Vorlesung Analysis für Informatik & Statistik

Dozent und Autor: Dr. P. Philip

Inhaltsverzeichnis

Themenübersicht

- Aussagenlogik und Mengenlehre
- Funktionen und Relationen
- natürliche Zahlen und vollständige Induktion
- reelle Zahlen
- komplexe Zahlen
- Summen und Produkte
- Polynome
- Folgen, Grenzwerte, Reihen
- Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen
- Extrema von Funktionen
- Zwischenwertsatz
- Umkehrfunktionen
- Potenzfunktionen, Exponentialfunktion und Logarithmus
- Potenzreihen
- trigonometrische Funktionen
- Ableitung
- Riemannintegral

1. Grundlagen: Logik & Mengenlehre

1.1. Einführende Bemerkungen

Mathematik:

- Wahrheit/Falschheit von Aussagen logisch rigoros beweisen.
- Methoden zur Lösung von Problemklassen bereitstellen, deren Korrektheit beweisen.

Analysis beschäftigt sich mit Grenzwerten/Limiten.

- Hier speziell: Integral- & Differentialrechnung ("Calculus"),
  Limiten von Folgen & Funktionen
  $\rightarrow$ braucht einige Vorbereitung

Den Rahmen liefert die Mengenlehre

$\rightarrow$ praktisch alle unsere Aussagen werden Aussagen über Mengen (und Zahlen) sein

$\rightarrow$ Ziel: Aussagen nach logischen Regeln beweisen

$\rightarrow$ Zu Mengenlehre, Logik, Beweistheorie gibt es jeweils extra Vorlesungen!

1.2. Aussagenlogik

1.2.1. Aussagen

Aussage: Zeichenreihe, der sich sinnvoll ein Wahrheitswert, also wahr (W) oder falsch (F) zuordnen lässt.

Bsp. 1.1: **(a)** Aussagen:
$\rightarrow A_1$: Jeder Hund ist ein Tier. (W)
$\rightarrow A_2$: Jedes Tier ist ein Hund. (F)
$\rightarrow A_3$: 4 ist ungerade. (F)
$\rightarrow A_4$: $2+3=5$ (W)
$\rightarrow A_5$: $\sqrt{2}<0$ (F)
$\rightarrow A_6$: $x+1>0$ gilt für jede natürliche Zahl x. (W)

(b) Keine Aussagen:
→ Denk mal nach!
→ Wer bist Du?
→ $3 \cdot 5 + 7$
↙ ohne Wissen über x weder W noch F
→ $x + 1 > 0$
→ Alle natürlichen Zahlen sind grün.
↖ wird zur Aussage, wenn man definiert,
was es bedeuten soll, dass eine nat. Zahl grün ist

1.2.2. Logische Operatoren

Ziel: Aussagen manipulieren und kombinieren.

Verneinung oder Negation: Operator $\neg$

- Ist unär, d.h. Anwendung auf eine Aussage:
  A: Jeder Hund ist ein Tier.
  $\neg A$: Nicht jeder Hund ist ein Tier.

Die Wirkung log. Op. beschreibt man durch Wahrheitstafeln.

Negation:

$$\begin{array}{c|c} A & \neg A \\ \hline \mathrm{W} & \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \mathrm{W} \end{array} \tag{1.1}$$

Binäre log. Op. kombinieren zwei Aussagen.

Folgende sind für uns unerlässlich:

Konjunktion: A und B, in Zeichen: $A \wedge B$.

Disjunktion: A oder B, || || : $A \vee B$.

Implikation: "A impliziert B", || || : $A \Rightarrow B$.
auch "aus A folgt B"

Äquivalenz: "A ist äquivalent zu B": $A \Leftrightarrow B$.
"A gilt genau dann, wenn B gilt"

Wahrheitstafel dazu:

$$\begin{array}{c|c||c|c|c|c} & & & \swarrow \underline{\underline{\text{nichtausschließendes Oder}}} & & \\ A & B & A \wedge B & A \vee B & A \Rightarrow B & A \Leftrightarrow B \\ \hline \text{W} & \text{W} & \text{W} & \text{W} & \text{W} & \text{W} \\ \text{W} & \text{F} & \text{F} & \text{W} & \text{F} & \text{F} \\ \text{F} & \text{W} & \text{F} & \text{W} & \text{W} & \text{F} \\ \text{F} & \text{F} & \text{F} & \text{F} & \text{W} & \text{W} \end{array} \tag{1.2}$$

Bsp. mit Aussagen aus Bsp. 1.1(a):
$A_1 \wedge A_4$: W, $A_1 \wedge A_3$: F, da A_3 F

---

umgangssprachlich: “oder” oft “entweder oder”

$$\begin{pmatrix} A & B & \text{entw. } A \text{ oder } B \\ \text{W} & \text{W} & \text{F} \end{pmatrix}$$

logisches oder: $\begin{array}{ccc} A & B & A \vee B \\ \text{W} & \text{W} & \text{W} \end{array}$

Bsp.: $A_1 \vee A_4$: W, $A_1 \vee A_3$: W, da A_1 W
$A_2 \vee A_5$: F.

Wir sehen: Aussagen lassen sich logisch kombinieren,
auch wenn sie keinen inhaltlichen Zusammenhang haben.

Gilt auch bei $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$: siehe unten.

$A \Rightarrow B$: Man sagt auch: “B ist notwendig für A”
“A ist hinreichend für B”

$\begin{array}{ccc} A & B & A \Rightarrow B \\ \text{F} & \text{W} & \text{W} \end{array}$, da richtige Aussagen aus falschen folgen können:

$$\text{Z. B.:} \quad \underset{\text{F}}{-1 = 1} \quad \Rightarrow \quad \overset{\swarrow \text{ quadrieren}}{\underset{\text{W}}{1 = 1}}$$

$A_1 \Rightarrow A_6$: W, $A_4 \Rightarrow A_2$: F

In Anwendungen: $A \Rightarrow B$ mit Wahrheitswert
von A, B unbekannt, aber man versucht A
zu beweisen, um B zu beweisen
(bringt nichts, falls sich A als falsch rausstellt).

Bsp. 1.2: Sasha studiert Analysis. Dann ist,

$$\text{“}\underbrace{\text{Sasha wiederholt Analysis}}_{A} \Rightarrow \underbrace{\text{mindestens ein*e Student*in wiederholt Analysis}}_{B}\text{”}$$

wahr:

Wenn A wahr, so auch B wahr.
Wenn A falsch, wissen nicht, ob B wahr oder falsch.

Bsp. zu “$\Leftrightarrow$”: $A_1 \Leftrightarrow A_4$: W, $A_2 \Leftrightarrow A_3$: W
$A_4 \Leftrightarrow A_5$: F.

In Anwendungen wieder $A \Leftrightarrow B$ mit Wahrheitswert von A, B unbekannt, aber um Wert von B zu bestimmen, genügt es, Wert von A zu bestimmen.

Bsp. 1.3: Sasha habe die beste Punktzahl in der Analysisprüfung. Dann ist

$$\text{“}\underbrace{\text{Sasha wiederholt Analysis}}_{A} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\text{das beste Analysisergebnis hat Wiederholer*in}}_{B}\text{” wahr:}$$

Wenn A wahr, so B wahr.
Wenn A falsch, so B falsch.

$\rightarrow$ wir sehen, $\Leftrightarrow$ ist nützlicher als $\Rightarrow$

Bem. 1.4: Informatik: W oft als 1 kodiert.
F oft als 0 kodiert.

1.2.3. Regeln

Ausdrücke wie $A \wedge B$ sind keine Aussagen, da sie Variablen enthalten (hier: A, B), deren Wahrheitswert (WW) unbekannt ist. Solche Ausdrücke heißen Aussageformen, sie werden zu Aussagen, wenn alle Variablen durch Aussagen ersetzt werden.

WW der Aussageform lässt sich eindeutig bestimmen, wenn allen Variablen ein WW zugewiesen wird.

Bsp. 1.5: **(a)** $\begin{matrix} A\text{: W} \\ B\text{: F} \end{matrix}$, $(A \wedge B) \vee (\neg B)$: ?

A	B	$A \wedge B$	$\neg B$	$(A \wedge B) \vee (\neg B)$
W	F	F	W	W

(1.3)

(b) $A \vee (\neg A)$: Gesetz des ausgeschlossenen Dritten

A	$\neg A$	$A \vee (\neg A)$
W	F	W
F	W	W

(1.4)

Solche Formen, die immer wahr sind, sind besonders wichtig:

Definition 1.6: Aussageformen, die für jede Belegung der Var. mit WW immer wahr sind, heißen Tautologie.

Notation 1.7: $\phi(A_1, \ldots, A_n)$ heißt, dass Aussageform ϕ höchstens $A_1, \ldots, A_n$ als Var. enthält.

Def. 1.8: $\phi(A_1, \ldots, A_n)$ und $\psi(A_1, \ldots, A_n)$ heißen äquivalent genau dann, wenn $\phi(A_1, \ldots, A_n) \Leftrightarrow \psi(A_1, \ldots, A_n)$ Tautologie ist.

Lemma 1.9: $\phi(A_1, \ldots, A_n)$ und $\psi(A_1, \ldots, A_n)$ sind äq. genau dann, wenn sie für jede Belegung von $A_1, \ldots, A_n$ mit WW den selben WW haben.

Beweis: Sind $\phi(A_1, \ldots, A_n)$ und $\psi(A_1, \ldots, A_n)$ äq. und A_i hat WW t_i mit $i = 1, \ldots, n$, so ist der WW von $\phi(A_1, \ldots, A_n) \Leftrightarrow \psi(A_1, \ldots, A_n)$ W, da die Form eine Tautologie sein muss. Nach (1.2) müssen ϕ und ψ den selben WW haben (beide W oder beide F).

Haben umgekehrt $\phi(A_1, \ldots, A_n)$ und $\psi(A_1, \ldots, A_n)$ den selben WW für jede Belegung von $A_1, \ldots, A_n$ mit WW, und ist eine Belegung gegeben, so gilt entweder $\begin{matrix}\phi & \psi \\ \mathrm{W} & \mathrm{W}\end{matrix}$ oder $\begin{matrix}\phi & \psi \\ \mathrm{F} & \mathrm{F}\end{matrix}$. In beiden Fällen hat $\phi \Leftrightarrow \psi$ den Wahrheitswert W, d.h., $\phi \Leftrightarrow \psi$ ist Tautologie. $\square$

q.e.d. $\nearrow$

$\rightarrow$ Hat man äq. Aussagen, so kann man sich aussuchen, welche man in einem logischen Argument verwendet!

- Theorem 1.11 stellt wichtige Äquivalenzen bereit, zuvor

Konvention 1.10 (zur Klammerreduktion):
$\neg$ bindet stärker als $\wedge$, $\vee$, welche stärker als
$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ binden.

Zum Beispiel ist

$$(A \vee \neg B \Rightarrow \neg B \wedge \neg A) \Leftrightarrow \neg C \wedge (A \vee \neg D)$$

das selbe wie

$$\Big(\big(A \vee (\neg B)\big) \Rightarrow \big((\neg B) \wedge (\neg A)\big)\Big) \Leftrightarrow \Big((\neg C) \wedge \big(A \vee (\neg D)\big)\Big).$$

$\swarrow$ auch "Satz"
Theorem 1.11: **(a)** $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$
(man kann "$\Rightarrow$" durch "$\neg$" und "$\vee$" definieren).

(b) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big(\underbrace{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}_{A \text{ ist notwendig \& hinreichend für } B}\big)$

$B \Rightarrow A$ heißt auch <u>Umkehrung</u> von $A \Rightarrow B$

(c) Kommutativgesetz der Konjunktion: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$.

(d) Kommutativgesetz der Disjunktion: $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.

(e) Assoziativgesetz der Konj.: $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$.

(f) Assoziativgesetz der Disj.: $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$.

(g) Distributivgesetz I: $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

(h) Distributivgesetz II: $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

(i) De Morgan-Gesetz I: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.

(j) De Morgan-Gesetz II: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.

(k) Doppelte Verneinung: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$.

(l) Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Bew.: Jeweils Wahrheitstafel plus Lem. 1.9.

(a):

A	B	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
W	W	F	W	W
W	F	F	F	F
F	W	W	W	W
F	F	W	W	W

(b) – (h): Übung.

(i):

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
W	W	F	F	W	F	F
W	F	F	W	F	W	W
F	W	W	F	F	W	W
F	F	W	W	F	W	W

(j): Übung

(k):

A	$\neg A$	$\neg\neg A$
W	F	W
F	W	F

(l):

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
W	W	F	F	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W
F	F	W	W	W	W

□

Die Regeln aus Th. 1.11 werden oft in Beweisen verwendet; es wird dann ggf. darauf verwiesen.
Weitere Regeln in Th. 1.13. Dazu:

Def. 1.12 (Implikation für Aussageformen):
Wir sagen $\phi(A_1, \dots, A_n)$ impliziert $\psi(A_1, \dots, A_n)$ $\big(\phi(\dots) \Rightarrow \psi(\dots)\big)$ genau dann, wenn jede Belegung mit WW, die ϕ wahr macht, auch ψ wahr macht.

Th. 1.13: **(a)** Transitivität der Implikation: $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.
(b) Transitivität der Äquivalenz: $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$.

Bew.: (a):

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$
W	W	W	W	W	W	W
W	F	W	F	W	F	W
F	W	W	W	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F
W	F	F	F	W	F	F
F	W	F	W	F	F	W
F	F	F	W	W	W	W

Man sieht, dass $A \Rightarrow C$ wahr, falls $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ wahr.

(b): Siehe Skript. $\square$

Def. & Bem. 1.14: Ein Beweis der Aussage B ist eine
Folge von Aussagen $A_1, \ldots, A_n$ so, dass
A_1 wahr ist, $A_i \Rightarrow A_{i+1}$ für $1 \leq i < n$ gilt, sowie
$A_n \Rightarrow B$. Nach Th. 1.13(a) ist dann auch B wahr.

1.3. Mengenlehre

Cantor (1895): „Eine Menge M ist die Zusammenfassung
zu einem Ganzen von wohlunterschiedenen Objekten m
unserer Anschauung oder unseres Denkens".

$\rightarrow$ Wir nennen m die Elemente von M.

Cantors Mengenlehre ist nicht frei von Widersprüchen
(z.B. die Russelsche Antinomie),
die in der axiomatischen Mengenlehre
vermieden werden (siehe Literatur im Skript).

Not. 1.15: $m \in M$ für "m ist Element von M".

Def. 1.16: Mengen M, N sind gleich $(M = N)$
$\underbrace{\text{g.d.w.}}_{\text{genau dann wenn}}$ M und N haben genau die selben Elemente.

Def. 1.17: Die Menge ohne Elemente heißt leere Menge, Symbol: $\emptyset$.

Bsp. 1.18: Mengen: $A := \{0\}$, $B := \{0, 17.5\}$, $C := \{5, 1, 5, 3\}$,
$\nwarrow$ per Definition gleich
$D := \{3, 5, 1\}$, $E := \{2, \sqrt{2}, -2\}$.
Es gilt $C = D$ (Reihenfolge ändern, Element
mehrfach schreiben ändert Menge nicht).
$F := \{-4, -2, \ldots, 20, 22, 24\}$
(solche Abkürzungen nur sinnvoll, wenn Punkte aus Zusammenhang klar).

Def. 1.19: Teilmenge/Inklusion: $A \subseteq B$ g.d.w.
jedes Element von A auch Element von B.
Gleichwertig: $B \supseteq A$ (B Obermenge von A).
Achtung: $A = B \Rightarrow A \subseteq B$.

$A \subsetneq B$ für $A \subseteq B \wedge A \neq B$.
$\nwarrow$ "echte Teilmenge"

Ist $P(x)$ Aussage über Element x von B, so def.

$$A := \{x \in B : \, P(x)\} \tag{1.5}$$

als die Teilmenge von B, bestehend aus allen $x \in B$, für die $P(x)$ wahr ist.

Bsp. 1.20: **(a)** Immer gilt: $A \subseteq A$, $\emptyset \subseteq A$.

(b) $A \subseteq B \Rightarrow A = \{x \in B : \, x \in A\}$.

(c) Mit $A := \{-10, -8, \dots, 8, 10\}$ gilt
$\{-2, 0, 2\} = \{x \in A : \, x^3 \in A\}$,
$\emptyset = \{x \in A : \, x + 21 \in A\}$.

Bem. 1.21: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

$\to$ Zum Beweis der Gleichheit von Mengen zeigt man oft zwei Inklusionen.

Def. 1.22: **(a)** Durchschnitt $A \cap B$ besteht aus allen El., die sowohl in A als auch in B sind. A, B heißen disjunkt g.d.w. $A \cap B = \emptyset$.

(b) Vereinigung $A \cup B$ besteht aus allen El., die in A oder
logisches Oder $\nearrow$
in B sind.
Schreibe $A \dot\cup B$, falls $A \cap B = \emptyset$ (disjunkte Vereinigung).

(c) Differenz $A \setminus B$ ("A ohne B", "A minus B"):
$A \setminus B := \{x \in A : \, x \notin B\}$.
Ist $B \subseteq A$, so heißt A Grundmenge und
$B^{\mathrm{c}} := A \setminus B$ das Komplement von B.

Bsp. 1.23: **(a)**

$$\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\}, \tag{1.6a}$$

$$\{\sqrt{2}\} \cap \{1,2,\dots,10\} = \emptyset. \tag{1.6b}$$

(b)

$$\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}, \tag{1.7a}$$

$$\{1,2,3\} \dot\cup \{4,5\} = \qquad || \qquad . \tag{1.7b}$$

(c)

$$\{1,2,3\} \setminus \{3,4,5\} = \{1,2\}, \tag{1.8a}$$

$$\{1,2,3\} \setminus \{3,2,1,\sqrt{5}\} = \emptyset, \tag{1.8b}$$

$$\{-10,-9,\dots,9,10\} \setminus \{0\} = \{-10,-9,\dots,-1\} \cup \{1,2,\dots,9,10\}. \tag{1.8c}$$

Sei nun $\{1,2,3,4,5\}$ Grundmenge. Dann

$$\{1,2,3\}^{\mathrm{c}} = \{4,5\}. \tag{1.8d}$$

Brauchen auch Mengen von Mengen.

Bsp.: $\big\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\big\}$, $\big\{\{0,1\}, \{1,2\}\big\}$.

Def. 1.24: Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ (auch 2^A, siehe Prop. 2.17 unten) besteht genau aus allen Teilmengen von A.

Bsp. 1.25:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \tag{1.9a}$$

$$\mathcal{P}(\{0\}) = \big\{\emptyset, \{0\}\big\}, \tag{1.9b}$$

$$\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\{0\})\big) = \mathcal{P}\big(\big\{\emptyset, \{0\}\big\}\big) = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \mathcal{P}(\{0\})\big\}. \tag{1.9c}$$

Beispielmengen waren bisher endlich.

Die einfachste unendl. Menge:

Def. 1.26: $\mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$ heißt Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Bem. 1.27: Wer mag, kann Zahlen als Mengen auffassen: $0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, $2 := \{0,1\}$, $3 := \{0,1,2\}$, …
$n := \{0,1,\dots,n-1\} = (n-1) \cup \{n-1\}$.

Wieder Regeln:

Th. 1.28: **(a)** Kommutativgesetz: $A \cap B = B \cap A$.

(b) || : $A \cup B = B \cup A$.

(c) Assoziativg.: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(d) $\quad || \quad : (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

(e) Distributivg.: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(f) $\quad || \quad : A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(g) De Morgan-Gesetz I: $U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$.

(h) $\quad || \quad$ II : $U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$.

(i) Doppeltes Komplement: $A \subseteq U \Rightarrow U \setminus (U \setminus A) = A$.

Bew.: Anwendung der Regeln von Th. 1.11:

(a): $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \overset{\text{Th. 1.11(c)}}{\Leftrightarrow} x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A$.

(g): Sei $x \in U$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in U \setminus (A \cap B) \quad &\Leftrightarrow \quad \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow \neg\big(x \in A \wedge x \in B\big) \\ &\overset{\text{Th. 1.11(i)}}{\Leftrightarrow} \quad \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in U \setminus A \vee x \in U \setminus B \Leftrightarrow x \in (U \setminus A) \cup (U \setminus B). \end{aligned}$$

(b) – (f), (h), (i): Übung. $\square$

Bem. 1.29: Kann allgemein Aussagenregeln in Mengenregeln übersetzen (siehe Skript).

1.4. Prädikatenlogik

Betrachte folgende Aussagen:

$x + 1 > 0$ gilt für jede nat. Zahl x. (W) (1.10a)

Alle reellen Zahlen sind positiv. (F) (1.10b)

Es gibt eine nat. Zahl größer als 10. (W) (1.10c)

Es gibt reelle Zahl x mit $x^2 = -1$. (F) (1.10d)

Für jede nat. Zahl n gibt es eine nat. Zahl größer n. (W) (1.10e)

Es kommt der universelle Quantor "für alle"
und der existentielle Quantor "es gibt"
vor.

Symbolisch: $\forall$ "für alle"
$\exists$ "es gibt"

$\mathbb{N}$: nat. Zahlen, $\quad \mathbb{R}$: reelle Zahlen

Damit (1.10):

$$\forall_{x\in\mathbb{N}}\; x+1>0. \text{ (W)} \tag{1.11a}$$

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\; x>0. \text{ (F)} \tag{1.11b}$$

$$\exists_{n\in\mathbb{N}}\; n>10. \text{ (W)} \tag{1.11c}$$

$$\exists_{x\in\mathbb{R}}\; x^2=-1. \text{ (F)} \tag{1.11d}$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\;\exists_{m\in\mathbb{N}}\; m>n. \text{ (W)} \tag{1.11e}$$

Def. 1.30: Universelle Aussage:

$$\forall_{x\in A}\; P(x). \tag{1.12a}$$

Existentielle Aussage:

$$\exists_{x\in A}\; P(x). \tag{1.12b}$$

$P(x)$ ist ein "Prädikat" von x, d.h. ein Ausdruck, der für jedes $x \in A$ eine Aussage (W oder F) darstellt. $P(x)$ darf wiederum Quantoren enthalten, aber keine, die sich auf x beziehen (man sagt auch, "die Variable x in $P(x)$ muss <u>frei</u> sein – nicht durch Quantoren gebunden).

Aussage (1.12a) ist wahr g.d.w. $P(x)$ wahr für alle $x \in A$.
Aussage (1.12b) ist wahr g.d.w. $P(x)$ wahr für mindestens ein $x \in A$.

↙ "großes Und"

Bem. 1.31: In Literatur auch $\bigwedge_{x\in A}$ für $\forall_{x\in A}$ und $\bigvee_{x\in A}$ für $\exists_{x\in A}$.

↖ "großes Oder"

Bem. 1.32: Eindeutige Existenz:

$$\exists!_{x\in A}\; P(x) \tag{1.13}$$

steht für “es gibt <u>genau ein</u> $x \in A$ so, dass $P(x)$ gilt”.
Abkürkung für

$$\underset{x\in A}{\exists}\left(P(x) \wedge \underset{y\in A}{\forall}\big(P(y) \Rightarrow x = y\big)\right). \tag{1.14}$$

Bsp. 1.33:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\exists!}\ n > 10.\ (\mathrm{F}) \tag{1.15a}$$

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\exists!}\ 12 > n > 10.\ (\mathrm{W}) \tag{1.15b}$$

Bem. 1.34: Regeln:

(a) Negation (Verallgemeinerung der de Morgan-Gesetze):

$$\neg \underset{x\in A}{\forall} P(x) \ \Leftrightarrow\ \underset{x\in A}{\exists} \neg P(x), \tag{1.16a}$$

$$\neg \underset{x\in A}{\exists} P(x) \ \Leftrightarrow\ \underset{x\in A}{\forall} \neg P(x). \tag{1.16b}$$

Beide Äquivalenzen sind unmittelbar klar, aber
zum Spaß noch einen Beweis für (1.16a) $\Rightarrow$ (1.16b):

$$\begin{aligned}\neg \underset{x\in A}{\exists} P(x) &\overset{\text{Th. 1.11(k)}}{\Leftrightarrow} \neg \underset{x\in A}{\exists} \neg\neg P(x) \overset{(1.16a)}{\Leftrightarrow} \neg\neg \underset{x\in A}{\forall} \neg P(x) \\ &\overset{\text{Th. 1.11(k)}}{\Leftrightarrow} \underset{x\in A}{\forall} \neg P(x).\end{aligned} \tag{1.17}$$

Negation Allgemein: Führende Quantoren “umdrehen” ($\forall \leftrightarrow \exists$)
und Prädikat negieren (Bsp. in (1.20e) unten).

