k. \quad (8.56)$$

\nwarrow heißen die n . Einheitswurzeln

Bew.: Nach Kor. 8.30 sind alle ζ_k versch. und nach Th. 6.6(a) müssen dies dann alle Lösungen von $z^n = 1$ sein. □

Th. 8.32 (Fundamentalsatz der Algebra): Jedes Polynom $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $P(z) := \sum_{j=0}^n a_j z^j$ von Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullst. $z_0 \in \mathbb{C}$.

Bew. idee: Betrachte Fall $a_n = 1$.
 Zeige, dass es $z_0 \in \mathbb{C}$ so gibt, dass $|P|$ in z_0 minimal ist.
 Zeige, dass $|P|$ an Stellen $z \in \mathbb{C}$ mit $P(z) \neq 0$ nicht minimal ist. □

Kor. 8.33:

$$\forall_{\substack{P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \\ P \text{ Pol., } \deg(P) = n \geq 1}} \quad \exists_{c, \zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C}} \quad P(z) = c(z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \cdots (z - \zeta_n) \quad (8.57)$$

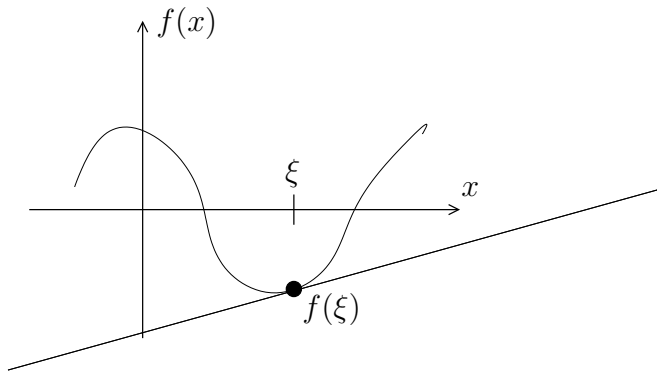
(die ζ_k sind genau die Nullst. von P ;
 sie müssen nicht verschieden sein).

Bew.: Kombiniere Th. 8.32 mit Bem. 6.7. □

9. Differentialrechnung

9.1. Def. der Ableitung und Regeln

Idee: Fkt. f lokal durch (affin) lineare Fkt. approximieren, den Graph von f in ξ durch die Tangente in ξ : $f'(\xi)$: Steigung der Tangente.



Def. 9.1: Sei $a < b$, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ ($a = -\infty$, $b = \infty$ erlaubt), $\xi \in]a, b[$.
 f heißt differenzierbar in ξ g.d.w. folgender Limes im Sinn von Def. 8.17 existiert:

$$f'(\xi) := \partial_x f(\xi) := \frac{df(\xi)}{dx} := \lim_{x \rightarrow \xi} \overbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}^{\text{Differenzenquotient}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}. \quad (9.1)$$

da $\lim x_k = \xi \Leftrightarrow \lim \underbrace{h_k}_{:= \xi - x_k} = 0$

$f'(\xi) \in \mathbb{K}$ heißt dann Ableitung oder Differentialquotient von f in ξ .
 f heißt dif.bar g.d.w.
 $f'(\xi)$ ex. für alle $\xi \in]a, b[$. Dann heißt die Fkt

$$f' :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto f'(x), \quad (9.2)$$

die Ableitung von f .

Bem. 9.2: Sei $\xi \in]a, b[$, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$. Dann:
 f dif.bar in $\xi \Leftrightarrow \text{Re } f, \text{Im } f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dif.bar in ξ .
 Dann gilt:

$$f'(\xi) = (\text{Re } f)'(\xi) + i (\text{Im } f)'(\xi). \quad (9.3)$$

Bew.:

$$\forall_{x \neq \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \frac{\text{Re } f(x) - \text{Re } f(\xi)}{x - \xi} + i \frac{\text{Im } f(x) - \text{Im } f(\xi)}{x - \xi}. \quad (9.4)$$

$\searrow \zeta \stackrel{(7.2)}{\Leftrightarrow} \quad \downarrow \text{Re } \zeta \quad \wedge \quad \downarrow \text{Im } \zeta \quad \square$

Def. 9.3: Ist $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dif.bar in ξ gemäß Def. 9.1, so heißt der Graph von

$$L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x) := f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi), \quad (9.5)$$

also die Gerade durch $(\xi, f(\xi))$ mit Steigung $f'(\xi)$,
die Tangente an den Graph von f in ξ .

Th. 9.4: Ist $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ dif.bar in ξ , so ist f stetig in ξ .

Bew.: Ist (x_k) Folge in $]a, b[\setminus\{\xi\}$ mit $\lim x_k = \xi$, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_k) - f(\xi)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(x_k - \xi)(f(x_k) - f(\xi))}{x_k - \xi} = 0 \cdot f'(\xi) = 0, \quad (9.6)$$

d.h., f st. in ξ . □

Bsp. 9.5: (a) Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(x) := ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{K}$ gilt
 $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, $f'(x) = a$:

$$\begin{aligned} \lim h_k = 0 \quad (\text{alle } h_k \neq 0) \\ \Rightarrow \lim \frac{f(x + h_k) - f(x)}{h_k} &= \lim \frac{a(x + h_k) + b - ax - b}{h_k} = \lim \frac{a h_k}{h_k} = a. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Speziell: $f \equiv b \Rightarrow f' \equiv 0$.