(b) Vertauschungen <u>gleicher</u> Quantoren:

$$\underset{x\in A}{\forall}\ \underset{y\in B}{\forall} P(x,y) \ \Leftrightarrow\ \underset{y\in B}{\forall}\ \underset{x\in A}{\forall} P(x,y), \tag{1.18a}$$

$$\underset{x\in A}{\exists}\ \underset{y\in B}{\exists} P(x,y) \ \Leftrightarrow\ \underset{y\in B}{\exists}\ \underset{x\in A}{\exists} P(x,y). \tag{1.18b}$$

Für $A = B$ schreibe auch

$$\underset{x,y\in A}{\forall} P(x,y) \quad \text{für} \quad \underset{x\in A}{\forall}\ \underset{y\in A}{\forall} P(x,y), \tag{1.19a}$$

$$\underset{x,y\in A}{\exists} P(x,y) \quad \text{für} \quad \underset{x\in A}{\exists}\ \underset{y\in A}{\exists} P(x,y). \tag{1.19b}$$

Allgemein: Benachbarte <u>gleiche</u> Quantoren darf man vertauschen.
Warnung: Benachbarte verschiedene Quantoren <u>NICHT</u> vertauschen
(siehe Bsp. 1.35(d) unten).

Bsp. 1.35: **(a)** Neg. von (1.11a):

$$\exists_{x\in\mathbb{N}} \overbrace{x+1\leq 0}^{\neg(x+1>0)}. \text{ (F)} \tag{1.20a}$$

Neg. von (b),(c),(d): selbst machen
Neg. von (1.11e):

$$\exists_{n\in\mathbb{N}} \forall_{m\in\mathbb{N}} \overbrace{m\leq n}^{\neg(m>n)}. \text{ (F)} \tag{1.20e}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\neg \exists!_{x\in A} P(x) \quad & \Leftrightarrow \quad \neg \exists_{x\in A} \Big(P(x) \wedge \forall_{y\in A} \big(P(y) \Rightarrow x=y \big) \Big) \\
& \overset{\text{(1.16b), Th. 1.11(a)}}{\Leftrightarrow} \quad \forall_{x\in A} \neg \Big(P(x) \wedge \forall_{y\in A} \big(\neg P(y) \vee x=y \big) \Big) \\
& \overset{\text{Th. 1.11(i)}}{\Leftrightarrow} \quad \forall_{x\in A} \Big(\neg P(x) \vee \neg \forall_{y\in A} \big(\neg P(y) \vee x=y \big) \Big) \\
& \overset{\text{(1.16a)}}{\Leftrightarrow} \quad \forall_{x\in A} \Big(\neg P(x) \vee \exists_{y\in A} \neg \big(\neg P(y) \vee x=y \big) \Big) \\
& \overset{\text{Th. 1.11(j),(k)}}{\Leftrightarrow} \quad \forall_{x\in A} \Big(\neg P(x) \vee \exists_{y\in A} \big(P(y) \wedge x\neq y \big) \Big) \\
& \overset{\text{Th. 1.11(a)}}{\Leftrightarrow} \quad \forall_{x\in A} \Big(P(x) \Rightarrow \exists_{y\in A} \big(P(y) \wedge x\neq y \big) \Big).
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Der Ausdruck am Ende gilt g.d.w.
$P(x)$ für alle $x\in A$ falsch ist oder es
zwar $x\in A$ so gibt, dass $P(x)$ wahr, aber es
dann auch $y\neq x$ mit $P(y)$ wahr geben muss,
also gerade Neg. der eindeutigen Existenz.

(c) Gleiche Quantoren vertauschen:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \forall_{n\in\mathbb{N}} x^{2n}\geq 0 \;\Leftrightarrow\; \forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{x\in\mathbb{R}} x^{2n}\geq 0, \tag{1.22a}$$

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{y\in\mathbb{R}} \exists_{n\in\mathbb{N}} ny>x^2 \;\Leftrightarrow\; \forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{n\in\mathbb{N}} \exists_{y\in\mathbb{R}} ny>x^2. \tag{1.22b}$$

(d) Verschiedene Quantoren vertauschen i.A. <u>nicht</u>:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \exists_{y\in\mathbb{R}} y>x \quad \text{(W)} \tag{1.23a}$$

$$\exists_{y\in\mathbb{R}} \forall_{x\in\mathbb{R}} y>x \quad \text{(F)} \tag{1.23b}$$

(e) $\exists!$ eigentlich nur Abkürzung gemäß (1.14),
kein echter Quantor. Vertauscht i.A. weder mit $\exists$ noch mit sich selbst:

$$\begin{aligned}
&\exists_{n\in\mathbb{N}}\ \exists!_{m\in\mathbb{N}}\ m<n \qquad &\text{(W)}\\
&\exists!_{m\in\mathbb{N}}\ \exists_{n\in\mathbb{N}}\ m<n \qquad &\text{(F)}\\
&\exists!_{n\in\mathbb{N}}\ \exists!_{m\in\mathbb{N}}\ m<n \qquad &\text{(W)}\\
&\exists!_{m\in\mathbb{N}}\ \exists!_{n\in\mathbb{N}}\ m<n \qquad &\text{(F).}
\end{aligned}$$

Bem. 1.36: Beweisstrategien:

(a) $\forall_{x\in A} P(x)$: Man muss $P(x)$ für jedes $x \in A$ beweisen, d.h.
Beispiele reichen <u>nicht</u>!

(b) $\neg \forall_{x\in A} P(x)$: Finde <u>ein</u> $x \in A$ so, dass
$P(x)$ falsch (<u>ein</u> Gegenbeispiel reicht).

(c) $\exists_{x\in A} P(x)$: Finde <u>ein</u> $x \in A$ so, dass $P(x)$
wahr (<u>ein</u> Bsp. reicht).

Def. 1.37: Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge (genannt
<u>Indexmenge</u>). Für jedes $i \in I$ sei A_i
eine Menge (identische A_i zugelassen).

(a)
$$\bigcap_{i\in I} A_i := \left\{x : \forall_{i\in I}\ x \in A_i\right\}. \tag{1.24a}$$

(b)
$$\bigcup_{i\in I} A_i := \left\{x : \exists_{i\in I}\ x \in A_i\right\}. \tag{1.24b}$$

$\nwarrow$ heißt disjunkt g.d.w. $\forall_{i,j\in I} \big(i \neq j \ \Rightarrow\ A_i \cap A_j = \emptyset\big)$

Prop. 1.38: Sei $I \neq \emptyset$ Indexmenge; M, A_i Mengen
für jedes $i \in I$. Regeln:

(a) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap M = \bigcap_{i\in I} (A_i \cap M)$.

(b) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup M = \bigcup_{i\in I} (A_i \cup M)$.

(c) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup M = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup M)$.

(d) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap M = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap M)$.

(e) $M \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (M \setminus A_i)$.

(f) $M \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (M \setminus A_i)$.

Bew.: (a),(b),(d),(f): Übung.

(c): Skript.

(e):

$$x \in M \setminus \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow x \in M \wedge \neg \forall_{i \in I} x \in A_i \Leftrightarrow x \in M \wedge \exists_{i \in I} x \notin A_i$$
$$\Leftrightarrow \exists_{i \in I} x \in M \setminus A_i \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (M \setminus A_i).$$

$\square$

Bsp. 1.39:

$$\bigcap_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{N} = \mathbb{N}, \tag{1.25a}$$
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{1, 2, \dots, n\} = \{1\}, \tag{1.25b}$$
$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{N} = \mathbb{N}, \tag{1.25c}$$
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1, 2, \dots, n\} = \mathbb{N}, \tag{1.25d}$$
$$\mathbb{N} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{2n\} = \{1, 3, 5, \dots\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \big(\mathbb{N} \setminus \{2n\}\big). \tag{1.25e}$$

Vergleich mit Notation aus Def. 1.37:
Z.B. in (1.25a) ist

$$I = \mathbb{R}, \quad \forall_{i \in I} \quad A_i = \mathbb{N}$$

(in (1.25a) steht dabei x statt i).
In (1.25b) ist

$$I = \mathbb{N}, \quad \forall_{n \in I} \quad A_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

2. Funktionen & Relationen

2.1. Funktionen

Def. 2.1: Sei $x \in A$, $y \in B$. Dann heißt

$$(x,y) := \Big\{\{x\},\{x,y\}\Big\} \tag{2.1}$$

das <u>(geordnete) Paar</u> aus x und y. <u>Kartesisches Produkt</u>:

$$A \times B := \{(x,y):\ x \in A \wedge y \in B\}. \tag{2.2}$$

Bsp. 2.2:

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset, \tag{2.3a}$$

$$\{1,2\} \times \{1,2,3\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\} \tag{2.3b}$$

$$\neq \{1,2,3\} \times \{1,2\} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}. \tag{2.3c}$$

Für $x \neq y$:

$$(x,y) = \Big\{\{x\},\{x,y\}\Big\} \neq \Big\{\{y\},\{x,y\}\Big\} = (y,x). \tag{2.4}$$

Def. 2.3: A, B seien Mengen. Eine <u>Funktion</u> / <u>Abbildung</u> f ordnet jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ zu.
Schreibe $f(x)$ für y.
$\mathcal{D}(f) := A$: <u>Definitionsbereich</u> (domain) von f,
$\mathcal{R}(f) := B$: <u>Wertebereich</u> (range) von f.
Notation:

$$f:\ A \longrightarrow B, \qquad \underbrace{x \mapsto f(x)}_{\text{Zuordnungsvorschrift}} \tag{2.5}$$

$f(x)$: das <u>Bild</u> von x,
x: ein <u>Urbild</u> von $f(x)$,

$$\operatorname{graph}(f) := \Big\{(x,y) \in A \times B:\ y = f(x)\Big\}. \tag{2.6}$$

Ganz genau: f ist das geordnete Tripel $(A, B, \operatorname{graph}(f))$.

$$\mathcal{F}(A,B) := B^A := \Big\{(f:\ A \longrightarrow B):\ A = \mathcal{D}(f) \wedge B = \mathcal{R}(f)\Big\}. \tag{2.7}$$

$\nwarrow$ Menge der Fkt von A nach B

Def. 2.4: Sei $f:\ A \longrightarrow B$ Fkt.

(a) Für $T \subseteq A$ heißt

$$f(T) := \{f(x) \in B:\ x \in T\} \tag{2.8}$$

das <u>Bild</u> von T unter f.

(b) Für $U \subseteq B$ heißt

$$f^{-1}(U) := \{x \in A:\ f(x) \in U\} \tag{2.9}$$

das <u>Urbild</u> von U unter f.

(c) f heißt injektiv (auch eineindeutig) g.d.w. jedes $y \in B$ hat höchstens ein Urbild, d.h.

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} \quad &\Leftrightarrow \quad \underset{y\in B}{\forall} \left(f^{-1}\{y\} = \emptyset \vee \underset{x\in A}{\exists!}\, f(x) = y \right) \\ &\Leftrightarrow \quad \underset{x_1,x_2\in A}{\forall} \big(x_1 \neq x_2 \; \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \big). \end{aligned} \tag{2.10}$$

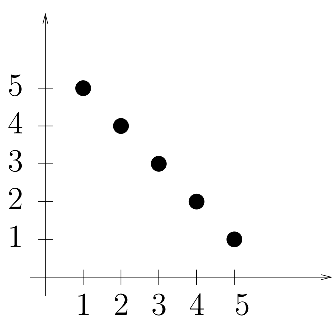
(d) f heißt surjektiv g.d.w. jedes $y \in B$ hat mindestens ein Urbild, d.h.

$$f \text{ surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{y\in B}{\forall}\ \underset{x\in A}{\exists}\ y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \underset{y\in B}{\forall}\ f^{-1}\{y\} \neq \emptyset. \tag{2.11}$$

(e) f bijektiv $:\Leftrightarrow$ f injektiv $\wedge$ f surjektiv.

Bsp. 2.5:

$$f:\, \{1,2,3,4,5\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5\}, \quad f(x) := -x+6. \tag{2.12a}$$



Auch: $x \mapsto -x+6$ statt $f(x) = -x+6$

$$\begin{aligned}
&g:\, \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, && g(n) := 2n, && (2.12\text{b})\\
&h:\, \mathbb{N} \longrightarrow \{2,4,6,\dots\}, && h(n) := 2n, && (2.12\text{c})\\
&\tilde{h}:\, \mathbb{N} \longrightarrow \{2,4,6,\dots\}, && \tilde{h}(n) := \begin{cases} n & \text{für } n \text{ gerade,} \\ n+1 & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases} && (2.12\text{d})\\
&G:\, \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, && G(n) := n/(n+1), && (2.12\text{e})\\
&F:\, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\big), && F(A) := \mathcal{P}(A). && (2.12\text{f})
\end{aligned}$$

Es ist $g \neq h$ wegen $\mathcal{R}(g) \neq \mathcal{R}(h)$.
Aber $g(\mathbb{N}) = h(\mathbb{N})$.
Weiterhin

$$f(\{1,2\}) = \{5,4\} = f^{-1}(\{1,2\}), \quad \tilde{h}^{-1}(\{2,4,6\}) = \{1,2,3,4,5,6\}. \tag{2.13}$$

f bijektiv, g injektiv (nicht surj.),

$\tilde{h}$ surj. (nicht inj.)

Bsp. 2.6: **(a)** Identität auf $A \neq \emptyset$:

$\underbrace{\mathrm{Id}}_{\text{auch } \mathrm{Id}_A} : A \longrightarrow A$, $\mathrm{Id}(x) := x$

ist bijektiv.

(b) Konstante Abbildung $f : A \longrightarrow B$:

$\underset{c \in B}{\exists} \ \underset{x \in A}{\forall} \ f(x) = c$.

Schreibe auch $f \equiv c$ ("f ist identisch gleich c").

Sei $f \equiv c$, $\emptyset \neq T \subseteq A$ und $U \subseteq B$. Dann:

$$f(T) = \{c\}, \quad f^{-1}(U) = \begin{cases} A & \text{für } c \in U, \\ \emptyset & \text{für } c \notin U. \end{cases} \tag{2.14}$$

f inj. $\Leftrightarrow A = \{x\}$; f surj. $\Leftrightarrow B = \{c\}$.

(c) Für $A \subseteq X$ heißt

$$\iota : A \longrightarrow X, \quad \iota(x) := x, \tag{2.15}$$

<u>Inklusion</u>. Dann: ι inj.; ι surj. $\Leftrightarrow A = X \Leftrightarrow \iota = \mathrm{Id}_A$.

(d) Für $A \subseteq X$, $f : X \longrightarrow B$, $g : A \longrightarrow B$, $\underset{x \in A}{\forall} \ g(x) = f(x)$

heißt g <u>Einschränkung</u> von f auf A,

f <u>Fortsetzung</u> von g auf X. Schreibe dann $g = f{\restriction}_A$.

Def. 2.7: Komposition/Hintereinanderausführung

von $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow D$ mit $f(A) \subseteq C$ ist

$$\underbrace{g \circ f}_{\text{lies: "}g\text{ nach }f\text{"}} : A \longrightarrow D, \quad (g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big). \tag{2.16}$$

Bsp. 2.8:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad n \mapsto n^2, \tag{2.17a}$$
$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad n \mapsto 2n. \tag{2.17b}$$

Dann $f(\mathbb{N}) = \{1, 4, 9, \dots\} \subseteq \mathcal{D}(g)$,

$g(\mathbb{N}) = \{2, 4, 6, \dots\} \subseteq \mathcal{D}(f)$,

$$(g \circ f) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(n) = g(n^2) = 2n^2, \tag{2.18a}$$
$$(f \circ g) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(n) = f(2n) = 4n^2. \tag{2.18b}$$

Also i.A. $g \circ f \neq f \circ g$!

Prop. 2.9: $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow D$, $h : E \longrightarrow F$, $f(A) \subseteq C$, $g(C) \subseteq E$.

(a) Assoziativgesetz:
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f. \tag{2.19}$$

(b)
$$\underset{W \in \mathcal{P}(D)}{\forall} (g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)). \tag{2.20}$$

Bew.: (a)

$$\begin{aligned}\underset{x \in A}{\forall} \quad \big(h \circ (g \circ f)\big)(x) &= h\big((g \circ f)(x)\big) = h\big(g(f(x))\big) = (h \circ g)(f(x)) \\ &= \big((h \circ g) \circ f\big)(x).\end{aligned} \tag{2.21}$$

(b) Übung. □

Def. 2.10: $g : B \longrightarrow A$ heißt <u>rechts-</u> (bzw. <u>links-</u>) <u>invers</u> zu $f : A \longrightarrow B$ g.d.w. $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ (bzw. $g \circ f = \mathrm{Id}_A$).
g heißt <u>invers</u> zu f (auch <u>Umkehrabbildung</u>) g.d.w.
g rechts- und linksinvers zu f. Schreibe dann $f^{-1} = g$.
f heißt (rechts-, links-) <u>invertierbar</u> g.d.w.
es eine (rechts-, links-) inverse Abb. zu f gibt.

Bsp. 2.11: **(a)**

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) := 2n, \tag{2.22a}$$
$$g_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad g_1(n) := \begin{cases} n/2 & \text{für } n \text{ gerade}, \\ 1 & \text{für } n \text{ ungerade}, \end{cases} \tag{2.22b}$$
$$g_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad g_2(n) := \begin{cases} n/2 & \text{für } n \text{ gerade}, \\ 2 & \text{für } n \text{ ungerade}. \end{cases} \tag{2.22c}$$

g_1, g_2 beide linksinv. zu f, f hat keine rechtsinv. Abb.
nach Th. 2.12(c) unten.

(b)

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) := \begin{cases} n/2 & \text{für } n \text{ gerade}, \\ (n+1)/2 & \text{für } n \text{ ungerade}, \end{cases} \tag{2.23a}$$
$$g_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad g_1(n) := 2n, \tag{2.23b}$$
$$g_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad g_2(n) := 2n - 1. \tag{2.23c}$$

g_1, g_2 beide rechtsinv. zu f, f hat keine linksinv. Abb.
nach Th. 2.12(c) unten.

(c)

$$f:\,\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N},\quad f(n):=\begin{cases} n-1 & \text{für } n \text{ gerade},\\ n+1 & \;||\; n \text{ ungerade},\end{cases} \tag{2.24a}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, leftrightarrow, bend right] & 2 & 3 \arrow[r, leftrightarrow, bend right] & 4 & 5 \arrow[r, leftrightarrow, bend right] & 6 \end{tikzcd} \quad \text{hat } f^{-1}=f.$$

$$g:\,\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N},\quad g(n):=\begin{cases} 2 & \text{für } n=1,\\ 3 & \;||\; n=2,\\ 1 & \;||\; n=3,\\ n & \;||\; n\notin\{1,2,3\},\end{cases} \tag{2.24b}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] & 2 \arrow[r, bend left] & 3 \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

$$g^{-1}:\,\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N},\quad g^{-1}(n):=\begin{cases} 3 & \text{für } n=1,\\ 1 & \;||\; n=2,\\ 2 & \;||\; n=3,\\ n & \;||\; n\notin\{1,2,3\}.\end{cases} \tag{2.24c}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, bend right] & 2 \arrow[l, bend right] & 3 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

Th. 2.12: Seien $A, B \neq \emptyset$.

(a) $f:\,A\longrightarrow B$ hat rechtsinv. Abb. $\Leftrightarrow$ f surj.

(b) $f:\,A\longrightarrow B$ hat linksinv. Abb. $\Leftrightarrow$ f inj.

(c) $f:\,A\longrightarrow B$ hat inverse Abb. $\Leftrightarrow$ f bijektiv.
In diesem Fall: rechts- und linksinv. Abb. sind eindeutig und $= f^{-1}$.

Bew.: (a) Sei f surj. Dann: $\underset{y\in B}{\forall}\ \underset{x_y\in A}{\exists}\ f(x_y)=y$.

Def.

$$g:\,B\longrightarrow A,\quad g(y):=x_y. \tag{2.25}$$

g ist rechtsinv.: $\underset{y\in B}{\forall}\ f(g(y))=y$.

Umgekehrt sei $g:\,B\longrightarrow A$ rechtsinv. zu f.

$\underset{y\in B}{\forall}\ y=f(g(y))$, d.h. $g(y)\in f^{-1}\{y\}$, d.h. f ist surj.

(b) Sei f inj. und $a \in A$ fest. $\underset{y \in B}{\forall} \Big(f^{-1}\{y\} \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \underset{x_y \in A}{\exists!} \; f(x_y) = y \Big)$.
Def.

$$g: B \longrightarrow A, \quad g(y) := \begin{cases} x_y & \text{für } f^{-1}\{y\} \neq \emptyset, \\ a & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.26}$$

g linksinv., da $\underset{x \in A}{\forall} \; g(f(x)) = x$.
Umgekehrt sei $g: B \longrightarrow A$ linksinv. zu f. Sind $x_1, x_2 \in A$
mit $f(x_1) = f(x_2) = y$, so
$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2$, also f inj.

(c) Sei g linksinv. zu f, h rechtsinv. zu f. Dann:

$$\underset{y \in B}{\forall} \quad g(y) = \big(g \circ (f \circ h)\big)(y) = \big((g \circ f) \circ h\big)(y) = h(y), \tag{2.27}$$

also $g = h$. Auch:
f inv.bar $\Rightarrow g = h = f^{-1}$ sowie f bij. nach (a), (b).
Umgekehrt: f bij. $\overset{\text{(a), (b)}}{\Rightarrow}$ f hat Linksinv. g und Rechtsinv. h. Nach (2.27) ist $g = h$
und f inv.bar. □

Th. 2.13: Sei $f: A \longrightarrow B, \quad g: B \longrightarrow C$.
f, g inj. $\Rightarrow g \circ f$ inj.
|| surj. $\Rightarrow$ || surj.
|| bij. $\Rightarrow$ || bij. und

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \tag{2.28}$$

Bew.: Übung. □

Def. 2.14: **(a)** Sei I Indexmenge. $f: I \longrightarrow A$ heißt
dann auch Familie (von Elementen in A); man schreibt
$f = (a_i)_{i \in I}$ mit $a_i := f(i)$ (oft wird dann f und
A gar nicht explizit angegeben). Oft sind die
a_i selbst wieder Mengen.

(b) Folge in A: Familie in A mit $I = \mathbb{N}$.
Schreibe dann $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, \dots)$
Allgemeiner: Familie heißt auch dann Folge, wenn es
bij. Abb. $\phi: I \longrightarrow B \subseteq \mathbb{N}$ gibt.

(c) Kartesisches Produkt für Familien von Mengen $(A_i)_{i \in I}$:

$$\prod_{i \in I} A_i := \left\{ \left(f: I \longrightarrow \bigcup_{j \in I} A_j \right) : \underset{i \in I}{\forall} \; f(i) \in A_i \right\}. \tag{2.29}$$

Hat I genau $n \in \mathbb{N}$ Elemente, so heißen die El.
von $\prod_{i \in I} A_i$ (geordnete) n-Tupel (Tripel für $n = 3$).

Bsp. 2.15: **(a)** Def. 1.37 def. $\bigcap$ und $\bigcup$ der Familie $(A_i)_{i\in I}$.
Z.B. in (1.25b):

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad A_n := \{1,2,\dots,n\}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{1\}. \tag{2.30}$$

(b) Folgen:

In $\{0,1\}$:	$(1,0,1,0,1,0,\dots)$.	(2.31a)
In $\mathbb{N}$:	$(n^2)_{n\in\mathbb{N}} = (1,4,9,16,25,\dots)$.	(2.31b)
In $\mathbb{R}$:	$\big((-1)^n\sqrt{n}\big)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(-1,\sqrt{2},-\sqrt{3},\dots\Big)$.	(2.31c)
In $\mathbb{R}$:	$(1/n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right)$.	(2.31d)
Endliche Folge in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$:	$\big(\{3,2,1\},\{2,1\},\{1\},\emptyset\big)$.	(2.31e)

(c) Für $\underset{i\in I}{\forall} \; A_i = A$ gilt $\prod_{i\in I} A = A^I = \mathcal{F}(I,A)$.
Z.B. $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: Menge der Folgen in $\mathbb{R}$.
Für $I = \{1,2,\dots,n\}$, $n\in\mathbb{N}$:

$$\prod_{i\in I} A = A^{\{1,2\dots,n\}} =: \prod_{i=1}^{n} A =: A^n \tag{2.32}$$

(Menge der n-Tupel in A).

—

Erklärung der Notation 2^A für $\mathcal{P}(A)$:

Def. 2.16: Sei $B \subseteq A$. Dann heißt

$$\chi_B : A \longrightarrow \{0,1\}, \quad \chi_B(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x\in B, \\ 0 & \text{für } x\notin B, \end{cases} \tag{2.33}$$

die charakteristische Funktion von B (bez. Grundmenge A)
(man schreibt auch 1_B oder $\mathbb{1}_B$ statt χ_B).

Prop. 2.17: A sei Menge. Dann ist

$$\chi : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \underbrace{\{0,1\}^A}_{\nwarrow \text{ Menge der Fkt. von } A \text{ nach } \{0,1\}}, \quad \chi(B) := \chi_B, \tag{2.34}$$

bijektiv.

Bew.: χ inj.: Seien $B, C \in \mathcal{P}(A)$ mit $\underset{x\in B}{\exists}\ x \notin C$.

Dann: $\chi_B(x) = 1$ und $\chi_C(x) = 0$, also $\chi(B) \neq \chi(C)$.

χ surj.: Zu $f:\ A \longrightarrow \{0,1\}$ def. $B := \{x \in A:\ f(x) = 1\}$.

Dann ist $\chi(B) = \chi_B = f$. $\square$

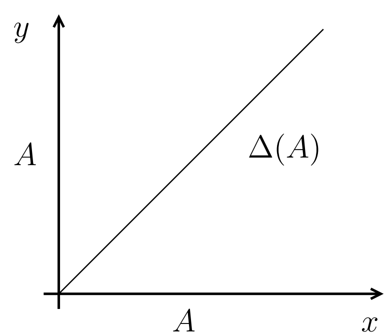
Schreibt man 2^A für $\mathcal{P}(A)$, so identifiziert man
$\mathcal{P}(A)$ mit $\{0,1\}^A$ gemäß (2.34),
wobei in Mengenlehre oft 2 mit $\{0,1\}$ identifiziert wird.

2.2. Relationen

Def. 2.18: Relation R ist eine Teilmenge R von $A \times B$.
Für $A = B$ heißt R Rel. auf A.
Schreibe: $a\,R\,b :\Leftrightarrow (a,b) \in R$.

Bsp. 2.19: **(a)** Gleichheitsrel. "=" auf $A \neq \emptyset$:

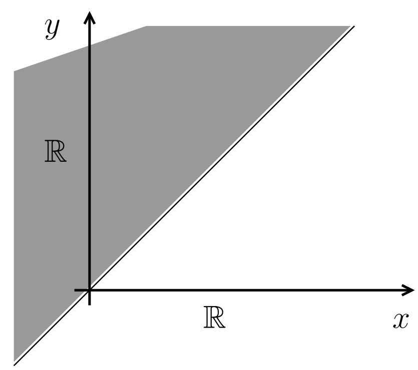
$$R := \underbrace{\Delta(A)}_{\text{Diagonale von } A\times A} := \{(x,x) \in A \times A:\ x \in A\}. \tag{2.35}$$



$$x = y \ \Leftrightarrow\ x\,R\,y \Leftrightarrow\ (x,y) \in R = \Delta(A). \tag{2.36}$$

"$\leq$" auf $\mathbb{R}$ ist

$$R_{\leq} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \leq y\}. \tag{2.37}$$



(b) Funktion als Relation: Für $f : \, A \longrightarrow B$ gilt

$$R_f = \{(x,y) \in A \times B : \, y = f(x)\} = \mathrm{graph}(f) \tag{2.38}$$

ist Rel.
Relation als Funktion: $R \subseteq A \times B$, $B \neq \emptyset$ lässt sich als die Fkt

$$f_R : \, A \longrightarrow \mathcal{P}(B), \quad f_R(x) = \{y \in B : \, x \, R \, y\}, \tag{2.39}$$

auffassen.

Def. 2.20: Sei R Rel. auf A.

(a)

$$R \ \underline{\text{reflexiv}} \quad \text{g.d.w.} \quad \forall_{x \in A} \ x \, R \, x. \tag{2.40}$$

(b)

$$R \ \underline{\text{symmetrisch}} \quad \text{g.d.w.} \quad \forall_{x,y \in A} \ \big(x \, R \, y \ \Rightarrow \ y \, R \, x\big). \tag{2.41}$$

(c)

$$R \ \underline{\text{antisym.}} \quad \text{g.d.w.} \quad \forall_{x,y \in A} \ \big((x \, R \, y \ \wedge \ y \, R \, x) \ \Rightarrow \ x = y\big). \tag{2.42}$$

(d)

$$R \ \underline{\text{transitiv}} \quad \text{g.d.w.} \quad \forall_{x,y,z \in A} \ \big((x \, R \, y \ \wedge \ y \, R \, z) \ \Rightarrow \ x \, R \, z\big). \tag{2.43}$$

Bsp. 2.21:

$$R := \big\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 :\ (x,y \text{ beide gerade}) \vee (x,y \text{ beide ungerade})\big\}, \tag{2.44}$$
$$S := \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 :\ y = x^2\}. \tag{2.45}$$

	ref.	sym.	a.sym.	trans.
"$=$" auf $A \neq \emptyset$	W	W	W	W
"$\leq$" auf $\mathbb{R}$ od. $\mathbb{N}$	W	F	W	W
"$<$" auf $\mathbb{R}$ od. $\mathbb{N}$	F	F	W da $(x < y \ \wedge\ y < x)$ F	W
R	W	W	F	W
S	F	F	W $xSy \ \wedge\ ySx \ \Rightarrow x = y = 1$	F

Def. 2.22: Rel. R auf A heißt Äquivalenzrel.
$\Leftrightarrow$ R ref., sym. & trans.
Notation bei Äqu.rel. oft $x \sim y$ statt $x\,R\,y$.

Bsp. 2.23: **(a)** "$=$" ist Äqu.rel. auf $A \neq \emptyset$.

(b) R aus (2.44) ist Äqu.rel. auf $\mathbb{N}$.

(c) Sei $A = \dot{\bigcup}_{i\in I} A_i$, alle $A_i \neq \emptyset$ (Zerlegung von A).
Dann def.

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \ \underset{i\in I}{\exists} \big(x \in A_i \wedge y \in A_i\big). \tag{2.46}$$

Äqu.rel. auf A.
Ist umgekehrt $\sim$ Äqu.rel. auf $A \neq \emptyset$, so gehört
dazu eine Zerl. $A = \dot{\bigcup}_{i\in I} A_i$ so, dass (2.46) gilt:

$$[x] := \{y \in A :\ x \sim y\}. \tag{2.47}$$

$\nwarrow$ Äquivalenzklasse von $x \in A$

Die El. von $[x]$ heißen Repräsentanten von $[x]$.
$\sim$ Äqu.rel. $\Rightarrow$

$$\big([x] = [y] \ \Leftrightarrow \ x \sim y\big) \quad \wedge \quad \big([x] \cap [y] = \emptyset \ \Leftrightarrow \ \neg(x \sim y)\big). \tag{2.48}$$

Setze $I := A/\sim := \underbrace{\{[x] :\ x \in A\}}_{\text{Quotientenmenge von } A \text{ nach } \sim}$.

Mit $A_i := i$ gilt dann $A = \dot{\bigcup}_{i\in I} A_i$.

Def. 2.24: Rel. R auf A heißt Partialordnung (PO) g.d.w.
R ref., antisym. & trans. Für PO: $x \leq y$ statt $x\,R\,y$.
Eine PO $\leq$ heißt totale oder lineare Ordnung (TO) g.d.w.
$\underset{x,y\in A}{\forall} \ (x \leq y \ \vee \ y \leq x)$.

Notation 2.25: Sei $\leq$ PO auf $A \neq \emptyset$. Schreibe

$x < y :\Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$.

$\nwarrow$ die <u>strenge</u> Ordnung zu $\leq$

Achtung: $<$ ist keine PO (nicht ref.)

Def. 2.26: $\leq$ sei PO auf $A \neq \emptyset$, $\emptyset \neq B \subseteq A$.

(a) $x \in A$ <u>untere Schranke</u> von B g.d.w. $\underset{b \in B}{\forall} \; x \leq b$,
$x \in A$ <u>obere Schranke</u> von B g.d.w. $\underset{b \in B}{\forall} \; b \leq x$,
B <u>nach unten beschränkt</u> g.d.w. es gibt untere Schr. von B,
B <u>nach oben beschränkt</u> g.d.w. es gibt obere Schr. von B,
B <u>beschränkt</u> g.d.w. B nach unten und oben beschränkt.

(b) $x \in B$ heißt <u>Minimum</u> von B ($x = \min B$) g.d.w. x untere Schr.,
$x \in B$ heißt <u>Maximum</u> von B ($x = \max B$) g.d.w. x obere Schr.

(c) $\swarrow$ Infimum
$\inf B := \max\{x \in A : x \text{ untere Schr. für } B\}$ (muss nicht existieren!)
$\sup B := \min\{x \in A : x \text{ obere Schr. für } B\}$ (muss nicht existieren!)
$\nwarrow$ Supremum

Bsp. 2.27: **(a)** Das übliche $\leq$ ist TO auf jedem $A \subseteq \mathbb{R}$.
Sei $A := \mathbb{R}$ mit üblicher TO $\leq$.

B	$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3\}$	$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
ob. Schr. B	/	z.B. 3, 9.9	/
unt. Schr. B	z.B. 0, 1	z.B. $\frac{1}{2}$, 1	z.B. -1, 0
$\max B$	/	3	/
$\min B$	1	1	/
$\sup B$	/	3	/
$\inf B$	1	1	0

(b) $A := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Def.

$$(m_1, m_2) \leq (n_1, n_2) \;\Leftrightarrow\; m_1 \leq n_1 \;\wedge\; m_2 \leq n_2. \tag{2.49}$$

Ist PO, aber nicht TO (z.B. weder $(1,2) \leq (2,1)$ noch $(2,1) \leq (1,2)$).
Sei

$$B := \big\{(1,1), (2,1), (1,2)\big\}. \tag{2.50}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \sup B = (2,2) \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
(2,1) \arrow[dr, no head] & & (1,2) \arrow[dl, no head] \\
 & (1,1) = \min B &
\end{tikzcd}$$

Gibt kein Max. von B.
Bew.: $(2,2) = \sup B$:

$$\forall_{(m,n) \in B} \quad (m,n) \leq (2,2).$$

Sei (m,n) ob. Schr. von B. Dann $(2,1) \leq (m,n) \Rightarrow 2 \leq m$,
$(1,2) \leq (m,n) \Rightarrow 2 \leq n$,
also $(2,2) \leq (m,n)$.
Andere Ordnung auf A (lexikographische Ord.):

$$(m_1, m_2) \leq (n_1, n_2) \;\Leftrightarrow\; m_1 < n_1 \;\vee\; (m_1 = n_1 \;\wedge\; m_2 \leq n_2). \tag{2.51}$$

Dies ist TO auf A.

Lem. 2.28: $\leq$ sei PO auf $A \neq \emptyset$, $\emptyset \neq B \subseteq A$.
Die Rel. $\geq$ mit

$$x \geq y \;\Leftrightarrow y \leq x \tag{2.52}$$

ist auch PO auf A und für alle $x \in A$ gilt:

$$\begin{aligned}
&x \leq\text{-untere Schr. für } B && \Leftrightarrow && x \geq\text{-ob. Schr. für } B, && (2.53a)\\
&x \leq\text{-ob. Schr. für } B && \Leftrightarrow && x \geq\text{-unt. Schr. für } B, && (2.53b)\\
&x = \min\nolimits_{\leq} B && \Leftrightarrow && x = \max\nolimits_{\geq} B, && (2.53c)\\
&x = \max\nolimits_{\leq} B && \Leftrightarrow && x = \min\nolimits_{\geq} B, && (2.53d)\\
&x = \inf\nolimits_{\leq} B && \Leftrightarrow && x = \sup\nolimits_{\geq} B, && (2.53e)\\
&x = \sup\nolimits_{\leq} B && \Leftrightarrow && x = \inf\nolimits_{\geq} B. && (2.53f)
\end{aligned}$$

Bew.: $\leq$ ref., antisym., trans.
$\Rightarrow \geq$ ref., antisym., trans. (klar).
Weiterhin:
x $\leq$-unt. Schr. für $B \Leftrightarrow \forall_{b \in B}\, x \leq b \Leftrightarrow \forall_{b \in B}\, b \geq x$
$\Leftrightarrow x$ $\geq$-ob. Schr. für B, was (2.53a) beweist.

Analog: (2.53b). (2.53a) $\Rightarrow$ (2.53c).
(2.53b) $\Rightarrow$ (2.53d).

(2.53e):

$$\begin{aligned} x = \inf_{\le} B &\Leftrightarrow x = \max_{\le}\{y \in A :\ y \le\text{-unt. Schr. für } B\} \\ &\Leftrightarrow x = \min_{\ge}\{y \in A :\ y \ge\text{-ob. Schr. für } B\} \\ &\Leftrightarrow x = \sup_{\ge} B, \end{aligned}$$

(2.53f) analog. $\square$

Prop. 2.29: Die El. $\max B$, $\min B$, $\sup B$, $\inf B$
sind eindeutig, sofern sie existieren.

Bew.: Übung. $\square$

Def. 2.30: $A, B \neq \emptyset$ seien Mengen mit PO $\le$.
$f : A \longrightarrow B$ heißt <u>(streng) isoton/wachsend/ordnungserhaltend</u> g.d.w.

$$\forall_{x,y \in A} \Big(x < y \ \Rightarrow\ f(x) \le f(y)\ \underbrace{(\text{bzw. } f(x) < f(y))}_{\text{für streng}}\Big); \tag{2.54a}$$

f heißt <u>(streng) antiton/fallend/ordnungsumkehrend</u> g.d.w.

$$\forall_{x,y \in A} \Big(x < y \ \Rightarrow\ f(x) \ge f(y)\ \underbrace{(\text{bzw. } f(x) > f(y))}_{\text{für streng}}\Big). \tag{2.54b}$$

f <u>(streng) monoton</u> g.d.w. f (str.) isoton oder antiton.

Prop. 2.31: $A, B, \le$ wie vorher, $f : A \longrightarrow B$.

(a) f (str.) isoton wird (str.) antiton, wenn $\le$ <u>entweder</u> auf A <u>oder</u> auf B durch $\ge$ ersetzt wird (und umgekehrt).

(b) Ist $\le$ TO auf A und f str. monoton, so ist f inj.

(c) Ist $\le$ TO auf A und f inv.bar und str. isoton (bzw. str. antiton), so ist auch f^{-1} str. isoton (bzw. str. antiton).

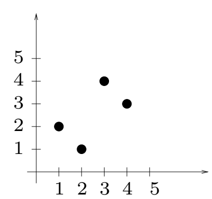
Bew.: (a) liest man aus (2.54) ab.

(b): Reicht f str. isoton zu betrachten (wegen (a)).
Sei f str. isoton.
$x \neq y \Rightarrow (x < y \vee y < x)$ (da $\leq$ TO auf A).
Also $f(x) < f(y) \vee f(y) < f(x)$, d.h., $f(x) \neq f(y)$,
d.h., f inj.

(c): Wieder reicht f str. isoton wegen (a).
Sei f str. isoton.
Für $u, v \in B$ mit $u < v$
folgt aus $u = f(f^{-1}(u))$ und $v = f(f^{-1}(v))$,
dass $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$
(sonst wäre $f^{-1}(v) < f^{-1}(u)$ (da $\leq$ TO auf A) und
f isoton $\Rightarrow v < u$). $\square$

Bsp. 2.32: (a)

	fallend	str. fallend	steigend	str. steigend
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ f(n) := 2n$	F	F	W	W
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ konstant	W	F	W	F
$\Vert$, $f(n) = \begin{cases} n-1 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ n+1 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$	F	F	F	F



(b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := -2x$, ist inv.b. $\wedge$ str. fallend,
$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f^{-1}(x) := -\frac{x}{2}$ ebenso.

(c) weglassen.

3. Natürliche Zahlen, Induktion, Größe von Mengen

3.1. Induktion & Rekursion

Induktion: Beweismethode für Aussagen der Form

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \phi(n). \tag{3.1}$$

Grundlage: $\mathbb{N}$ erfüllt die Peanoaxiome:

P1: $\mathbb{N}$ enthält ein ausgezeichnetes Element, genannt 1.

P2: Es gibt inj. Abb. $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$, genannt
Nachfolgerfkt. ($S(n)$: Nachfolger (successor) von n).

P3:

$$\underset{A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})}{\forall} \Big(1 \in A \;\wedge\; \underbrace{S(A) \subseteq A}_{\underset{n\in A}{\forall} \quad S(n)\in A} \;\Rightarrow\; A = \mathbb{N}\Big).$$

Bem. 3.1: In der axiomatischen Mengenlehre zeigt man,
dass es eine Menge $\mathbb{N}$ gibt, die P1, P2, P3 erfüllt
und <u>definiert</u> dann $2 := S(1)$, $3 := S(2)$, $\dots$, $n + 1 := S(n)$.

Th. 3.2 (Prinzip der Induktion): Gelten (a),(b) mit

(a) $\phi(1)$ ist wahr,

(b) $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \big(\phi(n) \;\Rightarrow\; \phi(n + 1)\big)$,

so ist (3.1) wahr.

Bew.: Sei $A := \{n \in \mathbb{N} : \phi(n)\}$. Zu zeigen: $A = \mathbb{N}$.
Es ist $1 \in A$ nach (a) und

$$n \in A \;\Rightarrow\; \phi(n) \overset{\text{(b)}}{\Rightarrow} \phi(n + 1) \Rightarrow\; S(n) = n + 1 \in A, \tag{3.2}$$

also $S(A) \subseteq A$ und dann $A = \mathbb{N}$ nach P3. $\square$

Bem. 3.3: Induktionsbeweis erfolgt in 2 Schritten:

(a) Ind.verankerung/Ind.anfang: Zeige $\phi(1)$ ist wahr.

(b) Ind.schritt: Zeige $\underbrace{\phi(n)}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} \Rightarrow \phi(n + 1)$.

Bsp. 3.4: Zeige:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \underbrace{\left(1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\right)}_{\phi(n)}: \tag{3.3}$$

$n=1$ (Ind.verankerung): $1=\frac{1\cdot 2}{2}$, d.h. $\phi(1)$ ist wahr.

Ind.voraussetzung: Annahme: $\phi(n)$ ist wahr.

Ind.schritt:

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+(n+1) &\overset{\phi(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)+2n+2}{2} \\ &= \frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

d.h. $\phi(n+1)$ ist wahr. □

Korollar 3.5: In Th. 3.2 darf man (b) ersetzen durch

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \left(\underbrace{\left(\underset{1\leq m\leq n}{\forall} \phi(m) \right)} \Rightarrow \phi(n+1) \right). \tag{3.5}$$

Bew.: Setze $\psi(n)$. Bew. von $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \psi(n)$ durch Ind.:
Ind.verankerung $(n=1)$: $\psi(1)=\phi(1)$ und
gilt nach Th. 3.2(a).
Ind.schritt: $\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)$ gilt wegen (3.5).
Also gilt $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \psi(n)$, also auch $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \phi(n)$. □

Kor. 3.6: $\underset{i\in I}{\forall} \phi(i)$ gilt, falls es $f:\mathbb{N}\longrightarrow I$ bij.
gibt mit

(a) $\phi\big(f(1)\big)$ ist wahr.

(b) $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \Big(\phi\big(f(n)\big) \Rightarrow \phi\big(f(n+1)\big)\Big)$.

Zusatz (endl. Induktion): Kor. 3.6 gilt auch für
$f:\{1,\dots,m\}\longrightarrow I$ bij. (in (b) steht dann statt $\mathbb{N}$
die Menge $\{1,\dots,m-1\}$).

Bew.: Nach Th. 3.2 gilt $\psi(n):=\phi\big(f(n)\big)$ für alle $n\in\mathbb{N}$.
Für $i\in I$ gilt für $n:=f^{-1}(i)$, dass $f(n)=i$.
Also ist $\phi(i)=\phi\big(f(n)\big)=\psi(n)$ wahr.
Zusatz: Sei $f:\{1,\dots,m\}\longrightarrow I$ bij. Zeige:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\Big(\big(n \le m \wedge \phi\big(f(n)\big)\big) \vee n > m\Big)}_{\psi(n)}.$$

Ind.verank. ($n = 1$): $\psi(1)$ gilt, da $1 \le m$ und $\phi(f(1))$ nach (a) gilt.
Ind.schritt:
Fall $1 \le n < m$: $\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)$ gilt wegen (b).
Fall $n \ge m$: $\psi(n+1)$ gilt, da $n+1 > m$.

Für $i \in I$ gilt für $n := f^{-1}(i)$, dass $n \le m$ und
$f(n) = i$.
$n \le m \wedge \psi(n) \Rightarrow \underbrace{\phi(f(n))}_{\phi(i)}$. □

Th. 3.7 (Rekursionssatz): Sei $A \neq \emptyset$, $x \in A$. Zu jeder Fkt.folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : A^n \longrightarrow A$, gibt es genau eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit

(i) $x_1 = x$.

(ii) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, x_{n+1} = f_n(x_1, \dots, x_n)$.

Bem.: Wie in Kor. 3.6 geht auch I statt $\mathbb{N}$.

Bew.: Eindeutigkeit: Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in A mit

$$x_1 = y_1 = x \quad \text{und} \tag{3.6a}$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \big(x_{n+1} = f_n(x_1, \dots, x_n) \wedge y_{n+1} = f_n(y_1, \dots, y_n)\big), \tag{3.6b}$$

so gilt

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{x_n = y_n}_{\phi(n)} : \tag{3.7}$$

Ind.verank. ($n = 1$): $\phi(1)$ gilt nach (3.6a).

Ind.vor.: $\forall_{m\in\{1,\dots,n\}} \quad x_m = y_m$.

Ind.schritt:

$$x_{n+1} \overset{(3.6b)}{=} f_n(x_1, \dots, x_n) \overset{(\phi(1),\dots,\phi(n))}{=} f_n(y_1, \dots, y_n) \overset{(3.6b)}{=} y_{n+1}, \tag{3.8}$$

d.h. $\phi(n+1)$ gilt.