(b) Sei $c \in \mathbb{K}$. Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(x) := e^{cx}$ gilt
 $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, $f'(x) = c e^{cx}$:

Fall $c = 0$: Siehe (a). Fall $c \neq 0$:

$$\begin{aligned} \lim h_k = 0 \quad (\text{alle } h_k \neq 0) \\ \Rightarrow \lim \frac{f(x + h_k) - f(x)}{h_k} &= \lim \frac{e^{cx+ch_k} - e^{cx}}{h_k} \\ &= c e^{cx} \lim \underbrace{\frac{e^{ch_k} - 1}{ch_k}}_{= 1 \text{ nach (8.32)}} = c e^{cx}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

$c = 1$: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$;

$c = \ln a$, $a \in \mathbb{R}^+$: $f(x) = a^x = e^{x \ln a} \Rightarrow f'(x) = (\ln a) a^x$.

(c) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$
 $\Rightarrow f', g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = -\sin x$:

$$\begin{aligned} \lim h_k = 0 \quad (\text{alle } h_k \neq 0) \\ \Rightarrow \lim \frac{f(x + h_k) - f(x)}{h_k} &= \lim \frac{\sin(x + h_k) - \sin x}{h_k} \\ &\stackrel{(8.44c)}{=} \lim \frac{\sin x \cos h_k + \cos x \sin h_k - \sin x}{h_k} \\ &= \sin x \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h_k(\cos h_k - 1)}{h_k^2} + \cos x \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin h_k}{h_k} \\ &\stackrel{(8.44j)}{=} (\sin x) \cdot 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (\cos x) \cdot 1 = \cos x. \end{aligned} \quad (9.9)$$

$g'(x) = -\sin x$: Übung.

(d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$, ist nicht dif.bar in $\xi = 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0 + \frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n}} = \lim 1 = 1, \quad (9.10a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0 - \frac{1}{n}) - f(0)}{-\frac{1}{n}} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1, \quad (9.10b)$$

d.h., $\lim \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ ex. nicht.

Th. 9.6: Seien $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ dif.bar in $\xi \in]a, b[$.

(a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ λf dif.bar in ξ und $(\lambda f)'(\xi) = \lambda f'(\xi)$.

(b) $f + g$ dif.bar in ξ und $(f + g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi)$.

(c) Produktregel: fg dif.bar in ξ und $(fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi)$.

(d) Quotientenregel: $g(\xi) \neq 0 \Rightarrow f/g$ dif.bar in ξ und

$$(f/g)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}.$$

Bew. von (c),(d): Sei $\lim h_k = 0$, alle $h_k \neq 0$.

(c):

$$\begin{aligned} & \lim \frac{(fg)(\xi + h_k) - (fg)(\xi)}{h_k} \\ &= \lim \frac{f(\xi + h_k)g(\xi + h_k) - f(\xi)g(\xi + h_k) + f(\xi)g(\xi + h_k) - f(\xi)g(\xi)}{h_k} \\ &= \lim g(\xi + h_k) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(\xi + h_k) - f(\xi)}{h_k} + f(\xi) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(\xi + h_k) - g(\xi)}{h_k} \\ &= f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi). \\ & \quad \swarrow g \text{ st. in } \xi \end{aligned}$$

(d): Fall $f \equiv 1$:

$$\lim \frac{(1/g)(\xi + h_k) - (1/g)(\xi)}{h_k} = \lim \frac{g(\xi) - g(\xi + h_k)}{g(\xi + h_k)g(\xi)h_k} \stackrel{\swarrow g \text{ st. in } \xi}{=} -\frac{g'(\xi)}{(g(\xi))^2}.$$

Allg. Fall folgt mit $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ aus (c). □

Bsp. 9.7: (a)

$$\begin{aligned}
 P : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{K}, & P(x) &= \sum_{j=0}^n a_j x^j, & a_j &\in \mathbb{K} \\
 \Rightarrow P' : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{K}, & P'(x) &= \sum_{j=1}^n j a_j x^{j-1} :
 \end{aligned} \tag{9.11}$$

Bew. mit Induktion über n : Fall $n = 0, 1$ gilt nach Bsp. 9.5(a).

Ind.schritt: $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j + a_{n+1} x x^n$

$$\stackrel{\text{Ind.vor., Th. 9.6}}{\Rightarrow} P'(x) = \sum_{j=1}^n j a_j x^{j-1} + a_{n+1} \underbrace{(1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1})}_{(n+1)x^n} = \sum_{j=1}^{n+1} j a_j x^{j-1}.$$

(b) Ableitung von rationalen Fkt P/Q berechnet man mit (9.11) und Quot.regel Th. 9.6(d).

(c)

$$\tan' : \mathbb{R} \setminus \cos^{-1}\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tan' x = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2, \tag{9.12a}$$

$$\cot' : \mathbb{R} \setminus \sin^{-1}\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \cot' x = -\frac{1}{(\sin x)^2} = -(1 + (\cot x)^2) : \tag{9.12b}$$

Bsp. 9.5(c) & Th. 9.6(d):

$$\tan' x = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{(\cos x)^2} \stackrel{(8.44e)}{=} \frac{1}{(\cos x)^2} \stackrel{(8.44e)}{=} 1 + (\tan x)^2.$$

\cot' analog.