Existenz: Nur im Skript mit (3.9) – (3.12). □

Bsp. 3.8: In Rekursion oft $g_n : A \longrightarrow A$ und

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \big(f_n : A^n \longrightarrow A, \quad f_n(a_1,\dots,a_n) := g_n(a_n)\big). \tag{3.13}$$

(a) Fakultätsfkt: $F : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n!$, rek.
def. durch

$$0! := 1, \quad 1! := 1, \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} (n+1)! := (n+1)\cdot n! \tag{3.14a}$$

(also $A = \mathbb{N}$, $g_n(x) := (n+1)\cdot x$).
Dann:

$$(n!)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1,1,2,6,24,\dots). \tag{3.14b}$$

(b) Sei $a, d \in \mathbb{R}$. Arithmetische Folge:

$$a_1 := a, \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} a_{n+1} := a_n + d, \tag{3.15a}$$

(also $A = \mathbb{R}$, $g_n = g$ mit $g(x) := x + d$).

$$a = 2,\ d = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2,\ 1.5,\ 1,\ \dots). \tag{3.15b}$$

(c) Sei $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Geometr. Folge:

$$x_1 := a, \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} x_{n+1} := x_n \cdot q \tag{3.16a}$$

($A = \mathbb{R}$, $g_n = g$ mit $g(x) := x \cdot q$).

$$a = 3,\ q = -2 \quad \Rightarrow \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3,\ -6,\ 12,\ \dots). \tag{3.16b}$$

Bsp. 3.9: **(a)** Fibonaccizahlen:

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} F_{n+1} := F_n + F_{n-1}, \tag{3.17a}$$

also $A = \mathbb{N}_0$ und

$$f_n : A^n \longrightarrow A, \quad f_n(a_1,\dots,a_n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ a_n + a_{n-1} & \text{für } n \geq 2. \end{cases} \tag{3.17b}$$

Also

$$(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \dots). \tag{3.17c}$$

(b) Sei $A := \mathbb{N}$, $x := 1$,

$$f_n : A^n \longrightarrow A, \quad f_n(a_1,\dots,a_n) := a_1 + \dots + a_n. \tag{3.18a}$$

Dann:

$$\begin{aligned} &x_1 = 1, \quad x_2 = f_1(1) = 1, \quad x_3 = f_2(1,1) = 2, \\ &x_4 = f_3(1,1,2) = 4, \quad \dots \end{aligned} \tag{3.18b}$$

Def. 3.10: **(a)** Summationssymbol: Sei $(a_1, a_2, \dots)$ Folge in A, '$+$' sei auf A definiert (z.B. $A = \mathbb{R}$). Def.

$$\sum_{i=1}^{1} a_i := a_1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i := a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ für } n \geq 1, \tag{3.19a}$$

also

$$f_n : A^n \longrightarrow A, \quad f_n(x_1, \dots, x_n) := x_n + a_{n+1}. \tag{3.19b}$$

[Statt i in (3.19a) geht alles (z.B. $j, \alpha, \nu, \dots$) außer n und a.]

Ist $\phi : \{1, \dots, n\} \longrightarrow I$ bij., so def.

$$\sum_{i \in I} a_i := \sum_{i=1}^{n} a_{\phi(i)}. \tag{3.19c}$$

$$\text{Auch:} \quad \sum_{i \in \emptyset} a_i := 0. \tag{3.19d}$$

(b) Produktsymbol (hier sei '$\cdot$' auf A def.):

$$\prod_{i=1}^{1} a_i := a_1, \quad \prod_{i=1}^{n+1} a_i := a_{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i \text{ für } n \geq 1, \tag{3.20a}$$

also

$$f_n : A^n \longrightarrow A, \quad f_n(x_1, \dots, x_n) := x_n \cdot a_{n+1}. \tag{3.20b}$$

Ist $\phi : \{1, \dots, n\} \longrightarrow I$ bij., so def.

$$\prod_{i \in I} a_i := \prod_{i=1}^{n} a_{\phi(i)}. \tag{3.20c}$$

$$\text{Auch:} \quad \prod_{i \in \emptyset} a_i := 1. \tag{3.20d}$$

Bsp. 3.11: **(a)** Für die arithm. Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus (3.15a) gilt

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad a_n = a + (n-1)d, \tag{3.21a}$$

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad S_n := \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\big(2\,a + (n-1)\,d\big). \tag{3.21b}$$

arithm. Summe $\nearrow$

Bew.: Induktion (Übung).

(b) Für die geom. Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (3.16a) gilt

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad x_n = a\,q^{n-1}, \tag{3.22a}$$

$$\underset{\text{geom. Summe} \nearrow}{\forall_{n\in\mathbb{N}}} \quad S_n := \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (a\,q^{i-1}) = a \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \begin{cases} n\,a & \text{für } q = 1, \\ \frac{a\,(1-q^n)}{1-q} & \text{für } q \neq 1. \end{cases} \tag{3.22b}$$

Bew. von (3.22a) (Ind.):
Ind.verank. ($n = 1$): $x_1 = a\,q^0 = a$ stimmt.
Ind.schritt:

$$x_{n+1} = x_n \cdot q \overset{\swarrow \text{ Ind.vor. } x_n = aq^{n-1}}{=} a\,q^{n-1} \cdot q = a\,q^n. \tag{3.23}$$

Für $q = 1$ folgt (3.22b) aus (3.21b).
Bew. von (3.22b) für $q \neq 1$ (Ind.):

$$\text{Zeige:} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \underbrace{S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}}_{\phi(n)}.$$

Ind.verank. ($n = 1$): $S_1 = \frac{a(1-q)}{1-q} = a$, d.h., $\phi(1)$ stimmt.
Ind.schritt:

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + x_{n+1} &\overset{\text{Ind.vor. } \phi(n)}{=} \frac{a(1-q^n)}{1-q} + aq^n \\ &= \frac{a(1-q^n) + aq^n(1-q)}{1-q} = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

d.h., $\phi(n+1)$ gilt.

3.2. Kardinalität: Die Mächtigkeit (Größe) von Mengen

Def. 3.12: **(a)** A, B heißen gleichmächtig g.d.w.
$\exists_{\varphi\colon A \longrightarrow B} \quad \varphi$ bij.

(b) A hat Kardinalität/Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$
(Notation: $\#A = n$) g.d.w.
$\underset{\varphi\colon A \longrightarrow \{1,\ldots,n\}}{\exists} \quad \varphi$ bij.
Auch $\#\emptyset := 0$.
A endlich g.d.w. $\underset{n \in \mathbb{N}_0}{\exists} \quad \#A = n$.
Sonst: A unendlich ($\#A = \infty$).
Achtung: Unendl. Mengen sind i.A. nicht
gleichmächtig, z.B. sind $\mathbb{N}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht
$||$ (siehe Th. 3.20 unten).

(c) A abzählbar g.d.w. A endl. oder A gleichmächtig
zu $\mathbb{N}$.

In diesem Aschnitt viele Ergebnisse ohne Beweis (bzw. Bew. nur im Skript).

Th. 3.13: Sei $A \neq \emptyset$ endlich.

(a) $B \subseteq A$ mit $A \neq B$
$\Rightarrow B$ endl. mit $\#B < \#A$.

(b) $a \in A \Rightarrow \#\big(A \setminus \{a\}\big) = \#A - 1$.

Th. 3.14: Für $\#A = \#B = n \in \mathbb{N}$ und $f : A \longrightarrow B$
sind äquivalent:

(i) f ist inj.

(ii) f ist surj.

(iii) f ist bij.

Lem. 3.15: Sei A endl. (d.h. $\#A = n \in \mathbb{N}_0$), $B \subseteq A$.
Dann: $\#(A \setminus B) = \#A - \#B$.

Bew.: Fall $B = \emptyset$: $\#(A \setminus B) = \#A = \#A - 0 = \#A - \#B$.
Fall $B \neq \emptyset$: Endliche Induktion über $\{1, \ldots, n\}$:

$$\underset{m \in \{1,\ldots,n\}}{\forall} \underbrace{\big(\#B = m \ \Rightarrow \ \#(A \setminus B) = \#A - \#B\big)}_{\phi(m)}.$$

Ind.verank. ($m = 1$): $\phi(1)$ gilt nach Th. 3.13(b).
Ind.vor.: Es gelte $\phi(m)$ für $1 \leq m < n$.
Ind.schritt: Sei $B \subseteq A$ mit $\#B = m + 1$, $b \in B$.

Setze $B_1 := B \setminus \{b\}$. Th. 3.13(b) $\Rightarrow \#B_1 = m$.
Wegen $A \setminus B = (A \setminus B_1) \setminus \{b\}$ folgt

$$\begin{aligned} \#(A \setminus B) &= \#\big((A \setminus B_1) \setminus \{b\}\big) = \#(A \setminus B_1) - 1 \\ &\overset{\phi(m)}{=} \#A - \#B_1 - 1 = \#A - \#B, \end{aligned}$$

d.h., $\phi(m+1)$ gilt. □

Th. 3.16: A, B endl. $\Rightarrow \#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

Th. 3.17: $A_1, \dots, A_n$ endl.

$$\Rightarrow \quad \# \prod_{i=1}^{n} A_i = \#\big(A_1 \times \cdots \times A_n\big) = \prod_{i=1}^{n} \#A_i. \tag{3.25}$$

Th. 3.18: $\#A = n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \#\mathcal{P}(A) = 2^n$.

Bem. 3.19: Widerspruchsbeweis/indirekter Beweis basiert auf

$$\begin{array}{c|c||c} A & \neg A & A \wedge \neg A \\ \hline \mathrm{W} & \mathrm{F} & \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \mathrm{W} & \mathrm{F} \end{array}. \tag{3.26}$$

Um B zu beweisen, zeigt man $\neg B \Rightarrow A \wedge \neg A$
für eine beliebige Aussage A. Da $A \wedge \neg A$ falsch ist,
muss auch $\neg B$ falsch sein, also B richtig.

Th. 3.20: Es gibt keine surj. Abb. $f: A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$
(in diesem Sinn ist immer $\#\mathcal{P}(A) > \#A$).

Bew.: Klar, für $A = \emptyset$. Für $A \neq \emptyset$ Widerspruchsbeweis:
Ang., $f: A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ ist surj. Def.

$$B := \{x \in A : x \notin f(x)\}. \tag{3.27}$$

$B \subseteq A \Rightarrow \underset{a \in A}{\exists} \quad f(a) = B$.
Wenn $a \in B$, so $a \notin f(a) = B$, d.h. $a \in B \Rightarrow a \in B \wedge \neg(a \in B)$,
also folgt $a \notin B$. Daraus folgt $a \in f(a) = B$.
Insgesamt: f surj. $\Rightarrow a \in B \wedge \neg(a \in B)$, d.h.,
f ist nicht surj. □

Th. 3.21: **(a)** Ist $\leq$ TO auf A und $\emptyset \neq B \subseteq A$ endl.,
so existieren $\max B$ und $\min B$.

(b) Jedes $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{N}$ hat ein Minimum.

Prop. 3.22: $A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow A$ abzählbar.

Prop. 3.23: Für $A \neq \emptyset$ sind äquivalent:

(i) A ist abzählbar.

(ii) Es gibt $f: A \longrightarrow \mathbb{N}$ inj.

(iii) Es gibt $g: \mathbb{N} \longrightarrow A$ surj.

Th. 3.24: Sind $A_1, \dots, A_n$ abzählbar, so ist $\prod_{i=1}^n A_i$ abzählbar.

Th. 3.25: Ist $(A_i)_{i\in I}$ abzählbare Familie abzählb. Mengen (also I abz.b. und alle A_i abz.b.), so ist auch $\bigcup_{i\in I} A_i$ abzählbar.

4. Reelle Zahlen

4.1. $\mathbb{R}$ als vollständig total geordneter Körper (engl.: field)

Def. 4.1: Eine TO $\leq$ auf $A \neq \emptyset$ heißt vollständig g.d.w. jede Teilmenge $\emptyset \neq B \subseteq A$, die nach oben beschr. ist, ein Sup. hat, d.h., g.d.w.

$$\forall_{B\in\mathcal{P}(A)\setminus\{\emptyset\}} \left(\left(\exists_{x\in A} \ \forall_{b\in B}\ b \leq x\right) \quad \Rightarrow \quad \exists_{s\in A}\ s = \sup B\right). \tag{4.1}$$

Lem. 4.2: TO $\leq$ auf $A \neq \emptyset$ ist vollst. g.d.w. jede nach unten beschr. Menge $\emptyset \neq B \subseteq A$ ein Inf. hat.

Bew.: "$\Rightarrow$": Setze

$$C := \{x \in A : x \text{ untere Schr. für } B\}. \tag{4.2}$$

Jedes $b \in B$ ist obere Schr. für C und nach (4.1) gibt es $s := \sup C$. Wenn $s \in C$, so $s = \inf B$. Tatsächlich gilt $s \in C$: $b \in B \Rightarrow b$ ob. Schr. für C, also $s \leq b$, da s die kleinste ob. Schr. von C ist. Also s unt. Schr. für B, d.h. $s \in C$ und $s = \inf B$.

"$\Leftarrow$" folgt nun aus Lem. 2.28. $\square$

Def. 4.3: $A \neq \emptyset$ mit Abb.

$$\circ : A \times A \longrightarrow A, \quad (x,y) \mapsto x \circ y \tag{4.3}$$

$\nwarrow$ Verknüpfung auf A (Bsp.: $A = \mathbb{R}$, "$\circ$" $=$ "$+$" oder "$\circ$" $=$ "$\cdot$")

heißt Gruppe bez. $\circ$ g.d.w. gelten:

(i) Assoziativität: $\underset{x,y,z \in A}{\forall} \quad x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z.$

(ii) Es gibt ein neutrales Element $e \in A$ mit

$$\underset{x \in A}{\forall} x \circ e = x.$$

(iii)

$$\underset{x \in A}{\forall} \quad \underset{\overline{x} \in A}{\exists} \quad x \circ \overline{x} = e.$$

$\nwarrow$ inverses Element zu x

Gruppe heißt kommutativ oder abelsch g.d.w.

(iv) $\underset{x,y \in A}{\forall} \quad x \circ y = y \circ x.$

Def. 4.4: $A \neq \emptyset$ mit Abb.

$$\begin{aligned} + : A \times A \longrightarrow A, &\quad (x,y) \mapsto \overset{\swarrow \text{ Addition}}{x + y}, \\ \cdot : A \times A \longrightarrow A, &\quad (x,y) \mapsto \overset{\swarrow \text{ Multiplikation}}{\underbrace{x \cdot y}_{\text{auch } xy}} \end{aligned} \tag{4.4}$$

heißt Körper (engl.: field) g.d.w.

(i) A ist kom. Gr. bez. $+$ (das neutr. El. bez. $+$ wird mit 0 bezeichnet).

(ii) $A \setminus \{0\}$ ist kom. Gr. bez. $\cdot$ (das neutr. El. bez. $\cdot$ wird mit 1 bezeichnet).

(iii)

$$\text{Distributivgesetz:} \quad \underset{x,y,z \in A}{\forall} x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z. \tag{4.5}$$

Ein Körper A mit TO $\leq$ heißt total geordneter Körper g.d.w. gilt:

(iv) $\leq$ ist mit $+$ und $\cdot$ verträglich, d.h.

$$\underset{x,y,z \in A}{\forall} \big(x \leq y \ \Rightarrow \ x + z \leq y + z \big), \tag{4.6a}$$

$$\underset{x,y \in A}{\forall} \big(0 \leq x \wedge 0 \leq y \ \Rightarrow \ 0 \leq xy \big). \tag{4.6b}$$

Ist A zuätzlich vollst. nach Def. 4.1, so
heißt A vollst. tot. geord. Körper.

Th. 4.5: Es gibt einen vollst. tot. geord. Körper $\mathbb{R}$ (genannt Menge der reellen Zahlen). $\mathbb{R}$ ist eindeutig in folgendem Sinn:
Ist A irgendein vollst. tot. geord. Körper, so gibt es genau einen Isomorphismus $\phi: A \longrightarrow \mathbb{R}$, d.h. ϕ ist bij. Abb. mit

$$\forall_{x,y\in A} \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y), \tag{4.7a}$$

$$\forall_{x,y\in A} \phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \tag{4.7b}$$

$$\forall_{x,y\in A} \big(x < y \;\Rightarrow\; \phi(x) < \phi(y)\big). \tag{4.7c}$$

Bew.: Siehe Literatur im Skript. □

Th. 4.6/4.7: Es gelten alle üblichen Rechengesetze in $\mathbb{R}$.

Z.B. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ hat genau ein Inverses bez. $+$.
Bew.: Seien a, b inv. zu x. Dann:
$a = a + 0 = a + x + b = 0 + b = b$.

$x + a = y + a \;\Rightarrow\; x = y$ (*)
Bew.: $x + a = y + a \Rightarrow x = x + a - a = y + a - a = y$.

$x \cdot 0 = 0$.
Bew.: $x \cdot 0 + x \cdot 1 \overset{(4.5)}{=} x \cdot (0+1) = x \cdot 1 = 0 + x \cdot 1 \quad\Rightarrow\quad x \cdot 0 = 0$ nach (*).

$xy = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \vee y = 0$ (**)
Bew.: $xy = 0 \wedge x \neq 0 \;\Rightarrow\; y = 1 \cdot y = x^{-1}xy = x^{-1} \cdot 0 = 0$.

$x \leq y \wedge z \geq 0 \;\Rightarrow\; xz \leq yz$.
Bew.: $x \leq y \;\Rightarrow\; 0 \leq y - x \overset{(4.6b)}{\Rightarrow} 0 \leq (y-x)z = yz - xz \;\Rightarrow\; xz \leq yz$.

$x \leq y \wedge z \leq 0 \;\Rightarrow\; xz \geq yz$.
Bew.: $x \leq y \;\Rightarrow\; 0 \leq y - x \overset{(4.6b)}{\Rightarrow} 0 \leq (y-x)(-z) = xz - yz \;\Rightarrow\; xz \geq yz$.

$x \neq 0 \;\Rightarrow\; x^2 := x \cdot x > 0$.
Bew.: $0 \leq x \overset{(4.6b)}{\Rightarrow} 0 \leq x^2$,
$x \leq 0 \;\Rightarrow\; 0 \leq -x \overset{(4.6b)}{\Rightarrow} 0 \leq (-x)(-x) = x^2 \quad\Rightarrow\quad x^2 > 0$ nach (**).

$x < y \wedge 0 < \lambda < 1 \;\Rightarrow\; x < \lambda x + (1-\lambda)y < y$.
Speziell für $\lambda = \frac{1}{2}$ folgt $x < \frac{x+y}{2} < y$.
Bew.: $0 < \lambda \Rightarrow \lambda x < \lambda y$.
$1 - \lambda > 0 \Rightarrow (1-\lambda)x < (1-\lambda)y$
$\Rightarrow x = \lambda x + (1-\lambda)x < \lambda x + (1-\lambda)y < \lambda y + (1-\lambda)y = y$.

Th. 4.8: Sei $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Def.

$$A + B := \{a + b : \; a \in A \wedge b \in B\}, \tag{4.8a}$$
$$\lambda A := \{\lambda a : \; a \in A\}. \tag{4.8b}$$

Für A, B beschränkt gilt:

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B, \tag{4.9a}$$
$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B, \tag{4.9b}$$
$$\sup(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \cdot \sup A & \text{für } \lambda \geq 0, \\ \lambda \cdot \inf A & \text{für } \lambda < 0, \end{cases} \tag{4.9c}$$
$$\inf(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \cdot \inf A & \text{für } \lambda \geq 0, \\ \lambda \cdot \sup A & \text{für } \lambda < 0. \end{cases} \tag{4.9d}$$

Bew.: Übung. □

4.2. Wichtige Teilmengen

Bem. 4.9: $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$: 1 neutr. El. bez. "$\cdot$".
Def. $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$, $\dots$, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ erfüllt
Peanoaxiome P1, P2, P3 aus Abschnitt 3.1.
Axiomatische Mengenlehre: Def. $\mathbb{N}$ zuerst (ähnlich wie
in Bem. 1.27, Def. 1.26), konstruiere daraus $\mathbb{R}$ (siehe Literatur im Skript).

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \{1,2,3,\dots\}, && \text{(4.10a)}\\
\mathbb{N}_0 &:= \mathbb{N} \cup \{0\}, && \text{(4.10b)}\\
\mathbb{Z}^- &:= \{-n:\ n \in \mathbb{N}\}, && \text{(4.10c)}\\
\mathbb{Z} &:= \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{N}_0 \quad \leftarrow \text{ganze Zahlen}, && \text{(4.10d)}\\
\mathbb{Q}^+ &:= \{m/n:\ m,n \in \mathbb{N}\}, && \text{(4.10e)}\\
\mathbb{Q}_0^+ &:= \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}, && \text{(4.10f)}\\
\mathbb{Q}^- &:= \{-q:\ q \in \mathbb{Q}^+\}, && \text{(4.10g)}\\
\mathbb{Q}_0^- &:= \mathbb{Q}^- \cup \{0\}, && \text{(4.10h)}\\
\mathbb{Q} &:= \mathbb{Q}_0^+ \cup \mathbb{Q}^- \quad \leftarrow \text{rationale Zahlen}, && \text{(4.10i)}\\
\mathbb{R}^+ &:= \{x \in \mathbb{R}:\ x > 0\} \quad \text{(positive Zahlen)}, && \text{(4.10j)}\\
\mathbb{R}_0^+ &:= \{x \in \mathbb{R}:\ x \geq 0\} \quad \text{(nichtneg.} \quad || \quad), && \text{(4.10k)}\\
\mathbb{R}^- &:= \{x \in \mathbb{R}:\ x < 0\} \quad \text{(negative} \quad || \quad), && \text{(4.10l)}\\
\mathbb{R}_0^- &:= \{x \in \mathbb{R}:\ x \leq 0\} \quad \text{(nichtpos.} \quad || \quad). && \text{(4.10m)}
\end{aligned}
$$

Intervalle für $a \leq b$:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R}:\ a \leq x \leq b\} && \text{(beschr. abg. Int.)}, && \text{(4.11a)}\\
]a,b[&:= \{x \in \mathbb{R}:\ a < x < b\} && (\ || \ \text{offenes} \ || \ ), && \text{(4.11b)}\\
]a,b] &:= \{x \in \mathbb{R}:\ a < x \leq b\} && (\ || \ \text{halboffenes} \ || \ ), && \text{(4.11c)}\\
[a,b[&:= \{x \in \mathbb{R}:\ a \leq x < b\} && (\ || \ \text{halboffenes} \ || \ ), && \text{(4.11d)}\\
]-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R}:\ x \leq b\} && \text{(unbeschr. abg. Int.)}, && \text{(4.11e)}\\
]-\infty,b[&:= \{x \in \mathbb{R}:\ x < b\} && (\ || \ \text{offenes} \ || \ ), && \text{(4.11f)}\\
[a,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R}:\ a \leq x\} && \text{(unbeschr. abg. Int.)}, && \text{(4.11g)}\\
]a,\infty[&:= \{x \in \mathbb{R}:\ a < x\} && (\ || \ \text{offenes} \ || \ ). && \text{(4.11h)}
\end{aligned}
$$

Für a, b beliebig, setze
$c := \min\{a,b\}$, $d := \max\{a,b\}$,

$$[a,b] := [c,d], \quad]a,b[:=]c,d[,$$

$$]a,b] := [c,d] \setminus \{a\} = \begin{cases}]c,d] & \text{für } a \leq b, \\ [c,d[& \text{für } b \leq a, \end{cases} \quad [a,b[:= [c,d] \setminus \{b\} = \begin{cases} [c,d[& \text{für } a \leq b, \\ ]c,d] & \text{für } b \leq a. \end{cases} \tag{4.11i}$$

Für $a = b$ sind die Intervalle degeneriert/trivial mit
$[a,a] = \{a\}$, $]a,a[=]a,a] = [a,a[= \emptyset$.

Th. 4.10 (archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$): Seien $\epsilon, x \in \mathbb{R}$.
$\epsilon > 0 \ \wedge \ x > 0 \Rightarrow \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists} \quad n\epsilon > x.$

Bew.: Widerspruchsbeweis: Ang., es gibt ob. Schr. $x \in \mathbb{R}$ von $A := \{n\,\epsilon : \ n \in \mathbb{N}\}$. Nach (4.1) gibt es $s \in \mathbb{R}$ mit $s := \sup A$, d.h. $s - \epsilon$ ist nicht ob. Schr. von A, d.h. $\underset{n\in\mathbb{N}}{\exists} \quad n\epsilon > s - \epsilon$. Dann ist $(n+1)\epsilon > s$ im Widerspruch zu $s = \sup A$. Also kann A keine ob. Schr. haben. □

5. Komplexe Zahlen

5.1. Definition und grundlegende Arithmetik

Wegen $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Th. 4.7(c)), hat $x^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{R}$ keine Lösung.
Gesucht: Körper $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$ so, dass es $i \in \mathbb{C}$ gibt mit $i^2 = -1$.
Da in $\mathbb{C}$ die üblichen Rechengesetze gelten sollen, folgt dann für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$:

$$z + w = x + iy + u + iv = x + u + i(y + v), \tag{5.1a}$$

$$zw = (x + iy)(u + iv) = xu - yv + i(xv + yu). \tag{5.1b}$$

Außerdem:
$x + iy = u + iv \Rightarrow (x - u)^2 = -(v - y)^2$
$\Rightarrow x - u = 0 = v - y$, also $x = u \ \wedge \ y = v$.
$\rightarrow$ Idee: Elemente von $\mathbb{C}$ sind <u>Paare</u> $z = (x, y)$ reeller Zahlen.