Th. 9.8 (Abl. der Umkehrfkt): Sei $I :=]a, b[$,

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dif.bar und str. steigend (bzw. str. fallend),

$J := f(I)$. Dann ex. $f^{-1} : J \longrightarrow I$ st. und str. steigend

(bzw. str. fallend) und

$$\forall_{\xi \in I} \left(f'(\xi) \neq 0 \Rightarrow f^{-1} \text{ dif.bar in } \eta := f(\xi) \text{ und } (f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))} \right). \tag{9.13}$$

Bew.: Wegen Th. 9.4 & Th. 7.60 ist nur noch

(9.13) zu zeigen. Sei (y_k) Folge in $J \setminus \{\eta\}$ mit

$\lim y_k = \eta$. Dann ist $(f^{-1}(y_k))$ Folge in $I \setminus \{\xi\}$ mit $\lim f^{-1}(y_k) = f^{-1}(\eta) = \xi$, da f^{-1} stetig. Also

$$(f^{-1})'(\eta) = \lim \frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(\eta)}{y_k - \eta} = \lim \frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(\eta)}{f(f^{-1}(y_k)) - f(f^{-1}(\eta))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}. \quad (9.14)$$

□

Bsp. 9.9: (a) Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^x$ ist $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \ln x$.
 $f'(x) = e^x \neq 0$, also

$$\forall_{x \in \mathbb{R}^+} \ln' x = \frac{1}{f'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

(b) Für $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow]-1, 1[$, $f(x) = \sin x$ ist
 $f'(x) = \cos x \neq 0$, $f^{-1} :]-1, 1[\rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
 $f^{-1}(x) = \arcsin x$, also

$$\forall_{x \in]-1, 1[} \arcsin' x = \frac{1}{f'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos \arcsin x} \\ \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

(*), da $\cos^2 = 1 - \sin^2$ und $\cos t > 0$ für $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(c)

$$\forall_{x \in]-1, 1[} \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{folgt analog zu (b).}$$

(d) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$ (Übung).

(e) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \operatorname{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2}$ (Übung).

Th. 9.10 (Kettenregel): $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $g :]c, d[\rightarrow \mathbb{K}$, $f(]a, b[) \subseteq]c, d[$
 $(a, c = -\infty$ sowie $b, d = \infty$ ist erlaubt).
 f dif.bar in $\xi \in]a, b[\wedge g$ dif.bar in $f(\xi) \in]c, d[$
 $\Rightarrow g \circ f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ dif.bar in ξ und

$$(g \circ f)'(\xi) = f'(\xi)g'(f(\xi)). \quad (9.15)$$

Bew.: Def. $\eta := f(\xi)$ und

$$\tilde{g} :]c, d[\rightarrow \mathbb{K}, \quad \tilde{g}(x) := \begin{cases} \frac{g(x) - g(\eta)}{x - \eta} & \text{für } x \neq \eta, \\ g'(x) & \text{für } x = \eta. \end{cases} \quad (9.16)$$

Dann:

$$\forall_{x \in]c, d[} g(x) - g(\eta) = \tilde{g}(x)(x - \eta). \quad (9.17)$$

Sei nun $\lim x_k = \xi$ (alle $x_k \neq \xi$). Dann:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(f(x_k)) - g(f(\xi))}{x_k - \xi} &\stackrel{(9.17)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{g}(f(x_k))(f(x_k) - f(\xi))}{x_k - \xi} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{g}(f(x_k)) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_k) - f(\xi)}{x_k - \xi} \\ &= f'(\xi)g'(f(\xi)). \end{aligned} \quad (9.18)$$

□

Bsp. 9.11: (a) Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := \sin(-x^3)$.

$$\text{Kettenregel (9.15)} \Rightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} h'(x) = -3x^2 \cos(-x^3).$$

(b) Sei $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{K}$, $h(x) := x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$(9.15) \Rightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}^+} h'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

9.2. Ableitungen höherer Ordnung; die Mengen C^k

Def. 9.12: Sei $I :=]a, b[$, $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. Rekursive

Def. der k -ten Ableitung $f^{(k)}$ von f für $k \in \mathbb{N}_0$:

$f^{(0)} := f$. Ang., für $k \in \mathbb{N}_0$ ex. $f^{(k)}(x)$ für alle

$x \in I$. Def. dann, falls $f^{(k)}$ in $\xi \in I$ dif.bar

ist:

$$f^{(k+1)}(\xi) := (f^{(k)})'(\xi). \quad (9.19)$$

Ex. $f^{(k+1)}(\xi)$ für alle $\xi \in I$, so heißt f

$(k+1)$ -mal dif.bar und

$f^{(k+1)} : I \rightarrow \mathbb{K}$ die $(k+1)$ -ste Ableitung

von f . Notation:

$$f' := f^{(1)}, f'' := f^{(2)}, f''' := f^{(3)},$$

aber $f^{(k)}$ für $k \geq 4$.