Def. 5.1: Die Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ heißt Menge der komplexen Zahlen. Addition und Multiplikation motiviert durch (5.1):

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \big((x,y),(u,v)\big) \mapsto (x,y)+(u,v) := (x+u, y+v), \tag{5.2}$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \big((x,y),(u,v)\big) \mapsto (x,y)\cdot(u,v) := (xu-yv,\, xv+yu). \tag{5.3}$$

Th. 5.2: **(a)** $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ist ein Körper mit
$(0,0)$: neutrales El. der Addition,
$(1,0)$: neutrales El. der Mult.,

$$-z := (-x,-y) \tag{5.4a}$$

ist additiv invers zu $z=(x,y)$,

$$z^{-1} := \frac{1}{z} := \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \tag{5.4b}$$

ist multiplikativ invers zu $z=(x,y) \neq (0,0)$.

(b) Mit $w-z := w+(-z)$ für $w,z \in \mathbb{C}$ und $\frac{w}{z} := wz^{-1}$ für $w,z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq (0,0)$ gelten alle Regeln aus Th. 4.6 in $\mathbb{C}$ (d.h. alle aus $\mathbb{R}$ bekannten algebraischen Rechenregeln, die kein $\leq$ oder $\geq$ enthalten).

(c) Die Abb.

$$\iota : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \iota(x) := (x,0), \tag{5.5}$$

ist ein Monomorphismus, d.h. injektiv mit

$$\underset{x,y\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \iota(x+y) = \iota(x)+\iota(y), \tag{5.6a}$$

$$\underset{x,y\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \iota(xy) = \iota(x)\cdot\iota(y). \tag{5.6b}$$

Man identifiziert meist $\mathbb{R}$ und $\iota(\mathbb{R})$ und schreibt x statt $(x,0)$.

Bew.: (a), (c): Übung. (b) folgt aus (a), da Th. 4.6 in jedem Körper gilt. $\square$

Not. 5.3: $i := (0,1)$ heißt imaginäre Einheit
$\big($ tatsächlich gilt
$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1\big)$.
Man schreibt für $z = (x,y) \in \mathbb{C}$:

$$z = (x,y) = x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1) = x + iy. \tag{5.7}$$

$\operatorname{Re} z := x$ heißt Realteil von z;
$\operatorname{Im} z := y$ heißt Imaginärteil von z;
z heißt rein imaginär für $\operatorname{Re} z = 0$.

Bem. 5.4: Es gibt keine TO "$\leq$" auf $\mathbb{C}$, die mit
$+$ und $\cdot$ verträglich ist ((4.6) kann für $\leq$ nicht gelten):
Sonst (siehe Th. 4.7(c),(f)): $\left.\begin{array}{r} 0 < 1^2 = 1 \\ 0 < i^2 = -1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 0 < 1 + (-1) = 0,$
was falsch ist.
Die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{C}$ (vgl. (2.51))
ist eine TO auf $\mathbb{C}$ (für die (4.6) nicht gilt).

Def. & Bem. 5.5: Für $z = x + iy$ heißt
$\bar{z} := x - iy$ die (komplex) konjugierte Zahl zu z.
Regeln für $z = x + iy$, $w = u + iv$:

(a) $\overline{z+w} = x + u - iy - iv = \bar{z} + \bar{w}$,
$\overline{zw} = xu - yv - (xv + yu)i = (x - iy)(u - iv) = \bar{z}\bar{w}$.

(b) $z + \bar{z} = 2x = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \bar{z} = 2yi = 2i \operatorname{Im} z$.

(c) $z = \bar{z} \ \Leftrightarrow\ x + iy = x - iy \ \Leftrightarrow\ y = 0 \ \Leftrightarrow\ z \in \mathbb{R}$.

(d) $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_0^+$.

Not. 5.6: Ganzzahlige Exponenten werden rekursiv
def. für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$z^0 := 1, \quad \underset{n \in \mathbb{N}_0}{\forall} \quad z^{n+1} := z \cdot z^n, \quad \text{und für } z \neq 0\text{:} \quad z^{-n} := (z^{-1})^n. \tag{5.8}$$

Th. 5.7: Potenzregeln (für $m, n \in \mathbb{N}_0$ sei $z, w \in \mathbb{C}$; für
$m, n \in \mathbb{Z}$ sei $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$):

(a) $z^{m+n} = z^m \cdot z^n$.

(b) $z^n w^n = (zw)^n$.

(c) $(z^m)^n = z^{mn}$.

Bew.: 3 einfache Induktionen für $n \in \mathbb{N}_0$, die
Fälle $n \in \mathbb{Z}$ folgen dann auch leicht. □

5.2. Vorzeichen und Betrag

- Betrag komplexer Zahlen benötigt Begriff der (Quadrat-) Wurzel pos. reeller Zahlen.
- Brauchen Begriff der Stetigkeit, um zu zeigen, dass jedes $x \in \mathbb{R}_0^+$ genau eine Wurzel hat (Abschnitt 7.2.5 unten).
- Bis dahin werden wir die Existenz eindeutiger Wurzeln annehmen.
- Für Betrag reeller Zahlen, wird Wurzel nicht benötigt (Lem. 5.10 unten), so dass die Annahme der Ex. von Wurzeln in 7.2.5 nicht benutzt wird (was unzulässig wäre).

Def. & Bem. 5.8: $y \in \mathbb{R}_0^+$ heißt (Quadrat-)wurzel von $x \in \mathbb{R}_0^+$ g.d.w. $y^2 = x$ (Notation: $\sqrt{x} := y$).
In Abschnitt 7.2.5 werden wir zeigen, dass jedes $x \in \mathbb{R}_0^+$ genau eine Wurzel hat, und die Fkt.
$f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $f(x) := \sqrt{x}$, streng steigend (speziell: injektiv) ist.

Def. 5.9: **(a)** Def. die Vorzeichenfkt. (auch Signumfkt.):

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

(ist nur für reelle Zahlen def.).

(b) Def. die Betragsfkt.

$$\operatorname{abs} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad z = x + iy \mapsto |z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{5.10}$$

Lem. 5.10:

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad |x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

Bew.:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases} \tag{5.12}$$

□

Th. 5.11: Regeln für $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $z \neq 0 \;\Rightarrow\; |z| > 0$.

(b) $||z|| = |z|$.

(c) $|z| = |\bar{z}|$.

(d) $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

(e) $|zw| = |z||w|$.

(f) $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$ für $w \neq 0$.

(g) Dreiecksungleichung:

$$|z + w| \leq |z| + |w|. \tag{5.13}$$

(h) Umgekehrte Dreiecksungl.:

$$\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|. \tag{5.14}$$

Bew.: Bew. für $z, w \in \mathbb{C}$ (für $z, w \in \mathbb{R}$ folgt alles direkt aus (5.11), ohne Benutzung von Wurzeln):

Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(a): $z \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \,\vee\, y \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0 \,\vee\, y^2 > 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 > 0 \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$.

(b): $a := |z| \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow |a| = \sqrt{a^2} = a = |z|$.

(c): $\bar{z} = x - iy \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

(d): Es ist $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Setze $a := \max\{|x|, |y|\}$.
Dann $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2$
$\Rightarrow a \leq |z| \leq |x| + |y|$.

(e) folgt aus

$$|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}\,w\bar{w} = |z|^2\,|w|^2.$$

(f): Sei $z = 1$ und $w = u + iv$. Dann:

$$|w^{-1}|^2 \overset{(5.4b)}{=} \frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} = \frac{1}{u^2+v^2} = \left(|w|^{-1}\right)^2,$$

$\Rightarrow |w^{-1}| = |w|^{-1}$.
Nun z beliebig. Dann:
$|\frac{z}{w}| = |zw^{-1}| = |z||w^{-1}| = |z||w|^{-1} = \frac{|z|}{|w|}$.

(g) folgt aus

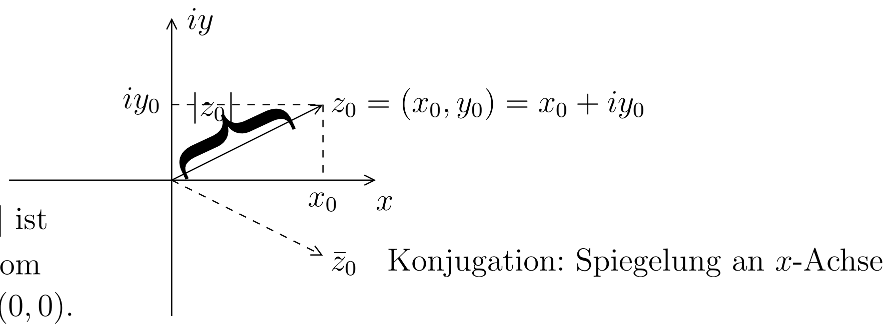
$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{w} \\ &\overset{\text{Def. \& Bem. 5.5(b)}}{=} |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\overset{(d)}{\leq} |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = \left(|z|+|w|\right)^2. \end{aligned}$$

(h):

$$\left.\begin{aligned} |z| = |z-w+w| &\overset{(g)}{\leq} |z-w| + |w| \quad \Rightarrow \quad |z| - |w| \leq |z-w|, \\ |w| = |w-z+z| &\overset{(g)}{\leq} |z-w| + |z| \quad \Rightarrow -(|z|-|w|) \leq |z-w|, \end{aligned}\right\} \overset{(5.11)}{\Rightarrow} \big||z|-|w|\big| \leq |z-w|.$$

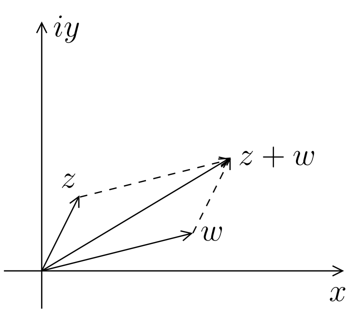
□

Bem. 5.12: Veranschaulichung von $(x, y) = x + iy$ in der komplexen Ebene:

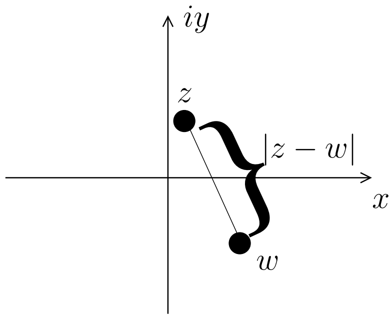


Betrag $|z_0|$ ist Abstand vom Ursprung $(0, 0)$.

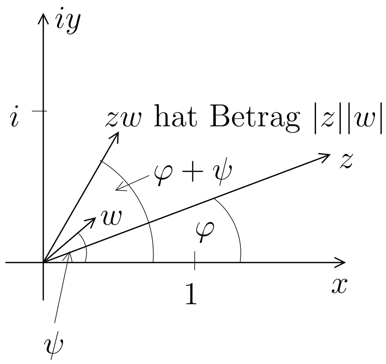
Addition ist Vektoraddition in Ebene:



$|z-w|$ ist Abstand der Punkte $z=(x,y)$, $w=(u,v)$



Multiplikation:
Beträge multipl., Winkel addieren (klarer später mit Polarkoordinaten)



5.3. Summen & Produkte

Th. 5.13: **(a)** Sei $n \in \mathbb{N}$; $\lambda, \mu, z_j, w_j \in \mathbb{C}$ mit $j \in \{1, \dots, n\}$.
Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda\, z_j + \mu\, w_j) = \lambda \sum_{j=1}^{n} z_j + \mu \sum_{j=1}^{n} w_j.$$

(b)

$$\underset{n\in\mathbb{N}_0}{\forall} \quad \underset{z\in\mathbb{C}}{\forall} \quad (1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^n)$$
$$= (1-z)\sum_{j=0}^{n} z^j = 1 - z^{n+1}.$$

(c)

$$\underset{n\in\mathbb{N}_0}{\forall} \quad \underset{z,w\in\mathbb{C}}{\forall} \quad w^{n+1} - z^{n+1} = (w-z)\sum_{j=0}^{n} z^j\, w^{n-j}$$
$$= (w-z)(w^n + zw^{n-1} + \cdots + z^{n-1}w + z^n).$$

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$; $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ für $j \in \{1,\ldots,n\}$. Dann gilt:

$$\left(\underset{j=1,\ldots,n}{\forall} x_j \leq y_j\right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \leq \sum_{j=1}^{n} y_j$$

("=" gilt nur, falls $\underset{j=1,\ldots,n}{\forall} x_j = y_j$).

(e)

$$\left(\underset{j=1,\ldots,n}{\forall} 0 < x_j \leq y_j\right) \quad \Rightarrow \quad \prod_{j=1}^{n} x_j \leq \prod_{j=1}^{n} y_j$$

("=" gilt nur, falls $\underset{j=1,\ldots,n}{\forall} x_j = y_j$).

(f) Dreiecksungleichung (Δ-Ungl.):

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j| \quad \text{für } z_1,\ldots,z_n \in \mathbb{C}.$$

Bew.: Alles einfache Induktionen. Wir machen (c) und lassen die anderen Fälle als Übung:

(c): Ind.verank. ($n=0$): $w^{0+1} - z^{0+1} = w - z = (w-z)\underbrace{z^0\, w^{0-0}}_{1}$ stimmt.

Ind.schritt:

$$\begin{aligned}
(w-z)\sum_{j=0}^{n+1} z^j\, w^{n+1-j} &= (w-z)\left(z^{n+1}w^0 + \sum_{j=0}^{n} z^j\, w^{n+1-j}\right)\\
&= (w-z)z^{n+1} + (w-z)\, w \sum_{j=0}^{n} z^j\, w^{n-j}\\
&\overset{\text{Ind.vor.}}{=} (w-z)\, z^{n+1} + w(w^{n+1} - z^{n+1}) = w^{n+2} - z^{n+2}.
\end{aligned}$$

$\square$

5.4. Binomialkoeffizienten & Binomischer Lehrsatz

Ziel: $(z+w)^n$ als Summe schreiben. Für $n = 0, \dots, 3$:
$(z+w)^0 = 1$, $(z+w)^1 = z+w$, $(z+w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$,
$(z+w)^3 = z^3 + 3z^2w + 3zw^2 + w^3$. Die Koeffizienten ergeben sich aus dem sogenannten <u>Pascalschen Dreieck</u>:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n=0: & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1: & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2: & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3: & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4: & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & & & & & \backslash + / & & & & & & \\
n=5: & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
\tag{5.15}
$$

Einträge von Zeile n werden mit $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ bezeichnet.
Beobachtung:

$$
\underset{n\in\mathbb{N}_0}{\forall} \left(\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \text{ für } k \in \{1,\dots,n\} \right). \tag{5.16}
$$

Soviel zur Motivation.

Def. 5.14: Für $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$ def. den <u>Binomialkoeffizienten</u>

$$
\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha+1-j}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}. \tag{5.17}
$$

Prop. 5.15: **(a)**

$$\underset{\alpha\in\mathbb{C}}{\forall}\quad\underset{k\in\mathbb{N}}{\forall}\quad\binom{\alpha}{0}=1,\quad\binom{\alpha+1}{k}=\binom{\alpha}{k-1}+\binom{\alpha}{k}. \tag{5.18}$$

(b)

$$\underset{n\in\mathbb{N}_0}{\forall}\quad\binom{n}{n}=1. \tag{5.19}$$

(insbesondere gilt (5.16))

Bew.: (a): $\binom{\alpha}{0}=1$ nach (5.17). Weiter:

$$\underset{\substack{k\in\mathbb{N},\\ \alpha\in\mathbb{C}}}{\forall}\quad\binom{\alpha}{k}=\prod_{j=1}^{k}\frac{\alpha+1-j}{j}=\frac{\alpha+1-k}{k}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\alpha+1-j}{j}=\binom{\alpha}{k-1}\frac{\alpha+1-k}{k}, \tag{5.20}$$

also

$$\begin{aligned}\underset{\substack{k\in\mathbb{N},\\ \alpha\in\mathbb{C}}}{\forall}\quad\binom{\alpha}{k-1}+\binom{\alpha}{k}&=\binom{\alpha}{k-1}\left(1+\frac{\alpha+1-k}{k}\right)=\binom{\alpha}{k-1}\frac{\alpha+1}{k}\\&=\frac{\alpha+1}{k}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\alpha+1-j}{j}=\prod_{j=1}^{k}\frac{\alpha+2-j}{j}=\binom{\alpha+1}{k}.\end{aligned} \tag{5.21}$$

(b): $\binom{0}{0}=1$ nach (5.17). Bew. für $n\in\mathbb{N}$ durch Ind.:
Ind.verank. ($n=1$): $\binom{1}{1}=\frac{1+1-1}{1}=1$ stimmt.
Ind.schritt:

$$\binom{n+1}{n+1}=\prod_{j=1}^{n+1}\frac{n+1+1-j}{j}=\frac{n+1}{n+1}\prod_{j=1}^{n}\frac{n+1-j}{j}=\binom{n}{n}\overset{\text{Ind.vor.}}{=}1. \tag{5.22}$$

$\square$

Th. 5.16 (Binomischer Lehrsatz):

$$\forall_{z,w\in\mathbb{C}} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}_0} \quad (z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k$$
$$= z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} w + \cdots + \binom{n}{n-1} z w^{n-1} + w^n. \tag{5.23}$$

Bew.: Ind. über $n \in \mathbb{N}_0$: Ind.verank. ($n = 0$): $(z+w)^0 = 1 = \binom{0}{0} z^{0-0} w^0$ stimmt.
Ind.schritt:

$$(z+w)^{n+1} = (z+w)\,(z+w)^n = z\,(z+w)^n + w\,(z+w)^n. \tag{5.24}$$

Weiter gilt

$$z\,(z+w)^n \overset{\text{Ind.vor.}}{=} z \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n+1-k} w^k$$
$$\overset{\binom{n}{n+1}=0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} z^{n+1-k} w^k, \tag{5.25}$$
$$w\,(z+w)^n \overset{\text{Ind.vor.}}{=} w \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} w^{k+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} z^{n+1-k} w^k. \tag{5.26}$$

(5.25), (5.26) in (5.24) eingesetzt:

$$(z+w)^{n+1} = \binom{n}{0} z^{n+1} w^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) z^{n+1-k} w^k$$
$$\overset{\text{Prop. 5.15}}{=} \binom{n+1}{0} z^{n+1} w^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} z^{n+1-k} w^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} z^{n+1-k} w^k, \tag{5.27}$$

wie gewünscht. □

Kor. 5.17:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_0} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n, \tag{5.28a}$$
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0. \tag{5.28b}$$

Bew.: (5.28a) ist (5.23) mit $z = w = 1$;
(5.28b) ist (5.23) mit $z = 1$ und $w = -1$. $\square$

Prop. 5.18: **(a)**

$$\forall_{\substack{\alpha\in\mathbb{C},\\ k\in\mathbb{N}_0}} \quad \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha+j}{j} = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha+1}{1} + \dots + \binom{\alpha+k}{k} = \binom{\alpha+k+1}{k}. \tag{5.29}$$

(b)

$$\forall_{n,k\in\mathbb{N}_0} \left(k \le n \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right). \tag{5.30}$$

Für $n \ge 1$ ist $\binom{n}{k} = \#\mathcal{P}_k(\{1,\dots,n\})$ mit

$$\mathcal{P}_k(A) := \big\{ B \in \mathcal{P}(A) : \#B = k \big\}, \tag{5.31}$$

d.h., $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen
Teilmengen von $\{1,\dots,n\}$.

(c)

$$\forall_{n,k\in\mathbb{N}_0} \quad \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{n} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}. \tag{5.32}$$

Bew.: (a) und (b) durch Induktion (Übung).
(c):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{n} &\overset{(5.30)}{=} \sum_{j=0}^{k} \frac{(n+j)!}{n!(n+j-n)!} \overset{(5.30)}{=} \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j} \\ &\overset{(5.29)}{=} \binom{n+k+1}{k} \overset{(5.30)}{=} \frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)!} = \binom{n+k+1}{n+1}. \end{aligned}$$

$\square$

6. Polynome

6.1. Arithmetik $\mathbb{K}$-wertiger Fkt

Not. 6.1: Wenn wir im Folgenden $\mathbb{K}$ schreiben, so darf für $\mathbb{K}$ sowohl $\mathbb{R}$ als auch $\mathbb{C}$ stehen.

Not. 6.2: Sei $A \neq \emptyset$ Menge; $f, g : A \longrightarrow \mathbb{K}$. Def.

$$(f+g) : A \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad (f+g)(x) := f(x) + g(x), \tag{6.1a}$$

$$\forall_{\lambda \in \mathbb{K}} \quad (\lambda f) : A \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \tag{6.1b}$$

$$(fg) : A \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad (fg)(x) := f(x)g(x), \tag{6.1c}$$

$$(f/g) : A \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad (f/g)(x) := f(x)/g(x) \quad \text{für } g(x) \neq 0, \tag{6.1d}$$

$$\operatorname{Re} f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (\operatorname{Re} f)(x) := \operatorname{Re}(f(x)), \tag{6.1e}$$

$$\operatorname{Im} f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (\operatorname{Im} f)(x) := \operatorname{Im}(f(x)). \tag{6.1f}$$

Nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\max(f,g) : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \max(f,g)(x) := \max\big\{f(x), g(x)\big\}, \tag{6.1g}$$

$$\min(f,g) : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \min(f,g)(x) := \min\big\{f(x), g(x)\big\}, \tag{6.1h}$$

$$\text{pos. Anteil:} \quad f^+ : A \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f^+ := \max(f, 0), \tag{6.1i}$$

$$\text{neg. Anteil:} \quad f^- : A \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f^- := \max(-f, 0). \tag{6.1j}$$

Wieder auch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$|f| : A \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad |f|(x) := |f(x)|. \tag{6.1k}$$

Für $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt dann

$$|f| = f^+ + f^-. \tag{6.1l}$$

6.2. Polynome

Def. 6.3: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Jede Fkt. $\mu : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $\mu(x) := x^n$, heißt Monom. Ein Polynom ist eine Linearkombination von Monomen, also eine Fkt.

$$P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \tag{6.2}$$

mit $a_j \in \mathbb{K}$.

$\nwarrow$ Koeffizienten von P

Grad von $P \not\equiv 0$: $\deg(P) := \max\{j \in \mathbb{N}_0 : a_j \neq 0\}$.
Für $P \equiv 0$ (alle $a_j = 0$), setze $\deg(P) := -1$.
Ein Pol. P vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ ist durch $a_0, \dots, a_n$ eindeutig bestimmt und umgekehrt (Th. 6.6(b)).
$\deg(P) \leq 0$: konstante Fkt.
$\deg(P) \leq 1$: $P(x) = a + bx$, affine Fkt (auch lineare Fkt, was aber eigentlich nur für $a = 0$ korrekt ist, da für lin. Fkt. $P(0) = 0$ sein muss).
$\deg(P) \leq 2$: $P(x) = a + bx + cx^2$, quadratische Fkt.

Gilt $P(\xi) = 0$, so heißt $\xi \in \mathbb{K}$ Nullstelle oder Wurzel von P.
Rationale Fkt.: P/Q mit Pol. P, Q.