$f^{(k)}$ kann stetig oder unstetig sein (vgl. Bsp. 9.13(c)).

Def.

$$\forall_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(I, \mathbb{K}) := \left\{ f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}) : f^{(k)} \text{ ex. und ist stetig} \right\}, \quad (9.20)$$

$$C^\infty(I, \mathbb{K}) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(I, \mathbb{K}) \quad (9.21)$$

(also $C^0(I, \mathbb{K}) = C(I, \mathbb{K}) \supseteq C^1(I, \mathbb{K}) \supseteq C^2(I, \mathbb{K}) \supseteq \dots$).

Notation: $C^k(I) := C^k(I, \mathbb{R})$.

Bsp. 9.13: (a) $\sin \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\sin' = \cos$,
 $\sin'' = -\sin$, $\sin''' = -\cos$, $\sin^{(4)} = \sin$, ...

(b) Sei $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{K}$. Dann
 $P^{(n)}(x) = n! a_n$ (einfache Induktion).
 Also $P \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

(c)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist dif.bar, aber f' ist unstetig (Übung).

9.3. Mittelwertsatz, Monotonie und Extrema

Th. 9.14: Sei $a < b$, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dif.bar in $\xi \in]a, b[$ und
 ξ ein lok. Min. od. lok. Max. für f . Dann gilt $f'(\xi) = 0$.

Bew.: ξ lok. Max. für f

$$\Rightarrow \exists_{\epsilon > 0} \left(|h| < \epsilon \Rightarrow f(\xi + h) - f(\xi) \leq 0 \right).$$

Sei (h_k) Folge in $]0, \epsilon[$ mit $\lim h_k = 0$. Dann:

$$f'(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(\xi + h_k) - f(\xi)}{h_k} \leq 0, \quad f'(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(\xi - h_k) - f(\xi)}{-h_k} \geq 0 \quad (9.22)$$

$$\swarrow \quad f(\xi \pm h_k) - f(\xi) \leq 0 \quad \searrow$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = 0.$$

f hat lok. Min. in $\xi \Rightarrow -f$ hat lok. Max. in ξ , also

$$f'(\xi) = -(-f)'(\xi) = 0. \quad \square$$

Bem. 9.15: Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, gilt $f'(0) = 0$, aber

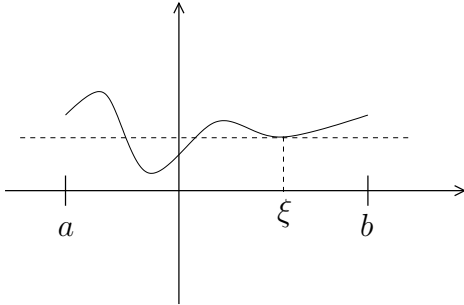
f hat weder lok. Min noch Max in 0.

$f'(\xi) = 0 \not\Rightarrow f$ hat lok. Min/Max in ξ .

Pkte ξ mit $f'(\xi) = 0$ heißen auch kritische od.
stationäre Pkte für f .

Th. 9.16 (Satz von Rolle): Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und dif.bar auf $]a, b[$ sowie $f(a) = f(b)$, dann

$$\exists_{\xi \in]a, b[} f'(\xi) = 0.$$



Bew.: Klar, wenn f konstant. Sonst:

$$\exists_{x \in]a, b[} f(x) \neq f(a).$$

$$f(x) > f(a) \stackrel{\text{Th. 7.54}}{\Rightarrow} \exists_{\xi \in]a, b[} f \text{ hat lok. Max in } \xi$$

$$\stackrel{\text{Th. 9.14}}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0.$$

$$f(x) < f(a) \text{ analog.} \quad \square$$

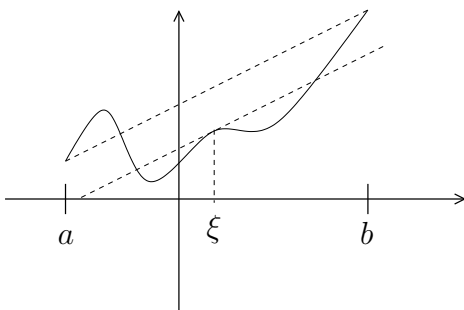
Th. 9.17 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung): $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig und dif.bar

auf $]a, b[$, $\forall_{x \in]a, b[} g'(x) \neq 0$. Dann:

$$\exists_{\xi \in]a, b[} \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (9.23a)$$

Für $g(x) = x$ ergibt sich die Standardform

$$\exists_{\xi \in]a, b[} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \quad (9.23b)$$



Bew.: $g' \neq 0 \wedge \text{Th. 9.16} \Rightarrow g(b) - g(a) \neq 0$. Sei

$$h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := f(x) - (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (9.24)$$

$$h(a) = f(a) = h(b) \stackrel{\text{Th. 9.16}}{\Rightarrow} \exists_{\xi \in]a, b[} h'(\xi) = 0 \Rightarrow (9.23a). \quad \square$$

Kor. 9.18: Sei $f :]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}$ dif.bar.

(a) $f' \geq 0$ (bzw. $f' \leq 0$) $\Rightarrow f$ steigend (bzw. fallend).
 $f' > 0$ (bzw. $f' < 0$) $\Rightarrow f$ str. steigend (bzw. str. fallend).

(b) $f' \equiv 0 \Rightarrow f$ konstant.

□

Lem. 9.19: Sei $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ dif.bar in $\xi \in]a, b[$.

$$f'(\xi) > 0 \Rightarrow \exists_{\epsilon > 0} \forall_{a_1 \in]\xi - \epsilon, \xi[} \forall_{b_1 \in]\xi, \xi + \epsilon[} f(a_1) < f(\xi) < f(b_1), \quad (*)$$

$$f'(\xi) < 0 \Rightarrow \exists_{\epsilon > 0} \forall_{a_1 \in]\xi - \epsilon, \xi[} \forall_{b_1 \in]\xi, \xi + \epsilon[} f(a_1) > f(\xi) > f(b_1). \quad (**)$$

Bew.: Ang., (*) gilt nicht.

Dann gibt es Folge (x_k) in $]a, b[\setminus \{\xi\}$ mit $\lim x_k = \xi$ und

$$\left(\forall_{k \in \mathbb{N}} \frac{f(x_k) - f(\xi)}{x_k - \xi} \leq 0 \right) \Rightarrow f'(\xi) \leq 0.$$

(**) folgt ganz analog.

□

Th. 9.20 (Hinreichende Bed. für Extrema): Sei

$f :]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}$ dif.bar und $f'(\xi) = 0$ für ein $\xi \in]c, d[$, $c < d$.

(a)

$$\left(\forall_{x \in]c, \xi[} f'(x) > 0 \right) \wedge \left(\forall_{x \in]\xi, d[} f'(x) < 0 \right) \Rightarrow \underbrace{f \text{ hat str. Max. in } \xi,}_{f''(\xi) \text{ ex. mit } f''(\xi) < 0 \Rightarrow \parallel}$$

(b)

$$\left(\forall_{x \in]c, \xi[} f'(x) < 0 \right) \wedge \left(\forall_{x \in]\xi, d[} f'(x) > 0 \right) \Rightarrow \underbrace{f \text{ hat str. Min. in } \xi,}_{f''(\xi) \text{ ex. mit } f''(\xi) > 0 \Rightarrow \parallel}$$

Bew.: (a):

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ für } x \in]c, \xi[\quad \stackrel{(9.23b)}{\Rightarrow} \quad \forall_{a \in]c, \xi[} f(\xi) - f(a) > 0, \\ f'(x) < 0 \text{ für } x \in]\xi, d[\quad \stackrel{(9.23b)}{\Rightarrow} \quad \forall_{b \in]\xi, d[} f(\xi) - f(b) > 0 \end{array} \right\} (*)$$

$$\Rightarrow f \text{ hat str. Max. in } \xi.$$

$$f''(\xi) < 0 \stackrel{\text{Lem. 9.19}}{\Rightarrow} \exists_{\epsilon > 0} f' > 0 \text{ auf }]\xi - \epsilon, \xi[\text{ und } f' < 0 \text{ auf }]\xi, \xi + \epsilon[.$$

Anwendung von (*) mit $c := \xi - \epsilon$, $d := \xi + \epsilon$
 $\Rightarrow f$ hat str. Max in ξ .

(b): analog. □

Bsp. 9.21: Betrachte

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x e^x, \quad (9.25a)$$

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x + x e^x = (1 + x) e^x. \quad (9.25b)$$

Es folgt $f'(x) < 0$ für alle $x < -1$, (*)

$$f'(x) = 0 \text{ für } x = -1,$$

$$f'(x) > 0 \text{ für alle } x > -1. (**).$$

Also f str. fallend auf $] - \infty, -1[$,

f str. steigend auf $] - 1, \infty[$.

Da $\xi = -1$ einzige Nullst. von f' , kann f nur

in $\xi = -1$ ein Extremum haben. Wegen (*) und (**)

hat f ein str. Min in ξ .

9.4. Regel von de L'Hôpital

Th. 9.22 (Regel von de L'Hôpital): Sei $a < \xi < b$, $I =]a, \xi[$

oder $I :=]\xi, b[$. Seien $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dif.bar,

$\forall_{x \in I} g'(x) \neq 0$, und es gelte (a) oder (b) mit

$$(a) \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \infty \text{ oder } \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = -\infty$$

(Def. 8.17 sei dafür auf Fall $\eta = \pm\infty$ erweitert).

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta \quad (9.26)$$

(gilt auch für $\xi \in \{-\infty, \infty\}$ und/oder $\eta \in \{-\infty, \infty\}$).

Bew.: Wir beweisen nur (a) \Rightarrow (9.26) für $\xi \in \mathbb{R}$.