Bem. 6.4: Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ und P, Q Pol. Dann sind auch λP, $P+Q$ und PQ Pol. Genauer:
$\lambda = 0 \vee P \equiv 0 \Rightarrow \lambda P \equiv 0$; $P \equiv 0 \Rightarrow P+Q = Q$;
$P \equiv 0 \vee Q \equiv 0 \Rightarrow PQ \equiv 0$.
Für $\lambda \neq 0$ und

$$\left.\begin{aligned} P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \quad Q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j, \\ \text{mit } \deg(P) = n \geq 0, \quad \deg(Q) = m \geq 0, \quad n \geq m \geq 0, \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

setze nun $b_j := 0$ für $j \in \{m+1, \dots, n\}$. Dann:

$$(\lambda P)(x) = \sum_{j=0}^{n} (\lambda\, a_j)\, x^j, \qquad \deg(\lambda P) = n, \tag{6.4a}$$

$$(P+Q)(x) = \sum_{j=0}^{n} (a_j + b_j)\, x^j, \qquad \deg(P+Q) \leq n = \max\{m, n\}, \tag{6.4b}$$

$$(PQ)(x) = \sum_{j=0}^{m+n} c_j\, x^j, \qquad \deg(PQ) = m+n \tag{6.4c}$$

mit

$$\underset{j=0,\dots,n+m}{\forall} c_j = \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}. \tag{6.4d}$$

$\nwarrow$ auftretende und bisher nicht definierte Koeffizienten werden $= 0$ gesetzt.

(6.4c) & (6.4d) folgen aus (6.3), da

$$c_j = \sum_{k+l=j} a_k b_l = \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}.$$

(exakter Beweis im Skript)

$\deg(PQ) = m+n$, da $c_{m+n} = a_n b_m \neq 0$.

Th. 6.5: **(a)** Sei P wie in (6.3). Dann:

$$\underset{\xi\in\mathbb{K}}{\forall} \quad P(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j\,(x-\xi)^j \tag{6.5}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \underset{j=0,\dots,n}{\forall} \quad & b_j = \sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} \xi^{k-j} \\ \text{(speziell:} \quad & b_0 = P(\xi), \quad b_n = a_n). \end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

(b) Zu P mit $\deg(P) = n \geq 1$ und $\xi \in \mathbb{K}$ gibt es Q mit $\deg(Q) = n-1$ so, dass

$$P(x) = P(\xi) + (x-\xi)\,Q(x). \tag{6.7}$$

Für ξ Nullst. von P gilt $P(x) = (x-\xi)\,Q(x)$.

Bew.: (a): $\xi = 0$: ✓ Sei $\xi \neq 0$. Setze $\eta := x - \xi$. Dann ist $x = \xi + \eta$ und

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k(\xi+\eta)^k \overset{(5.23)}{=} \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_k \binom{k}{j} \xi^{k-j}\eta^j \overset{\substack{\xi\neq 0\\ \downarrow}}{=} \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_k \binom{k}{j} \xi^{k-j}\eta^j \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_k \binom{k}{j} \xi^{k-j}\eta^j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} \xi^{k-j}\eta^j. \end{aligned} \tag{6.8}$$

(b): Nach (a) gilt

$$\left.\begin{aligned} & P(x) = P(\xi) + (x-\xi)\,Q(x), \\ & \text{mit} \quad Q(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j\,(x-\xi)^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}\,(x-\xi)^j. \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

□

Th. 6.6: **(a)** P mit $n := \deg(P) \geq 0$ hat höchstens n Nullst.

(b) Seien P, Q wie in (6.3) mit $n = m$, $\deg(P) \leq n$, $\deg(Q) \leq n$. Gilt $P(x_j) = Q(x_j)$ an $n+1$ versch. $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, so folgt $\underset{j=0,\dots,n}{\forall} \quad a_j = b_j$.

Folgerung 1: Stimmen Pol. P, Q vom Grad $\leq n$ an $n+1$ versch. Pkten überein, so $P = Q$.

Folgerung 2: $P = Q \Rightarrow \underset{x \in \mathbb{K}}{\forall} \quad P(x) = Q(x) \Rightarrow \underset{j=0,\dots,n}{\forall} \quad a_j = b_j$.

Bew.: (a): $n = 0 \Rightarrow P \equiv a_0 \neq 0$ ohne Nullst.

Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

Ind.verank. $(n = 1)$: $P(x) = a_0 + a_1 x$ mit $a_1 \neq 0$ hat genau eine Nullst. bei $\xi = -a_0/a_1$.

Ind.schritt: Sei $\deg(P) = n + 1$. Falls P keine Nullst. hat, o.k.

Hat P Nullst. $\xi \in \mathbb{K}$, so

$$P(x) = (x - \xi)\, Q(x) \tag{6.10}$$

mit $\deg(Q) = n$ nach Th. 6.5(b).

Ind.vor. $\Rightarrow$ Q hat $\leq n$ Nullst. $\Rightarrow$ P hat $\leq n+1$ Nullst.

(b): Gilt $P(x_j) = Q(x_j)$ für $n+1$ versch. x_j, so hat $P - Q$ $n+1$ versch. Nullst. und $\deg(P - Q) \leq n$

$\overset{\text{(a)}}{\Rightarrow} \deg(P - Q) = -1 \Rightarrow P - Q \equiv 0$

$\Rightarrow \underset{j=0,\dots,n}{\forall} \quad a_j - b_j = 0.$ ∎

Bem. 6.7: Sei $n := \deg(P) \geq 0$.

Th. 6.6(a) $\Rightarrow$ P hat $\leq n$ Nullst.

Th. 6.5(b) + Induktion

$$\Rightarrow \underset{k \in \{0,\dots,n\}}{\exists} \quad P(x) = Q(x) \prod_{j=1}^{k} (x - \underbrace{\xi_j}_{\text{Nullst. von } P})$$

$$= (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_k) Q(x), \tag{6.11a}$$

mit $\deg(Q) = n - k$ und Q hat keine Nullst. in $\mathbb{K}$.

Dabei ist $P = Q$ möglich und auch $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_k$.

Umformulierung:

$$P(x) = Q(x) \prod_{j=1}^{l} (x - \lambda_j)^{m_j} = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_l)^{m_l} Q(x) \tag{6.11b}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, $l \in \{0, \dots, k\}$, sind die versch. Nullst. von P, $m_j \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{l} m_j = k$, m_j heißt Vielfachheit der Nullst. λ_j.

7. Grenzwerte und Konvergenz in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

7.1. Folgen

Nach Def. 2.14(b) ist Folge in $\mathbb{K}$ Fkt. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$,
$f = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (z_1, z_2, \dots)$ mit $z_n := f(n)$.
$(z_n)_{n\in I}$ mit $I \neq \emptyset$ abzählbar ist auch erlaubt (z.B. $I = \mathbb{N}_0$).
$\to$ Beobachtung: $(1 - \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ “kommt 1 beliebig nahe”;
Ziel: Präzisierung dieser Beobachtung.

Def. 7.1: Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ heißt konvergent mit Grenzwert/Limes $z \in \mathbb{K}$ g.d.w. für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|z_n - z| < \epsilon$ für alle $n > N$. Notation: $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ oder $z_n \to z$ für $n \to \infty$.
Also

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall} \ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n>N}{\forall} |z_n - z| < \epsilon. \tag{7.1}$$

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt divergent g.d.w. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent.

Bsp. 7.2: **(a)** Konstante Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a)_{n\in\mathbb{N}}$ hat $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} a = a$, denn
$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \ |z_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon$.

(b) $\underset{a\in\mathbb{C}}{\forall}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+a} = 0$ (hier gilt $z_n = \frac{1}{n+a}$ für $n \neq -a$ und $z_n := w \in \mathbb{C}$ für $n = -a$): Sei $\epsilon > 0$. Für $n > N \geq \epsilon^{-1} + |a|$
gilt $|n + a| = |n - (-a)| \geq |n - |a|| = n - |a| > N - |a| \geq \epsilon^{-1}$
$\Rightarrow |z_n| = \frac{1}{|n+a|} < \epsilon$.

(c) $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent:

$$z_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ -1 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$z \neq 1$ ist nicht Limes: Setze $\epsilon := \frac{|1-z|}{2} > 0$.
Dann: $\underset{n \text{ gerade}}{\forall} \ |z_n - z| = |1 - z| > \epsilon$.
$z = 1$ ist nicht Limes: Setze $\epsilon := 1$.
Dann: $\underset{n \text{ ungerade}}{\forall} \ |z_n - 1| = |-1 - 1| = 2 > \epsilon$.
Also hat die Folge keinen Limes.

Th. 7.3: **(a)** Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ ist konvergent in $\mathbb{C}$ g.d.w.
$(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ beide konv. in $\mathbb{R}$.
Im Fall der Konvergenz gilt weiter:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z \ \wedge\ \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z. \tag{7.2}$$

(b) Ist (x_n) Folge in $\mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z \quad \Rightarrow \quad z \in \mathbb{R}. \tag{7.3}$$

Bew.: (a): Ang., $\lim z_n = z \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$. Dann:
$\underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n>N}{\forall} \ |z_n - z| < \epsilon$, also

$$|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| \overset{\text{Th. 5.11(d)}}{\leq} |z_n - z| < \epsilon \tag{7.4}$$

$\Rightarrow \lim \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$.
Analog folgt $\lim \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$.
Umgekehrt gelte $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = x \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = y \in \mathbb{R}$.
Beweis von $\lim z_n = x + iy$ mit "$\frac{\epsilon}{2}$-Argument":
Zu $\epsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ so, dass für jedes $n > N$ gilt:
$|\operatorname{Re} z_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|\operatorname{Im} z_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$. Also:

$$\begin{aligned} \underset{n>N}{\forall} \quad |z_n - (x+iy)| &= |\operatorname{Re} z_n + i \operatorname{Im} z_n - (x+iy)| \\ &\leq \underbrace{|\operatorname{Re} z_n - x|}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|i|}_{1} \underbrace{|\operatorname{Im} z_n - y|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned} \tag{7.5}$$

also $\lim_{n\to\infty} z_n = x + iy$.
(b) folgt sofort aus (a). □

Bsp. 7.4: **(a)**

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2} + \frac{i}{n-17} \right) \overset{\substack{\text{Bsp. 7.2(a),(b),} \\ \text{Th. 7.3(a)}}}{=} \sqrt{2} + 0i = \sqrt{2}.$$

(b) Nach Th. 7.3(a) ist $(\frac{1}{n} + (-1)^n\, i)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, da
$((-1)^n)$ divergent.

Prop. 7.5 (Bernoullische Ungl.):

$$\underset{n\in\mathbb{N}_0}{\forall}\ \underset{x\in[-1,\infty[}{\forall}\quad (1+x)^n \geq 1+nx \tag{7.6}$$

mit “$>$” für ($n>1 \ \wedge\ x\neq 0$).

Bew.: $n=0$: $1\geq 1$ ✓
$n=1$: $1+x\geq 1+x$ ✓
$n=2$: $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 \geq 1+2x$ gilt mit
“$>$” für $x\neq 0$.
Ind.schritt für $n\geq 2$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n\,(1+x) \overset{\text{Ind.vor.},\ x\geq -1}{\geq} (1+nx)\,(1+x)\\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x,\end{aligned} \tag{7.7}$$

mit “$>$” für $x\neq 0$. □

Bsp. 7.6:

$$q\in\mathbb{C}\ \wedge\ |q|<1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0: \tag{7.8}$$

$q=0$: ✓
$0<|q|<1 \Rightarrow |q|^{-1}>1 \Rightarrow h:=|q|^{-1}-1>0$.
Für $\epsilon>0$ und $N\geq \frac{1}{\epsilon h}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} n>N \quad &\Rightarrow\quad |q|^{-n} = (1+h)^n \overset{(7.6)}{\geq} 1+nh > nh > 1/\epsilon\\ &\Rightarrow\quad |q^n| = |q|^n < \epsilon.\end{aligned} \tag{7.9}$$

Def. 7.7: **(a)** Sei $z\in\mathbb{K}$, $\epsilon>0$. $B_\epsilon(z) := \{w\in\mathbb{K}: |w-z|<\epsilon\}$ heißt ϵ-Umgebung oder ϵ-Kugel um z.

$\boxed{\text{Bild in } \mathbb{C} \text{ und Bild in } \mathbb{R}}$

$U\subseteq\mathbb{K}$ heißt Umgebung von z g.d.w.
$\underset{\epsilon>0}{\exists}\ B_\epsilon(z)\subseteq U$
(z.B. sind $\mathbb{R}$, $[z-\epsilon,\infty[$ Umg. von z in $\mathbb{R}$, aber nicht in $\mathbb{C}$; $\{z\}$, $\{w\in\mathbb{K}: \operatorname{Re} w\geq \operatorname{Re} z\}$, $\{w\in\mathbb{K}: \operatorname{Re} w \geq \operatorname{Re} z+\epsilon\}$ sind keine Umg. von z).

(b) Wir sagen, die Aussage $\phi(n)$ gilt für fast alle $n\in\mathbb{N}$ g.d.w. $\underset{A\subseteq\mathbb{N}}{\exists}$ A endlich und $\underset{n\in\mathbb{N}\setminus A}{\forall}\ \phi(n)$ wahr.

Bem. 7.8: $\lim_{n\to\infty} z_n = z \Leftrightarrow$ jede Umgebung von z enthält fast alle z_n.

Def. 7.9: Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ heißt <u>beschränkt</u> g.d.w.
die <u>Menge</u> $\{|z_n| : n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{R}$ beschr. ist (siehe Def. 2.26(a)).

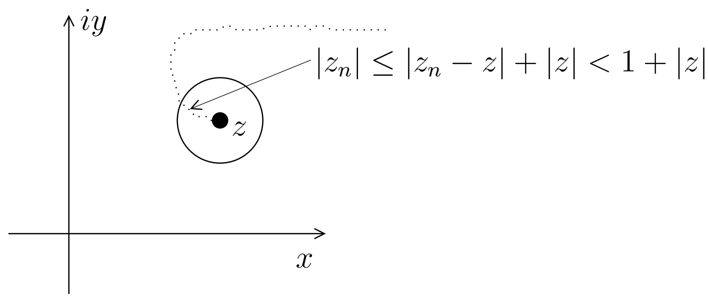
Prop. 7.10: **(a)** Grenzwerte sind eindeutig, d.h.

$$\underset{z,w\in\mathbb{K}}{\forall} \big(\lim z_n = z \ \wedge\ \lim z_n = w \quad \Rightarrow z = w\big).$$

(b) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschr.

Bew.: (a) Übung.

(b): $\lim z_n = z \Rightarrow A := \{|z_n| : |z_n - z| \geq 1\} \cup \{|z_1|\} \neq \emptyset$
und $\#A < \infty$. Nach Th. 3.21(a) hat
A ob. Schr. M
$\Rightarrow \{|z_n| : n \in \mathbb{N}\}$ hat unt. Schr. 0 und ob. Schr. $\max\{M, |z|+1\}$,



d.h., $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschr. $\square$

Prop. 7.11: Gelte $\lim z_n = 0$.

(a) Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $\underset{C>0}{\exists} \ |b_n| \leq C|z_n|$ für fast alle n,
so gilt $\lim b_n = 0$.

(b) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschr. $\Rightarrow \lim(c_n z_n) = 0$.

Bew.: (a): $\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n>N}{\forall} \ \Big(|z_n| < \frac{\epsilon}{C} \ \wedge\ |b_n| \leq C|z_n|\Big)$
$\Rightarrow \underset{n>N}{\forall} \ |b_n| \leq C|z_n| < C \cdot \frac{\epsilon}{C} = \epsilon \Rightarrow \lim b_n = 0$.
(b): $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschr. $\Rightarrow \underset{C>0}{\exists} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \ |c_n| \leq C$, also
$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \ |c_n z_n| \leq C|z_n| \overset{\text{(a)}}{\Rightarrow} \lim(c_n z_n) = 0$. $\square$

Bsp. 7.12: $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschr. Folgen.
Also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+a} = 0 \quad \overset{\text{Prop. 7.11(b)}}{\Rightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+a} = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n+a} = 0. \tag{7.10}$$

Th. 7.13: **(a)** Grenzwertsätze: Für $(z_n), (w_n)$ in $\mathbb{C}$ mit
$\lim z_n = z \in \mathbb{C}$ und $\lim w_n = w \in \mathbb{C}$ gelten:

$$\forall_{\lambda \in \mathbb{C}} \quad \lim(\lambda z_n) = \lambda z, \tag{7.11a}$$
$$\lim(z_n + w_n) = z + w, \tag{7.11b}$$
$$\lim(z_n w_n) = zw, \tag{7.11c}$$
$$\lim z_n/w_n = z/w \quad \text{für } w_n \neq 0 \text{ und } w \neq 0, \tag{7.11d}$$
$$\lim |z_n| = |z|, \tag{7.11e}$$
$$\lim \bar{z}_n = \bar{z}, \tag{7.11f}$$
$$\forall_{p \in \mathbb{N}} \quad \lim z_n^p = z^p. \tag{7.11g}$$

(b) Für $(x_n), (y_n)$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim x_n = x \in \mathbb{R}$, $\lim y_n = y \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \max\{x_n, y_n\} = \max\{x, y\}, \tag{7.12a}$$
$$\lim_{n\to\infty} \min\{x_n, y_n\} = \min\{x, y\}. \tag{7.12b}$$

(c) In Situation aus (b) gilt:
$x_n \leq y_n$ für f.a. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \leq y$
(speziell: $x_n \geq 0$ für fast alle $n \Rightarrow x \geq 0$).

Bew.: (7.11a): $\lambda = 0$: ✓
$\lambda \neq 0$: Sei $\epsilon > 0$:
$\lim z_n = z \Rightarrow \exists_{N \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n > N} \quad |z_n - z| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$

$$\Rightarrow \quad \forall_{n>N} |\lambda\, z_n - \lambda\, z| = |\lambda|\, |z_n - z| < \epsilon. \tag{7.13a}$$

(7.11b): $\frac{\epsilon}{2}$-Argument:
Sei $\epsilon > 0$. $\lim z_n = z$, $\lim w_n = w$
$\Rightarrow \exists_{N \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n>N} \quad |z_n - z| < \frac{\epsilon}{2} \ \wedge\ |w_n - w| < \frac{\epsilon}{2}$

$$\Rightarrow \quad \forall_{n>N} |z_n + w_n - (z + w)| \leq |z_n - z| + |w_n - w| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \tag{7.13b}$$

(7.11c): Setze $M_1 := \max\{|z|, 1\}$, $M_2 :=$ ob. Schr. für $\{|w_n| : n \in \mathbb{N}\}$,
$M_2 > 0$ (ex. nach Prop. 7.10(b)).
Sei $\epsilon > 0$.
$\exists_{N \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n>N} \quad \left(|z_n - z| < \frac{\epsilon}{2M_2} \ \wedge\ |w_n - w| < \frac{\epsilon}{2M_1}\right)$

$$\Rightarrow \quad \forall_{n>N} \quad |z_n w_n - zw| = \big|(z_n - z)w_n + z(w_n - w)\big|$$
$$\leq |w_n| \cdot |z_n - z| + |z| \cdot |w_n - w| < \frac{M_2\, \epsilon}{2M_2} + \frac{M_1\, \epsilon}{2M_1} = \epsilon. \tag{7.13c}$$

(7.11d): Zunächst Fall $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad z_n = 1$.
Sei $\epsilon > 0$.
$\underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n>N}{\forall} \quad \left(|w_n - w| < \frac{\epsilon |w|^2}{2} \ \wedge \ \underbrace{|w_n - w| < \frac{|w|}{2}}\right)$ (geht, da $w \neq 0$).

$$\Rightarrow |w| \leq |w - w_n| + |w_n| < \tfrac{|w|}{2} + |w_n|$$

$$\Rightarrow \underbrace{|w_n| > \frac{|w|}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{n>N}{\forall} \left| \frac{1}{w_n} - \frac{1}{w} \right| = \left| \frac{w_n - w}{w_n\, w} \right| \leq \frac{2\,|w_n - w|}{|w|^2} < \frac{2}{|w|^2} \frac{\epsilon\,|w|^2}{2} = \epsilon. \tag{7.13d}$$

Der allgemeine Fall folgt nun aus (7.11c).

(7.11e): Benutze umgekehrte Δ-Ungl. (5.14): Sei $\epsilon > 0$.
$\underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n>N}{\forall} \quad |z_n - z| < \epsilon$

$$\Rightarrow \quad \underset{n>N}{\forall} \big| |z_n| - |z| \big| \leq |z_n - z| < \epsilon. \tag{7.13e}$$

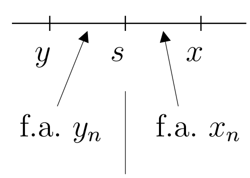
(7.11f): Sei $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$ mit $x_n, y_n, x, y \in \mathbb{R}$.
(7.2) $\Rightarrow \lim x_n = x \ \wedge \ \lim y_n = y$

$$\Rightarrow \quad \lim \bar{z}_n = \lim(x_n - iy_n) \overset{(7.11a),(7.11b)}{=} x - iy = \bar{z}. \tag{7.13f}$$

(7.11g): Durch Induktion aus (7.11c).

(b): Übung.

(c): Kontraposition: Sei $x > y$. Setze $s := \frac{x+y}{2}$.



$y < s < x \ \wedge \ \lim x_n = x \ \wedge \ \lim y_n = y$
$\Rightarrow y_n < s < x_n$ für fast alle n
$\Rightarrow x_n \leq y_n$ gilt nicht für fast alle n. □

Bsp. 7.14: **(a)** $\lim_{n\to\infty} \frac{n+a}{n+b} = 1$ gilt für alle $a, b \in \mathbb{C}$
(hier ist $z_n := \frac{n+a}{n+b}$ für $n \neq -b$
und $z_n := w$ mit $w \in \mathbb{C}$ beliebig für $n = -b$).
(7.11b) & (7.11d)

$$\Rightarrow \quad \lim \frac{n+a}{n+b} = \lim \frac{1 + a/n}{1 + b/n} = \frac{\lim 1 + \lim \frac{a}{n}}{\lim 1 + \lim \frac{b}{n}} = \frac{1+0}{1+0} = 1. \tag{7.14}$$

(b) Aus (7.11b), (7.11d), (7.11g):

$$\lim \frac{2n^5 - 3in^3 + 2i}{3n^5 + 17n} = \lim \frac{2 - 3i/n^2 + 2i/n^5}{3 + 17/n^4} = \frac{2+0+0}{3+0} = \frac{2}{3}. \tag{7.15}$$

Kor. 7.15: Sind $(z_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (z_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, mit $\underset{j=1,\dots,k}{\forall} \quad \lim_{n\to\infty} z_n^{(j)} = z^{(j)}$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} z_n^{(j)} = \sum_{j=1}^{k} z^{(j)}, \tag{7.16a}$$

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{k} z_n^{(j)} = \prod_{j=1}^{k} z^{(j)}. \tag{7.16b}$$

Bew.: Folgt durch einfache Ind. aus (7.11b) & (7.11c). □

Th. 7.16 (Einschachtelungssatz): Seien $(x_n), (y_n), (a_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$, und gelte $x_n \le a_n \le y_n$ für fast alle n. Dann:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = x. \tag{7.17}$$

Bew.: Sei $\epsilon > 0$.

$$\underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n>N}{\forall} \quad \Big(|x_n - x| < \epsilon \ \wedge \ |y_n - x| < \epsilon \ \wedge \ x_n \le a_n \le y_n \Big)$$

$$\Rightarrow \quad \underset{n>N}{\forall} \ x - \epsilon < x_n \le a_n \le y_n < x + \epsilon. \tag{7.18}$$

□

Bsp. 7.17:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad 0 < \frac{1}{n!} \le \frac{1}{n} \quad \overset{\text{Th. 7.16}}{\Rightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0. \tag{7.19}$$

Def. 7.18: Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ heißt bestimmt divergent g.d.w. einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \underset{K\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n>N}{\forall} \quad x_n > K, \tag{7.20a}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \underset{K\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n>N}{\forall} \quad x_n < K. \tag{7.20b}$$

Th. 7.19: Sei $S := (x_n)$ monotone Folge in $\mathbb{R}$ (steigend oder fallend). Mit $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ gilt dann:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \sup A, & \text{wenn } S \text{ steigend und beschr.,} \\ \infty, & \text{wenn } S \text{ steigend und unbeschr.,} \\ \inf A, & \text{wenn } S \text{ fallend und beschr.,} \\ -\infty, & \text{wenn } S \text{ fallend und unbeschr.} \end{cases} \tag{7.21}$$

Bew.: Sei S steigend (fallend geht analog).
S beschr.: Zu $\epsilon > 0$ setze $K := \sup A - \epsilon$.
K keine ob. Schr. $\Rightarrow \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ x_N > K \overset{S \text{ steigend}}{\Rightarrow} \underset{n>N}{\forall} \quad \underbrace{x_n \geq x_N}_{\Rightarrow |\sup A - x_n| < \epsilon}$.
S unbeschr.: Sei $K \in \mathbb{R}$ beliebig.
Dann $\underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ x_N > K \overset{S \text{ steigend}}{\Rightarrow} \underset{n>N}{\forall} \quad x_n \geq x_N > K$. $\square$

Bsp. 7.20: Th. 7.19 $\Rightarrow$

$$\underset{k\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \left(\lim_{n\to\infty} n^k = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} (-n^k) = -\infty\right). \tag{7.22}$$

Def. 7.21: Sei $A \neq \emptyset$ und $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow A$ Folge in A.
Ist $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ (also $(\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Indizes),
so heißt $(\sigma \circ \phi) : \mathbb{N} \longrightarrow A$

(a) Teilfolge (TF) von σ g.d.w. ϕ streng steigend,

(b) Umordnung von σ g.d.w. ϕ bijektiv.