Def. $f(\xi) := g(\xi) = 0$. Wegen (a) sind dann
 $f, g : I \cup \{\xi\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei (x_k) Folge
in I mit $\lim x_k = \xi$.

$$(9.23a) \quad \Rightarrow \quad \forall_{k \in \mathbb{N}} \quad \exists_{\xi_k \in]x_k, \xi[} \quad \frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(x_k) - f(\xi)}{g(x_k) - g(\xi)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}. \quad (9.27)$$

Th. 7.16 $\Rightarrow \lim \xi_k = \xi$, also

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta \wedge (9.27) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta. \quad \square$$

Bsp. 9.23: (a) Anwendung der Regel von de l'Hôpital auf

$$\begin{aligned} f :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \tan x, \\ g :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow \mathbb{R}, g(x) := e^x - 1, \text{ mit } \xi = 0 \text{ liefert} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x}{e^x} = \frac{1}{1} = 1 \quad (9.28)$$

(beachte $g'(x) = e^x \neq 0$ für $x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).

(b) Manchmal führt mehrfache Anw. von de l'Hôpital

$$\begin{aligned} \text{zum Ziel: Sei } \alpha \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}; f, g : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}, \\ f(x) := e^{\alpha x}, g(x) := x^n, \xi := \infty. \end{aligned}$$

Sei $1 \leq k \leq n$.

Es ist $g^{(k)}(x) = n(n-1) \cdots (n-k+1)x^{n-k} \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}^+$, und
 n -malige Anw. von de l'Hôp. liefert

$$\forall_{\alpha \in \mathbb{R}^+} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n e^{\alpha x}}{n!} = \infty. \quad (9.29)$$

(c) De l'Hôpital führt nicht immer zum Ziel:

$$\text{Z.B. } f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := e^x, g(x) := 2e^x, \xi = -\infty.$$

Es ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$, aber

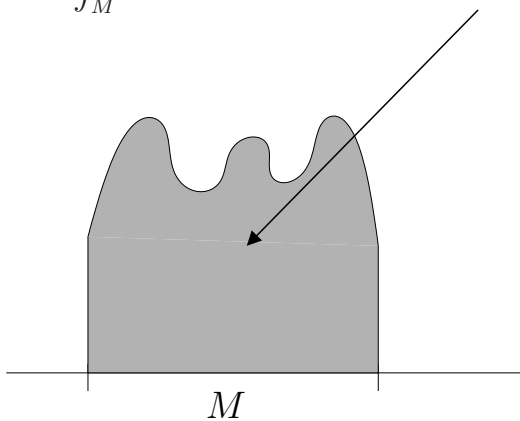
$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g^{(n)}(x) = 0.$$

10. Das Riemannintegral auf reellen Intervallen

10.1. Definitionen und “einfache” Eigenschaften

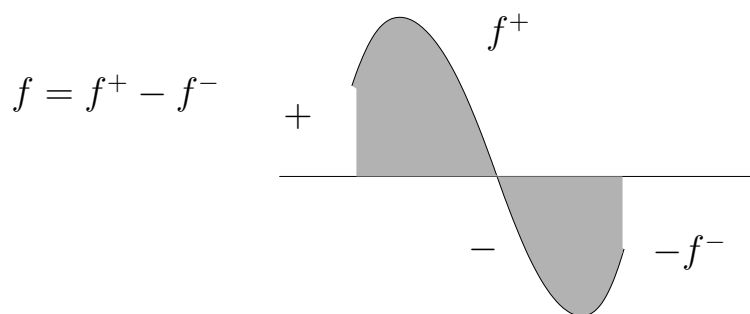
Ziel: Für $f : M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $M \subseteq \mathbb{R}$ sei

$$\int_M f = \text{Flächeninhalt von } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in M, 0 \leq y \leq f(x)\}. \quad (10.1)$$



Für $f : M \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_M f = \int_M f^+ - \int_M f^-. \quad (10.2)$$



Wir betrachten nur $M = [a, b]$ und f beschränkt.

Def. 10.1: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. f heißt beschränkt g.d.w. $\{|f(x)| \in \mathbb{R}_0^+ : x \in M\}$ ist beschr., d.h., g.d.w.

$$\|f\|_{\text{sup}} := \sup\{|f(x)| : x \in M\} \in \mathbb{R}_0^+. \quad (10.3)$$

Def. 10.2: Für $I := [a, b]$, $a \leq b$, def.

$$|I| := b - a = |a - b|, \quad (10.4)$$

als die Länge von I (heißt auch 1-dim. Volumen oder Maß von I).

Idee: Zerlege $I = \bigcup_{j=1}^n I_j$ und def.

$$\int_I f := \lim_{|I_j| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(t_j) |I_j| \quad \text{mit } t_j \in I_j,$$

falls der Limes existiert.

Def. 10.3: $\Delta := (x_0, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$, heißt

Zerlegung von $I = [a, b]$ g.d.w.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (a = x_0 = b \text{ für } a = b)$$

$$\begin{array}{ccccccc} | & | & & | & | & & | \\ \hline a = x_0 & x_1 & & x_2 \dots & x_{N-1} & & b = x_N \end{array}$$

x_j : Knoten, $\nu(\Delta) := \{x_0, \dots, x_N\}$: Knotenmenge.

(t_1, \dots, t_N) heißen Zwischenpunkte g.d.w.

$$\forall_{j=1, \dots, N} t_j \in [x_{j-1}, x_j] =: I_j.$$

$$|\Delta| := \max \{ |I_j| : j = 1, \dots, N \} \quad (10.5)$$

heißt Feinheitsmaß der Zerl. Δ .