Schreibweisen: Für $\sigma = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n = \sigma(n)$
kann man schreiben $\sigma \circ \phi = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$
mit $w_n := (\sigma \circ \phi)(n) = z_{\phi(n)}$.
TF von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird auch mit $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$
bezeichnet; hier ist also $n_k := \phi(k)$.

Bsp. 7.22: Sei $\sigma = (1, 2, 3, \dots)$. $(2, 4, 6, \dots)$ ist TF, $(2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots)$ ist Umordnung:
Es ist $(2, 4, \dots) = \sigma \circ \phi_1$ mit $\phi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\phi_1(n) := 2n$;
und $(2, 1, 4, 3, \dots) = \sigma \circ \phi_2$ mit $\phi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$\phi_2(n) := \begin{cases} n+1 & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ n-1 & \text{für } n \text{ grade.} \end{cases}$$

Prop. 7.23: Gilt $\lim z_n = z$, so hat jede TF und jede Umordnung von (z_n) auch lim z.

Bew.: Sei $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ TF von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Dann gibt es $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ streng steigend
mit $w_n = z_{\phi(n)}$. Sei $\epsilon > 0$.
$\lim z_n = z \Rightarrow \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n>N}{\forall} \quad |z_n - z| < \epsilon$.
Wähle $\tilde{N} \in \phi(\mathbb{N})$ mit $\tilde{N} \geq N$ (geht, da ϕ str. st.).
Setze $M := \phi^{-1}(\tilde{N})$ (mit $\phi^{-1} : \phi(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{N}$). Dann:
$\underset{n>M}{\forall} \quad \phi(n) > \tilde{N} \geq N \Rightarrow |w_n - z| = |z_{\phi(n)} - z| < \epsilon$,
also $\lim w_n = z$.

Sei nun (w_n) Umordnung von (z_n), also $w_n = z_{\phi(n)}$ mit
$\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bij. Zu $\epsilon > 0$ gibt es N wie oben.
Setze
$$M := \max\{\phi^{-1}(n) : n \leq N\}. \tag{7.23}$$
$n > M \Rightarrow \phi(n) > N$. Also:
$\underset{n>M}{\forall} \quad |w_n - z| = |z_{\phi(n)} - z| < \epsilon$, also $\lim w_n = z$. □

Def. 7.24: $z \in \mathbb{K}$ heißt <u>Häufungspunkt</u> (HP) der
Folge (z_n) in $\mathbb{K}$ g.d.w.
$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \#\{n \in \mathbb{N} : z_n \in B_\epsilon(z)\} = \infty$,
d.h., g.d.w. jede Umgebung von z unendlich viele
Folgenglieder enthält.

Bsp. 7.25: $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die HP 1 und -1.

Prop. 7.26: z ist HP von (z_n) g.d.w.
(z_n) hat TF (w_n) mit $\lim w_n = z$.

Bew.: (w_n) TF von (z_n) mit $\lim w_n = z$
$\Rightarrow \underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \#\{n \in \mathbb{N} : w_n \in B_\epsilon(z)\} = \infty$
$\Rightarrow \underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \#\{n \in \mathbb{N} : z_n \in B_\epsilon(z)\} = \infty$, d.h.,
z ist HP von (z_n).

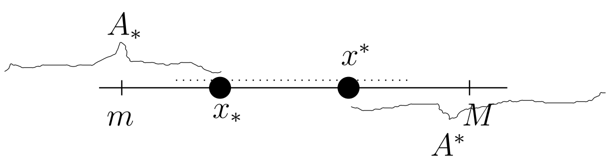
Sei umgekehrt z ein HP von (z_n). Def. $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
rekursiv wie folgt:
$\phi(1) := k$ mit $z_k \in B_1(z)$ beliebig (geht, da z HP).
Nun sei $n > 1$ und $\phi(m)$ für $m < n$ bereits definiert.
Setze $M := \max\{\phi(m) : m < n\}$.
Wähle $z_k \in B_{\frac{1}{n}}(z)$ mit $k > M$ (geht, da z HP), setze
$\phi(n) := k$.
Dann ist ϕ streng steigend, d.h. (w_n) mit $w_n := z_{\phi(n)}$
ist TF von (z_n).

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \epsilon$.
Dann: $\underset{n>N}{\forall} \quad w_n = z_{\phi(n)} \in B_{\frac{1}{n}}(z) \subseteq B_{\frac{1}{N}}(z) \subseteq B_\epsilon(z)$,
also $\lim w_n = z$. $\square$

Th. 7.27 (Bolzano-Weierstraß): Jede beschr. Folge $S := (x_n)$ in $\mathbb{K}$ hat mindestens einen HP in $\mathbb{K}$.
Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt weiterhin: Zu $A := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ ist HP von } S\}$ ex. $x_* := \min A$ und $x^* := \max A$, d.h., S hat einen kleinsten und einen größten HP. Auch noch gilt:
$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \Big(x_* - \epsilon < x_n < x^* + \epsilon \text{ gilt für fast alle } n\Big)$.

Bew.: Zunächst Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Setze

$$A^* := \{x \in \mathbb{R} : x_n \leq x \text{ für f.a. } n\}, \tag{7.24a}$$
$$A_* := \{x \in \mathbb{R} : x_n \geq x \text{ für f.a. } n\}. \tag{7.24b}$$



Dann gilt:

(a) $A^* \neq \emptyset$ ist nach unten beschr. mit $x^* = \max A = \inf A^*$.

(b) $A_* \neq \emptyset$ ist nach oben beschr. mit $x_* = \min A = \sup A_*$.

Wir beweisen (a) ((b) geht analog):
Sei m untere und M ob. Schr. für S. Dann $M \in A^*$, d.h., $A^* \neq \emptyset$.
m ist unt. Schr. für A^*. Also gibt es $a := \inf A^* \in \mathbb{R}$.
a unt. Schr. von $A^* \Rightarrow \underset{\epsilon>0}{\forall} \quad a - \epsilon \notin A^*$, d.h.
$\#\{n \in \mathbb{N} : x_n > a - \epsilon\} = \infty$.
$a = \inf A^* \Rightarrow a + \frac{\epsilon}{2} \in A^* \Rightarrow \#\{n \in \mathbb{N} : x_n > a + \frac{\epsilon}{2}\} < \infty$. (1)
Insbesondere gilt $x_n < a + \epsilon$ für fast alle n, also
$\#\{n \in \mathbb{N} : a - \epsilon < x_n < a + \epsilon\} = \infty$, d.h., a ist HP.
Noch zu zeigen: $a = \max A$. Sei dazu $x > a$ und $\epsilon := x - a > 0$. Dann gilt (1), also auch
$\#\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)\} < \infty$, d.h., x ist nicht HP und $a = \max A$.

Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Sei $S := (z_n)$ Folge in $\mathbb{C}$ beschr., $z_n = x_n + iy_n$.
Th. 5.11(d) $\Rightarrow \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \big(|x_n| \leq |z_n| \ \wedge \ |y_n| \leq |z_n|\big)$
$\Rightarrow S_1 := (x_n)$ beschr. $\wedge$ $S_2 := (y_n)$ beschr.

$\overset{\text{Fall } \mathbb{K}=\mathbb{R}}{\Rightarrow}$ S_1 hat HP x
$\overset{\text{Prop. 7.26}}{\Rightarrow}$ S hat TF $(z_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ so, dass $x = \lim_{j\to\infty} x_{n_j}$.
Nun hat (y_{n_j}) HP y und TF $(y_{n_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ so, dass $y = \lim_{k\to\infty} y_{n_{j_k}}$.
Also $\lim_{k\to\infty} z_{n_{j_k}} = x + iy =: z$, d.h., nach Prop. 7.26
ist z HP von S. □

Def. 7.28: (z_n) Folge in $\mathbb{K}$ heißt <u>Cauchyfolge</u> g.d.w.

$$\underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n,m>N}{\forall} \quad |z_n - z_m| < \epsilon. \tag{7.25}$$

Th. 7.29: (z_n) ist Cauchyfolge g.d.w. (z_n) ist konvergent.

Bew.: "$\Leftarrow$": $\lim z_n = z \Rightarrow \underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n>N}{\forall} \quad z_n \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(z)$,
also $\underset{m,n>N}{\forall} \quad |z_n - z_m| \leq |z_n - z| + |z - z_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$,
d.h., (z_n) ist Cauchyfolge.

"$\Rightarrow$": Ang., (z_n) ist Cauchy. Dann ist (z_n) beschr.:
$\underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n,m>N}{\forall} \quad |z_n - z_m| < 1$, d.h.,
$A := \{|z_n| : |z_n - z_{N+1}| \geq 1\} \cup \{|z_1|\} \neq \emptyset$ und A endlich.
Setze $M := \max A$. Dann gilt
$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad 0 \leq \underbrace{|z_n| \leq \max\{M, |z_{N+1}| + 1\}}_{\text{da } |z_n - z_{N+1}| < 1 \;\Rightarrow\; |z_n| \leq |z_n - z_{N+1}| + |z_{N+1}| < 1 + |z_{N+1}|}$,
d.h., (z_n) beschr.
Th. 7.27 $\Rightarrow$ (z_n) hat HP z. Noch zu zeigen: $\lim z_n = z$.
Sei $\epsilon > 0$. (z_n) Cauchy $\Rightarrow \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n,m>N}{\forall} \quad |z_n - z_m| < \frac{\epsilon}{2}$.
HP $\Rightarrow \underset{k>N}{\exists} \quad |z_k - z| < \frac{\epsilon}{2}$. Also

$$\underset{n>N}{\forall} |z_n - z| \leq |z_n - z_k| + |z_k - z| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \tag{7.26}$$

d.h. $\lim z_n = z$. □

Bsp. 7.30: Betrachte $S := (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}. \tag{7.27}$$

Beh.: S ist keine Cauchyfolge (also nicht konvergent nach Th. 7.29): $\underset{N\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \underset{n,m>N}{\exists} \quad |s_n - s_m| > \frac{1}{2}$,
nämlich $m := N+1$ und $n := 2(N+1)$:

$$\begin{aligned} s_{2(N+1)} - s_{N+1} = \sum_{k=N+2}^{2(N+1)} \frac{1}{k} &= \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \dots + \frac{1}{2(N+1)} \\ &> (N+1)\cdot\frac{1}{2(N+1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

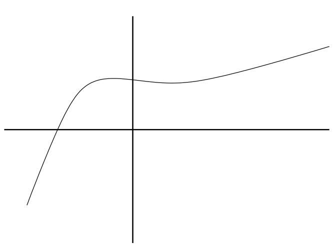
Da S nicht konv. und steigend, folgt $\lim s_n = \infty$ nach Th. 7.19:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty. \tag{7.29}$$

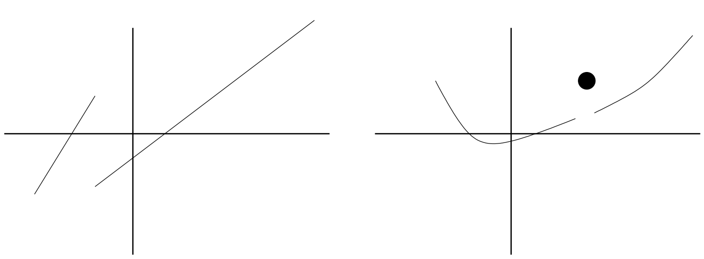
7.2. Stetigkeit

7.2.1. Definitionen & erste Beispiele

Idee:



stetig, d.h. keine "Sprünge"



unstetig, d.h. "Sprünge"

→ stetig heißt grob: kleine Änderung im Input gibt kleine Änderung im Output.

Def. 7.31: Sei $M \subseteq \mathbb{C}$, $\zeta \in M$. Fkt. $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt
stetig in ζ g.d.w.

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{z\in M}{\forall} \quad \big(|z-\zeta| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(\zeta)| < \epsilon\big). \tag{7.30}$$

Anschaulich: Kleine Umgebungen von ζ werden auf kleine Umg. von $f(\zeta)$ abgebildet.
f stetig $:\Leftrightarrow \underset{\zeta\in M}{\forall}$ f stetig in ζ.
$C(M,\mathbb{K})$: Menge der stetigen Fkt. $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$,
$C(M) := C(M,\mathbb{R})$.

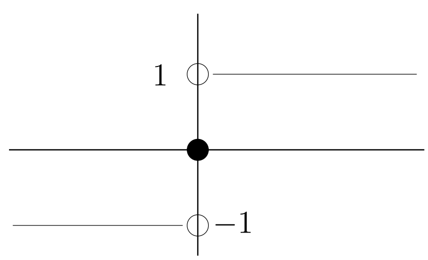
Bsp. 7.32: **(a)** $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ konstant $\Rightarrow f$ stetig:
Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ beliebig, z.B. $\delta := 1$.

$$\underset{z,\zeta\in M}{\forall} \quad |f(z) - f(\zeta)| = 0 < \epsilon \quad \begin{array}{l}\text{(gilt also auch für}\\ z,\zeta \in M \text{ mit } |z-\zeta| < \delta).\end{array}$$

(b) Jede affine Fkt. $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $f(z) := az + b$ ist stetig:
Fall $a = 0$: Siehe (a).
Fall $a \neq 0$: Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta := \frac{\epsilon}{|a|}$. Dann:

$$\begin{aligned}\underset{\zeta,z\in\mathbb{K}}{\forall} \quad |z-\zeta| < \delta = \frac{\epsilon}{|a|} \quad \Rightarrow \quad \big|f(z) - f(\zeta)\big| &= \big|az + b - a\zeta - b\big| \\ &= |a|\,|z-\zeta| < |a|\,\frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon.\end{aligned} \tag{7.31}$$

(c) sgn aus (5.9) ist nicht stetig.



$\underset{\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}{\forall}$ sgn stetig in ξ,
aber sgn nicht stetig in $\xi = 0$:
Zu $\xi \neq 0$ und $\epsilon > 0$ wähle $\delta := |\xi|$. Dann:
$|x - \xi| < \delta \Rightarrow |\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(\xi)| = 0 < \epsilon$.

$$\begin{bmatrix} \xi < 0 : x < \xi \;\Rightarrow\; x < 0, \\ \qquad\qquad \xi < x \;\Rightarrow\; |x-\xi| = x - \xi < \delta = |\xi| = -\xi \;\Rightarrow\; x < 0, \\ \xi > 0 : \text{analog.} \end{bmatrix}$$

sgn nicht stetig in 0: Wähle $\epsilon = \frac{1}{2}$. Dann:

$$\underset{\delta>0}{\forall} \big|\operatorname{sgn}(0) - \operatorname{sgn}(\delta/2)\big| = |0-1| = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon. \tag{7.32}$$

Def. 7.33: Sei $M \subseteq \mathbb{C}$.

(a) $z \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt (HP) von M g.d.w.

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \#(M \cap B_\epsilon(z)) = \infty. \tag{7.33}$$

$\to$ HP von M braucht nicht in M sein, z.B. 0, 1 sind HP von $]0,1[$.

(b) $z \in \mathbb{C}$ heißt isolierter Pkt. von M g.d.w.
$\underset{\epsilon>0}{\exists} \quad B_\epsilon(z) \cap M = \{z\}$.
$\to z$ isol. Pkt. von $M \Rightarrow z \in M$.

Prop. 7.34: Für $M \subseteq \mathbb{C}$ gilt:

$$M = \{z \in M :\, z \text{ HP von } \ M\} \,\dot{\cup} \{z \in M :\, z \text{ isol. Pkt von } \ M\}. \tag{7.34}$$

Bew.: Zeige $z \in M$ nicht HP von $M \Rightarrow z$ isol. Pkt. von M.
z nicht HP $\Rightarrow \underset{\tilde{\epsilon}>0}{\exists} \quad \#\big(\underbrace{(M \cap B_{\tilde{\epsilon}}(z)) \setminus \{z\}}_{=:A}\big) < \infty$.

Def.

$$\epsilon := \begin{cases} \min\{|a - z| :\, a \in A\} & \text{für } A \neq \emptyset, \\ \tilde{\epsilon} & \text{für } A = \emptyset. \end{cases} \tag{7.35}$$

Dann: $B_\epsilon(z) \cap M = \{z\}$.
Disjunktheit ist klar. □

Lem. 7.35: Sei $M \subseteq \mathbb{C}$, $f :\, M \longrightarrow \mathbb{K}$. Dann $\underset{\zeta \in M}{\forall} \big(\zeta \text{ isol. Pkt} \Rightarrow f \text{ st. in } \zeta\big)$.

Bew.: Wähle $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(\zeta) \cap M = \{\zeta\}$. Dann
$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \underset{z \in M}{\forall} \quad |z - \zeta| < \delta \Rightarrow z = \zeta \Rightarrow |f(z) - f(\zeta)| = 0 < \epsilon$. □

Bsp. 7.36: **(a)** Sei $M :=]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty[$.
$f = \operatorname{sgn}\restriction_M$ ist stetig:
f st. in $\xi \in M \setminus \{0\}$ folgt wie in Bsp. 7.32(c).
f st. in 0, da 0 isol. Pkt. von M.

(b) Jede Fkt. $f :\, \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ ist stetig, da
$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \; n$ isol. Pkt. von $\mathbb{N}$, da $\{n\} = \mathbb{N} \cap B_{\frac{1}{2}}(n)$.

7.2.2. Stetigkeit, Folgen und Funktionsarithmetik

$\to$ Th. 7.37 erlaubt Stetigkeit durch Folgenkonvergenz zu überprüfen.

Th. 7.37 (Folgenkriterium): $M \subseteq \mathbb{C}$, $f: M \longrightarrow \mathbb{K}$, $\zeta \in M$.

$$f \text{ stetig in } \zeta \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\substack{(z_n) \text{ Folge} \\ \text{in } M}}{\forall} \Big(\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\zeta) \Big). \quad (7.36)$$

Bew.: Fall (1): ζ isol. Pkt. Jede Fkt f ist st. in ζ nach Lem. 7.35. Auch gilt:

$$\underset{\substack{(z_n) \text{ Folge} \\ \text{in } M}}{\forall} \Big(\lim z_n = \zeta \Rightarrow \overset{\swarrow \text{ da } \underset{\delta>0}{\exists} \; B_\delta(\zeta)\cap M = \{\zeta\}}{z_n = \zeta \text{ für fast alle } n} \Rightarrow \lim f(z_n) = f(\zeta) \Big).$$

Fall (2): ζ ist HP von M:
Sei f st. in ζ und (z_n) Folge in M mit $\lim z_n = \zeta$.

Dann: $\underset{\epsilon>0}{\forall} \Big(\underset{\delta>0}{\exists} \; \underset{z\in M}{\forall} \big(|z-\zeta| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(\zeta)| < \epsilon \big)$ und $\underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n>N}{\forall} \; |z_n - \zeta| < \delta \Big)$.

Also $\underset{n>N}{\forall} \; |f(z_n) - f(\zeta)| < \epsilon$, d.h., $\lim f(z_n) = f(\zeta)$.
Sei nun f nicht st. in ζ. Ziel: Finde (z_n) Folge in M mit $\lim z_n = \zeta$ und $\neg\big(\lim f(z_n) = f(\zeta)\big)$.

f nicht st. in $\zeta \Rightarrow \underset{\epsilon_0>0}{\exists} \; \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \; \underset{z_n\in M}{\exists} \Big(|z_n - \zeta| < \frac{1}{n} \;\wedge\; |f(z_n) - f(\zeta)| \geq \epsilon_0 \Big)$.

Also $\lim z_n = \zeta$ und nicht $\lim f(z_n) = f(\zeta)$. $\square$

Th. 7.38: $M \subseteq \mathbb{C}$; $f, g: M \longrightarrow \mathbb{K}$; $\lambda \in \mathbb{K}$, $\zeta \in M$. Sind f, g st. in ζ, so auch λf, $f+g$, fg, f/g für $g \neq 0$, $|f|$, $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$.
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, f^+, f^- sind auch st. in ζ.

Bew.: Sei (z_n) Folge in M mit $\lim z_n = \zeta$

$$\overset{f,g \text{ st. in } \zeta}{\Rightarrow} \Big(\lim f(z_n) = f(\zeta) \;\wedge\; \lim g(z_n) = g(\zeta) \Big).$$

Also

$$\begin{array}{lcr}
(7.11a) & \Rightarrow & \lim(\lambda f)(z_n) = (\lambda f)(\zeta), \\
(7.11b) & \Rightarrow & \lim(f+g)(z_n) = (f+g)(\zeta), \\
(7.11c) & \Rightarrow & \lim(fg)(z_n) = (fg)(\zeta), \\
(7.11d) & \Rightarrow & \lim(f/g)(z_n) = (f/g)(\zeta) \text{ für } g \neq 0, \\
(7.11e) & \Rightarrow & \lim |f|(z_n) = |f|(\zeta), \\
(7.2) & \Rightarrow & \lim(\operatorname{Re} f)(z_n) = (\operatorname{Re} f)(\zeta), \\
(7.2) & \Rightarrow & \lim(\operatorname{Im} f)(z_n) = (\operatorname{Im} f)(\zeta).
\end{array}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &(7.12a) \quad \Rightarrow \quad \lim \max(f,g)(z_n) = \max(f,g)(\zeta), \\ &(7.12b) \quad \Rightarrow \quad \lim \min(f,g)(z_n) = \min(f,g)(\zeta). \end{aligned}$$

$\max(f,g)$ st. in $\zeta \Rightarrow f^+$, f^- st. in ζ. □

Kor. 7.39: $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$, $M \subseteq \mathbb{C}$, st. in $\zeta \in M$ g.d.w.
Re f und Im f beide st. in ζ.

Bew.: f st. in $\zeta \overset{\text{Th. 7.38}}{\Rightarrow} \operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ st. in ζ.
Sind $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ st. in ζ, so gilt wegen

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f, \tag{7.37}$$

dass f st. in ζ (wieder nach Th. 7.38). □

Bsp. 7.40: **(a)** abs : $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto |z|$ st. folgt aus (7.11e) oder aus $z \mapsto z$ st. (Bsp. 7.32(b)) plus $|f|$ st. nach Th. 7.38.

(b) Jedes Polynom $P: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{K}$, ist st.: Jedes $x \mapsto x^j$ ist st. nach (7.11g).
P st. folgt aus (7.16a) und auch durch Ind. aus $(f+g)$-Fall von Th. 7.38.

(c) Seien $P, Q: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ Pol., $A := Q^{-1}\{0\}$ Menge der Nullst. von Q. Dann ist $(P/Q): \mathbb{K} \setminus A \longrightarrow \mathbb{K}$ st. nach (b) und dem (f/g)-Fall von Th. 7.38.

Th. 7.41: Sei $D_f, D_g \subseteq \mathbb{C}$, $f: D_f \longrightarrow \mathbb{C}$, $g: D_g \longrightarrow \mathbb{K}$, $f(D_f) \subseteq D_g$.
f st. in $\zeta \in D_f \wedge g$ st. in $f(\zeta) \in D_g \Rightarrow (g \circ f): D_f \longrightarrow \mathbb{K}$ st. in ζ.
Speziell: f, g st. $\Rightarrow (g \circ f)$ st.