Für $a = b$: $I_0 := I$, $\Delta = x_0 = a$, $|\Delta| = 0$.

Def. 10.4: Sei Δ Zerl. von $I = [a, b]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Def.

$$\left. \begin{array}{l} m_j := m_j(f) := \inf \{ f(x) : x \in I_j \}, \\ M_j := M_j(f) := \sup \{ f(x) : x \in I_j \}, \end{array} \right\} \quad (10.6)$$

$$r(\Delta, f) := \sum_{j=1}^N m_j |I_j| = \sum_{j=1}^N m_j (x_j - x_{j-1}), \quad (10.7a)$$

$$R(\Delta, f) := \sum_{j=1}^N M_j |I_j| = \sum_{j=1}^N M_j (x_j - x_{j-1}). \quad (10.7b)$$

Sind (t_1, \dots, t_N) Zwischenpkte, so auch noch

$$\rho(\Delta, f) := \sum_{j=1}^N f(t_j) |I_j| = \sum_{j=1}^N f(t_j)(x_j - x_{j-1}). \quad (10.7c)$$

$r(\Delta, f)$: riemannsche Untersumme,

$R(\Delta, f)$: riemannsche Obersumme,

$\rho(\Delta, f)$: riemannsche Zwischensumme.

Für $a = b$ ist $r(\Delta, f) = R(\Delta, f) = \rho(\Delta, f) = 0$.

Def. 10.5: Sei $I = [a, b]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschr.

(a) Def.

$$J_*(f, I) := \sup \{ r(\Delta, f) : \Delta \text{ Zerl. von } I \}, \quad (10.8a)$$

$$J^*(f, I) := \inf \{ R(\Delta, f) : \Delta \text{ Zerl. von } I \}. \quad (10.8b)$$

$J_*(f, I)$: unteres Riemannintegral,

$J^*(f, I)$: oberes Riemannintegral.

(b) f heißt riemannintegrierbar (r.int.bar) g.d.w.

$J_*(f, I) = J^*(f, I)$. Ist f r.int.bar, so heißt

$$\int_a^b f(x) dx := \int_I f(x) dx := \int_a^b f := \int_I f := J_*(f, I) = J^*(f, I) \quad (10.9)$$

das Riemannintegral von f über I .

$\mathcal{R}(I)$ sei die Menge aller r.int.baren Fkt. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Bem. 10.6: I, Δ, f wie vorher.

$$m_j(f) \stackrel{(4.9c)}{=} -M_j(-f), \quad m_j(-f) \stackrel{(4.9d)}{=} -M_j(f), \quad (10.11a)$$

$$\Rightarrow r(\Delta, f) = -R(\Delta, -f), \quad r(\Delta, -f) = -R(\Delta, f), \quad (10.11b)$$

$$\Rightarrow J_*(f, I) = -J^*(-f, I), \quad J_*(-f, I) = -J^*(f, I). \quad (10.11c)$$

Bsp. 10.7: (a) Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konstant, $f \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$, so ist

$f \in \mathcal{R}(I)$ und

$$\int_a^b f = c(b - a) = c|I| : \quad (10.12)$$

Für jede Zerl. Δ von I gilt

$$\begin{aligned} r(\Delta, f) &= \sum_{j=1}^N m_j |I_j| = c \sum_{j=1}^N |I_j| = c|I| = c(b - a) \\ &= \sum_{j=1}^N M_j |I_j| = R(\Delta, f), \end{aligned} \quad (10.13)$$

also $J_*(f, I) = c(b - a) = J^*(f, I)$.

(b) Die Dirichletfkt.

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad (a < b), \quad (10.14)$$

ist nicht r.int.bar: Für jede Zerl. Δ von I gilt
 $r(\Delta, f) = 0$, $R(\Delta, f) = \sum_{j=1}^N |I_j| = b - a$, also
 $J_*(f, I) = 0 \neq (b - a) = J^*(f, I)$, d.h., $f \notin \mathcal{R}(I)$.

Gegenüber dem Skript wird jetzt Material weggelassen, so dass auch einige Nummern fehlen.

Th. 10.10: Sei $I := [a, b]$, $a \leq b$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ beschr.

- (a) ... Verfeinerung ...
 (b) Sind Δ, Δ' Zerl. von I , so gilt

$$r(\Delta, f) \leq R(\Delta', f).$$

- (c) $J_*(f, I) \leq J^*(f, I)$.
 (d) Sei $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von Zerl. von I mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n| = 0$.
 Dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(\Delta_n, f) = J_*(f, I), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R(\Delta_n, f) = J^*(f, I).$$

Für $f \in \mathcal{R}(I)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(\Delta_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} R(\Delta_n, f) = \int_I f,$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\Delta_n, f) = \int_I f,$$

falls die Δ_n Zwischenpkte haben.

Th. 10.11: (a) Integral ist linear, d.h.,

$$\forall_{f, g \in \mathcal{R}(I)} \quad \forall_{\lambda, \mu \in \mathbb{R}} \quad \left(\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}(I) \wedge \int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g \right).$$

- (b) Integration über Teilintervalle:
 Sei $\tilde{\Delta} = (y_0, \dots, y_M)$ Zerl. von I ,
 $J_k := [y_{k-1}, y_k]$. Dann:
 $f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow \forall_{k=1, \dots, M} f \in \mathcal{R}(J_k)$.
 Für $f \in \mathcal{R}(I)$ gilt

$$\int_a^b f = \int_I f = \sum_{k=1}^M \int_{J_k} f = \sum_{k=1}^M \int_{y_{k-1}}^{y_k} f.$$

(c) Monotonie des Integrals:

$$f, g \text{ beschr. und } f \leq g \Rightarrow J_*(f, I) \leq J_*(g, I), \\ J^*(f, I) \leq J^*(g, I). \text{ Speziell:}$$

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g.$$

(d) Dreiecksungl.:

$$f \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow \left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

(e) Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$f \in \mathcal{R}(I) \text{ und } m \leq f \leq M$$

$$\Rightarrow m(b-a) = m|I| \leq \int_a^b f = \int_I f \leq M|I| = M(b-a)$$

(für $a < b$ heißt $\frac{\int_I f}{b-a}$ der Mittelwert von f auf I).

Th. 10.12: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ beschr. Dann:

$$f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow \forall_{\epsilon > 0} \exists \text{ Zerl. } \Delta \text{ von } I \quad R(\Delta, f) - r(\Delta, f) < \epsilon.$$

Th. 10.15: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b]$.

(a) f stetig $\Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)$.

(b) f steigend oder fallend $\Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)$.

Def. & Bem. 10.16: $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, heißt lipschitzstetig g.d.w.

$$\exists_{L \in \mathbb{R}_0^+} \forall_{x, y \in M} |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

L heißt dann Lipschitzkonstante.

f lip.st. $\Rightarrow f$ st.: Ist (y_n) Folge in M mit $\lim y_n = \xi \in M$

$$\Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} |f(\xi) - f(y_n)| \leq L|\xi - y_n| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow \lim f(y_n) = f(\xi)$.

$f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$, ist stetig, aber nicht lip.st.

Th. 10.17: Wieder $I := [a, b]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f \in \mathcal{R}(I) \wedge \phi : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ lip.st. $\Rightarrow \phi \circ f \in \mathcal{R}(I)$.

(b) $f \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow |f|, f^2, f^+, f^- \in \mathcal{R}(I)$,

$$\left(\exists_{\delta > 0} \forall_{x \in I} f(x) \geq \delta > 0 \right) \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{R}(I).$$

(c) $f, g \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow fg, \max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{R}(I)$,

$$\left(f, g \in \mathcal{R}(I) \wedge \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in I} g(x) \geq \delta > 0 \right) \Rightarrow \frac{f}{g} \in \mathcal{R}(I).$$

10.2. Wichtige Sätze

10.2.1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Not. 10.18:

$$\int_a^b f := \int_I f, \int_b^a f := - \int_a^b f,$$

$$[f(t)]_a^b := [f]_a^b := f(b) - f(a).$$

Th. 10.19 (Hauptsatz):

(a) Sei $\xi \in I \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(I)$,
 f st. in ξ . Dann gilt für alle $c \in I$:

$$F_c : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F_c(x) := \int_c^x f(t) dt,$$

ist dif.bar in ξ mit $F'_c(\xi) = f(\xi)$.

Speziell: $f \in C(I) \Rightarrow F_c \in C^1(I)$ mit $F'_c = f$.

(b) $F \in C^1(I)$ oder F dif.bar mit $F' \in \mathcal{R}(I)$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b = \int_a^b F'(t) dt,$$

und

$$\forall_{c, x \in I} F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t) dt.$$

Def. 10.20: $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfkt. zu $f : I \rightarrow \mathbb{R}$
g.d.w. F dif.bar mit $F' = f$.

Bsp. 10.21: (a) $\int_0^1 (x^5 - 3x) dx \stackrel{\text{Th. 10.19(b)}}{=} \left[\frac{x^6}{6} - \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{3}$.

(b) $\int_1^e \frac{1}{x} dx \stackrel{\text{Th. 10.19(b)}}{=} [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$.

(c) $\int_0^\pi \sin x dx \stackrel{\text{Th. 10.19(b)}}{=} [-\cos x]_0^\pi = 2$.

10.2.2. Partielle Integration

Th. 10.22: Sind $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ st. dif.bar, so gilt

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g.$$

Bsp. 10.23:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt &= [-\sin t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \quad | \quad + \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt \\ \Rightarrow 2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \\ \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt &= \pi. \end{aligned}$$

10.2.3. Substitutionsformel

Th. 10.24: Sei $\phi \in C^1(I)$,
 $f \in C(J)$, $\phi(I) \subseteq J$. Dann gilt

$$\forall_{a,b \in I} \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_a^b (f \circ \phi) \phi'.$$

Bsp. 10.25: Berechne $\int_0^1 t^2 \sqrt{1-t} dt$.
 Substituiere $x := \phi(t) := 1-t$ mit $\phi'(t) = -1$.
 Dann $t = 1-x$ und

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^2 \sqrt{1-t} dt &= - \int_{1=\phi(0)}^{0=\phi(1)} (1-x)^2 \sqrt{x} dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x}) dx \\ &= \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} \right]_0^1 = \frac{16}{105}. \end{aligned}$$