Bew.: Sei $\zeta \in D_f$, f st. in ζ, g st. in $f(\zeta)$.

$$\underset{\substack{(z_n) \text{ Folge} \\ \text{in } D_f}}{\forall} \left(\lim z_n = \zeta \overset{f \text{ st. in } \zeta}{\Rightarrow} \lim f(z_n) = f(\zeta) \overset{g \text{ st. in } f(\zeta)}{\Rightarrow} \lim g(f(z_n)) = g(f(\zeta)) \right),$$

also $g \circ f$ st. in ζ. □

7.2.3. Beschränkte, abgeschlossene und kompakte Mengen

Def. 7.42: Sei $A \subseteq \mathbb{C}$.

(a) A heißt beschränkt g.d.w. $A = \emptyset$ oder $\{|z| : z \in A\}$ beschr. in $\mathbb{R}$, d.h., g.d.w.

$$\underset{M \in \mathbb{R}^+}{\exists} \quad A \subseteq B_M(0).$$

(b) A heißt abgeschlossen g.d.w. der Grenzwert jeder Folge in A, die in $\mathbb{C}$ konvergiert, in A liegt
(dann ist auch $\emptyset$ abg.).

(c) A heißt kompakt g.d.w. A abg. & beschr.

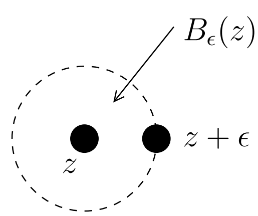
Bsp. 7.43: **(a)** $\emptyset$ kompakt, $\underset{z \in \mathbb{C}}{\forall} \quad \{z\}$ komp.
$\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ sind abg., aber nicht beschr.

(b) Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Beschr. Intervalle $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, b]$ sind beschr. (z.B. durch $M := 2 \max\{|a|, |b|\}$).

$[a, b]$, $[a, \infty[$, $]-\infty, b]$ sind abg.:
Z.B. folgt aus (x_n) Folge in $[a, b]$ mit $x = \lim x_n$, dass $x \in [a, b]$ (Th. 7.13(c)).

Offene und halboffene Intervalle sind nicht abg.:
Z.B. ist $(b - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $[a, b[$ (für n groß genug),
aber $\lim_{n \to \infty}(b - \frac{1}{n}) = b \notin [a, b[$.
Nur Intervalle der Form $[a, b]$ sind kompakt.

(c) $\underset{\substack{\epsilon > 0, \\ z \in \mathbb{C}}}{\forall} \quad B_\epsilon(z)$ beschr., aber nicht abg.:
$B_\epsilon(z) \subseteq B_{\epsilon + |z|}(0)$, da $|w - z| < \epsilon \Rightarrow |w| < \epsilon + |z|$ nach Δ-Ungl.;
für große n ist $(z + \epsilon - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $B_\epsilon(z)$
mit $\lim(z + \epsilon - \frac{1}{n}) = z + \epsilon \notin B_\epsilon(z)$.



Insbesondere ist $B_\epsilon(z)$ nicht kompakt.

Prop. 7.44: **(a)** Endliche Vereinigungen von beschr. (bzw. von abg. bzw. von kompakten) Mengen sind beschr. (bzw. abg. bzw. kompakt).

(b) Beliebige (endl. oder unendl.) Durchschnitte von beschr. (bzw. abg. bzw. komp.) Mengen sind beschr. (bzw. abg. bzw. komp.).

Bew.: (a): Übung.

(b): Sei $I \neq \emptyset$ Indexmenge, A_j für $j \in I$ Mengen, $A := \bigcap_{j\in I} A_j$.
Seien alle A_j beschr. und $j_0 \in I$.
Dann $\underset{M>0}{\exists} \quad A_{j_0} \subseteq B_M(0)$, also
$A = \bigcap_{j\in I} A_j \subseteq A_{j_0} \subseteq B_M(0)$, d.h., A beschr.
Sind alle A_j abg. und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Folge in A mit
$\lim a_n = z \in \mathbb{C}$, so ist $\underset{j\in I}{\forall} \quad z \in A_j$,
da (a_n) Folge in A_j und A_j abg.,
also $z \in A$ und A abg.
Alle A_j komp. $\Rightarrow$ alle A_j abg. & beschr. $\Rightarrow$ A abg. & beschr.
$\Rightarrow$ A komp. $\square$

Bsp. 7.45: **(a)** Nach Prop. 7.44(a) sind alle endl. Teilmengen von $\mathbb{C}$ kompakt.

(b) $\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{n\}$ ist unendl. Vereinigung komp. Mengen, die nicht beschr. ist.
$]0,1[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+1}]$ ist unendl. Vereinigung komp. Mengen, die nicht abg. ist.

Bem. 7.46:

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{K} \text{ stetig und } A \subseteq \mathbb{K} \text{ abg.} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(A) \subseteq \mathbb{C} \text{ abg.} \tag{7.38}$$

Bew.: Sei f st., $A \subseteq \mathbb{K}$ abg. und (z_n) Folge in $f^{-1}(A)$ mit $\lim z_n = z \in \mathbb{C}$. Dann ist $(f(z_n))$ Folge in A und $\lim f(z_n) = f(z)$, da f st. in z. Also $f(z) \in A$, da A abg., also $z \in f^{-1}(A)$, d.h., $f^{-1}(A)$ abg.

[Auch Umkehrung von (7.38) gilt: Siehe Analysis 2.]

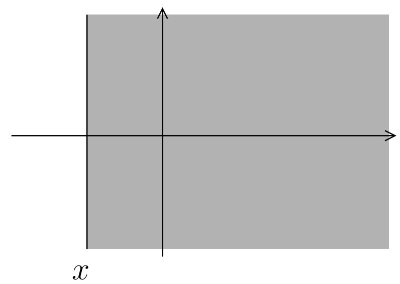
Bsp. 7.47: **(a)** $\underset{z\in\mathbb{C}}{\forall} \quad \underset{r>0}{\forall} \quad \overline{B}_r(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}$ ist abg.
↖ abg. Kreisscheibe um z mit Radius r
nach (7.38), da

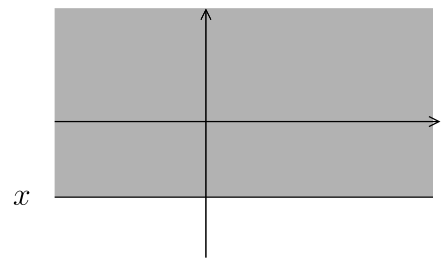
$$\overline{B}_r(z) = f^{-1}[0, r] \tag{7.39}$$

mit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(w) := |z - w|$ stetig.
$\overline{B}_r(z)$ ist auch beschr., also kompakt.

(b) $\underset{z\in\mathbb{C}}{\forall} \quad \underset{r>0}{\forall} \quad S_r(z) := \{w \in \mathbb{C} : |z - w| = r\} = f^{-1}\{r\}$
↖ Kreis/1-Sphäre um z mit Radius r
mit f wie oben ist abg. & beschr. (d.h. komp.).

(c) (7.38)
$\Rightarrow \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq x\} = \operatorname{Re}^{-1}[x, \infty[$ abg.,





$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq x\} = \operatorname{Im}^{-1}[x, \infty[$ abg.

Th. 7.48: $K \subseteq \mathbb{C}$ komp.
$\Leftrightarrow$ jede Folge in K hat Teilfolge (TF) mit Limes $z \in K$.

Bew.: "$\Rightarrow$": Sei K komp., d.h. beschr. & abg. Sei (z_n) Folge in K.
Nach Bolzano-Weierstraß Th. 7.27, Prop. 7.26 hat
(z_n) eine konv. TF (w_n) mit $\lim w_n = z \in \mathbb{C}$.
K abg. $\Rightarrow z \in K$.

"$\Leftarrow$": Sei (z_n) Folge in K mit $\lim z_n = w \in \mathbb{C}$.
(z_n) hat TF mit Limes $z \in K$, d.h. $w = z \in K$ nach Prop. 7.23,
d.h., K abg.
Wäre K unbeschr., so $\underset{(z_n) \text{ Folge in } K}{\exists} \lim |z_n| = \infty$, d.h.
$\lim_{k\to\infty} |z_{n_k}| = \infty$ für jede TF von (z_n), d.h.
keine TF von (z_n) konv. in $\mathbb{C}$ (oder K). $\square$

Warnung/Ausblick 7.49: Es gibt in allgemeinen metrischen Räumen (Analysis 2) abg. & beschr. Mengen, die <u>nicht</u> kompakt sind (komp. Mengen sind aber immer abg. & beschr.).

$\rightarrow$ Komp. Mengen sind z.B. nützlich, weil stetige $\mathbb{R}$-wertige Fkt. auf komp. Mengen Maxima und Minima annehmen (Th. 7.54 unten).

Def. 7.50: Sei $M \subseteq \mathbb{C}$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) f hat (strenges) globales Min. in $z \in M$ g.d.w.
$\underset{w \in M \setminus \{z\}}{\forall} \quad f(z) \leq f(w)$ (bzw. $f(z) < f(w)$);
f hat (strenges) globales Max. in $z \in M$ g.d.w.
$\underset{w \in M \setminus \{z\}}{\forall} \quad f(z) \geq f(w)$ (bzw. $f(z) > f(w)$);
f hat in z (str.) globalen Extremwert g.d.w.
f hat in z (str.) globales Min. oder Max.

(b) f hat (str.) lokales Min. in $z \in M$ g.d.w.
$$\underbrace{\underset{\epsilon > 0}{\exists} \quad \underset{w \in (B_\epsilon(z) \cap M) \setminus \{z\}}{\forall}}_{||} \quad f(z) \leq f(w) \text{ (bzw. } f(z) < f(w)\text{)};$$
(str.) lok. Max.: $\quad || \quad f(z) \geq f(w)$ (bzw. $f(z) > f(w)$);
f hat in z (str.) lok. Extremwert g.d.w.
f hat in z (str.) lok. Min./Max.

Bem. 7.51: $\underbrace{f \text{ hat (str.) globales/lokales}}_{||}$ Min in z g.d.w.
$-f \quad || \quad$ Max in z.
Jedes (str.) globale Min/Max ist auch (str.) lok. Min/Max.

Th. 7.52: $K \subseteq \mathbb{C}$ komp. $\wedge$ $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow f(K)$ komp.

Bew.: Sei (w_n) Folge in $f(K)$. Dann gibt es Folge (z_n) in K mit $\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \quad w_n = f(z_n)$.
K komp. $\Rightarrow \underset{(a_n) \text{ TF von } (z_n)}{\exists} \quad \lim a_n = a \in K$.
Dann ist $(f(a_n))$ TF von $(w_n) = (f(z_n))$ und $\lim f(a_n) = f(a)$, da f st.
Da $f(a) \in f(K)$, folgt $f(K)$ komp. nach Th. 7.48. $\square$

Lem. 7.53: $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}$ komp. $\Rightarrow \underset{m, M \in K}{\exists} \quad \underset{x \in K}{\forall} \quad m \leq x \leq M$
(K hat kl. und gr. Element).

Bew.: K beschr.
$$\Rightarrow \quad -\infty < m := \inf K \leq \sup K =: M < \infty.$$
Dann: $\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \quad \underset{x_n, y_n \in K}{\exists} \quad m \leq x_n \leq m + \frac{1}{n} \ \wedge \ M - \frac{1}{n} \leq y_n \leq M$.
K abg. $\Rightarrow m = \lim x_n \in K \wedge M = \lim y_n \in K$. $\square$

Th. 7.54: $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{C}$ komp., $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ hat gl. Max und Min,
d.h., $\underset{z_m, z_M \in K}{\exists} \quad f$ hat gl. Min in z_m und gl. Max in z_M
(gilt insbesondere für $\emptyset \neq K = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ komp. Intervall).

Bew.: $\emptyset \neq K$ komp., f st. $\overset{\text{Th. 7.52}}{\Rightarrow}$ $\emptyset \neq f(K) \subseteq \mathbb{R}$ komp.

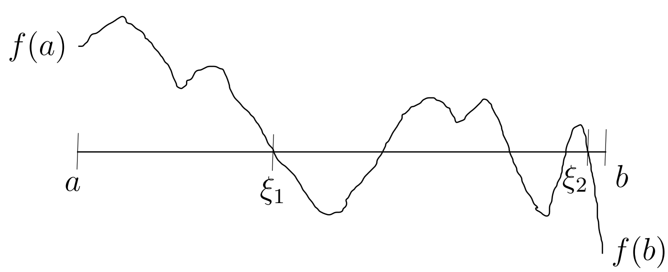
$\overset{\text{Lem. 7.53}}{\Rightarrow}$ $f(K)$ hat kl. El. m und gr. El. M

$\Rightarrow \underset{z_m, z_M \in K}{\exists} \quad f(z_m) = m \ \wedge \ f(z_M) = M.$ □

Bsp. 7.55: $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, zeigt, dass st. Fkt. auf unbeschr. Menge kein Max oder Min haben muss.
$f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x$, zeigt, dass st. Fkt. auf beschr., nicht abg. Menge kein Max. haben muss.

7.2.4. Zwischenwertsatz

Th. 7.56 (Nullstellensatz von Bolzano): Ist $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ st., $f(a) > 0 \wedge f(b) < 0$, so hat f mindestens eine Nullst. in $]a,b[$. Für $A := f^{-1}\{0\}$ gibt es $\xi_1 := \min A$, $\xi_2 := \max A$ mit $a < \xi_1 \leq \xi_2 < b$, $f > 0$ auf $[a, \xi_1[$ und $f < 0$ auf $]\xi_2, b]$.



Bew.: Setze $\xi_1 := \inf f^{-1}(\mathbb{R}_0^-)$.

(a): Es gilt $f(\xi_1) \leq 0$: Klar, falls $\xi_1 = b$. Sonst gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ groß genug: Es gibt $x_n \in [\xi_1, \xi_1 + \frac{1}{n}[$ mit $f(x_n) \leq 0$. Dann: $\lim x_n = \xi_1$
$\Rightarrow \lim f(x_n) = f(\xi_1) \leq 0.$
↖ f st. ↖ Th. 7.13(c)

(a) $\Rightarrow \xi_1 > a$ und $f > 0$ auf $[a, \xi_1[$.

(b): $f(\xi_1) \geq 0$: f st. $\Rightarrow \lim f(\xi_1 - \frac{1}{n}) = f(\xi_1)$.
Da $f(\xi_1 - \frac{1}{n}) > 0$ nach (a), folgt $f(\xi_1) \geq 0$ aus Th. 7.13(c).
(b) $\Rightarrow \xi_1 < b$.

(a) & (b) $\Rightarrow f(\xi_1) = 0 \wedge a < \xi_1 < b$.
Für $\xi_2 := \sup f^{-1}(\mathbb{R}_0^+)$ folgt $f(\xi_2) = 0$ und $a < \xi_2 < b$ ganz analog. Dann ist aber auch $f < 0$ auf $]\xi_2, b]$ und $\xi_1 \leq \xi_2$ klar. □

Th. 7.57 (Zwischenwertsatz): Sei $a < b$, $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.
Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, d.h.

$$\Big[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}\Big] \subseteq f\big([a,b]\big). \tag{7.40}$$

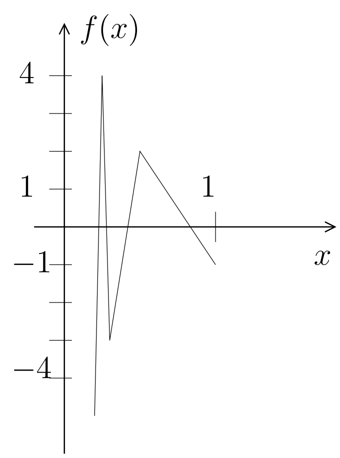
Bew.: Fall $f(a) = f(b)$: ✓
Fall $f(a) < f(b)$: Zu $\eta \in]f(a), f(b)[$ def.
$g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \eta - f(x)$. Dann g st.
mit $g(a) = \eta - f(a) > 0$, $g(b) = \eta - f(b) < 0$.
Th. 7.56 $\Rightarrow \underset{\xi \in]a,b[}{\exists} \quad g(\xi) = \eta - f(\xi) = 0$, also $f(\xi) = \eta$.
Fall $f(b) < f(a)$ geht analog mit $g(x) := f(x) - \eta$. □

Th. 7.58: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ st., so
ist auch $f(I)$ Intervall. Genauer:
$I = [a,b] \Rightarrow f(I) = [\min f(I), \max f(I)]$.
$\nwarrow$ Th. 7.54 & Th. 7.57
Sonst gibt es 9 Möglichkeiten:

$$f(I) = \mathbb{R}, \tag{7.41a}$$
$$\text{oder } f(I) =]-\infty, \sup f(I)], \tag{7.41b}$$
$$\text{oder } f(I) =]-\infty, \sup f(I)[, \tag{7.41c}$$
$$\text{oder } f(I) = [\inf f(I), \infty[\tag{7.41d}$$
$$\text{oder } f(I) = [\inf f(I), \sup f(I)], \tag{7.41e}$$
$$\text{oder } f(I) = [\inf f(I), \sup f(I)[, \tag{7.41f}$$
$$\text{oder } f(I) =]\inf f(I), \infty[, \tag{7.41g}$$
$$\text{oder } f(I) =]\inf f(I), \sup f(I)], \tag{7.41h}$$
$$\text{oder } f(I) =]\inf f(I), \sup f(I)[. \tag{7.41i}$$

Bew.: Folgt aus Th. 7.57 (siehe Skript). □

Bsp. 7.59: Finde $f:]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ st. mit $f(]0,1]) = \mathbb{R}$:



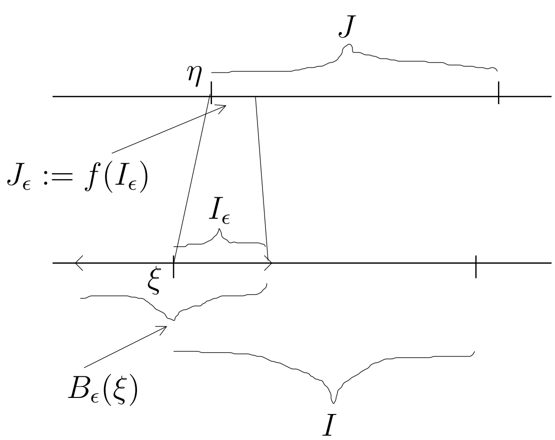
Z.B. f stückweise affin mit $\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \quad f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \cdot n$

(Formel im Skript).

7.2.5. Umkehrfkt., Existenz von Wurzeln, Exponentialfkt., Logarithmus

Th. 7.60: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und
streng steigend (bzw. fallend). Dann hat f eine
auf $J := f(I)$ def. Umkehrfkt.
$f^{-1} : J \longrightarrow I$ und f^{-1} ist stetig und str. steigend (bzw. fallend).
Ist f stetig, so ist J Intervall.

Bew.: Prop. 2.31(b) $\Rightarrow f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ inj.
Also $f : I \longrightarrow f(I)$ bij. und f^{-1} str. steigend (bzw. fallend)
nach Prop. 2.31(c).
Noch zu zeigen: $f^{-1} : J \longrightarrow I$ stetig.
Sei f str. steigend (sonst betrachte $-f$),
$\eta \in J$, $\xi \in I$ mit $f(\xi) = \eta$.
Z.z.: f^{-1} stetig in η.



Zu betrachten sind 3 Fälle:
(a) $\xi = \min I \neq \max I$,
(b) $\xi = \max I \neq \min I$,
(c) ξ weder $= \min I$ noch $= \max I$.
Wir machen (c) ((a),(b) gehen analog: Übung): Sei $\epsilon > 0$.
Wähle $\xi_1, \xi_2 \in I$ mit

$$\xi - \epsilon < \xi_1 < \xi < \xi_2 < \xi + \epsilon \tag{7.42}$$

(geht wegen (c)).
f str. st. $\Rightarrow f(\xi_1) < \eta < f(\xi_2)$.

Wähle $\delta > 0$ so, dass $f(\xi_1) < \eta - \delta < \eta < \eta + \delta < f(\xi_2)$.
Dann:

$$\underset{y \in J \cap B_\delta(\eta)}{\forall} \quad \Big(f(\xi_1) < y < f(\xi_2) \overset{f^{-1} \text{ str. st.}}{\Rightarrow} \xi_1 < f^{-1}(y) < \xi_2 \overset{(7.42)}{\Rightarrow} f^{-1}(y) \in B_\epsilon(\xi) \Big),$$

d.h. f^{-1} st. in η.
Th. 7.58 $\Rightarrow J = f(I)$ ist Intervall, falls f stetig. $\square$

Bem. & Def. 7.61 (Wurzeln):

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \Big(f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) := x^n, \text{ st. und str. steigend mit } J := f(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+ \overset{\text{Th. 7.60}}{\Rightarrow} f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \text{ st. und str. steigend} \Big).$$

Schreibe $\sqrt[n]{x} := x^{\frac{1}{n}} := f^{-1}(x)$.
$\nwarrow$ <u>n. Wurzel</u> von x.
Dann: $(\sqrt[n]{x})^n = (x^{\frac{1}{n}})^n = x$.
$\sqrt{x} := \sqrt[2]{x}$.

Bem. & Def. 7.62: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$:
Ang., $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, nicht beide gerade (sonst kürzen).
Dann: $m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ und m gerade, also $m = 2p$ mit $p \in \mathbb{N}$.
Also $2n^2 = m^2 = 4p^2 \Rightarrow n^2 = 2p^2 \Rightarrow n^2$ und n gerade $\lightning$.

Die Elemente von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen <u>irrationale</u> Zahlen.
Es gilt: $\mathbb{Q}$ abzählbar; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nicht abzählbar (Literaturverweis im Skript).

Th. 7.63 (AGM-Ungleichung):

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \quad \underset{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_0^+}{\forall} \quad \underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}_{\text{geometr. Mittel}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}}_{\text{arithm. Mittel}}; \tag{7.43}$$

"=" gilt g.d.w. $x_1 = \cdots = x_n$.

Bew.: Klar, falls ein $x_j = 0$.
Auch klar, falls $x_1 = \cdots = x_n$.
Bleibt der Fall, dass alle $x_j > 0$ und nicht alle gleich.
Zunächst gelte $\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = 1$.
Dann: $\underset{k}{\exists}\ x_k \neq 1$. Beweis von (7.43) durch Ind. für $n = 2, 3, \dots$
in der Form

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j = n \ \wedge \underset{k \in \{1, \dots, n\}}{\exists} x_k \neq 1 \right) \quad \Rightarrow \quad \prod_{j=1}^n x_j < 1.$$

Ind.verank. ($n = 2$): Es gilt $x_1 + x_2 = 2$ und
$\underset{\epsilon>0}{\exists}\ x_1 = 1 + \epsilon,\ x_2 = 1 - \epsilon \Rightarrow x_1 x_2 = 1 - \epsilon^2 < 1$.
Ind.schritt: Es ist $n \geq 2$ und $0 < x_1, \ldots, x_{n+1}$ mit
$\sum_{j=1}^{n+1} x_j = n + 1$ und $\underset{k,l}{\exists}\ \underset{\alpha,\beta>0}{\exists}\ x_k = 1 + \alpha,\ x_l = 1 - \beta$.
Setze $y := x_k + x_l - 1 = 1 + \alpha - \beta$.
Dann $\beta < 1 \Rightarrow y > 0$ und

$$y + \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k,l}}^{n+1} x_j = -1 + \sum_{j=1}^{n+1} x_j = n \quad \overset{\text{Ind.vor.}}{\Rightarrow} \quad y \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq k,l}}^{n+1} x_j \leq 1.$$

Wegen $x_k x_l = (1 + \alpha)(1 - \beta) = 1 + \alpha - \beta - \alpha\beta = y - \alpha\beta < y$,
folgt also $\prod_{j=1}^{n+1} x_j < 1$.
Bleibt der allg. Fall $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \lambda > 0$, nicht alle x_j gleich:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \lambda \sqrt[n]{\frac{x_1}{\lambda} \cdots \frac{x_n}{\lambda}} \overset{\text{Spezialfall}}{<} \lambda \frac{x_1 + \cdots + x_n}{\lambda\, n} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

□

Kor. 7.64: Für $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$, $n \in \{2, 3, \ldots\}$, $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt:

$$\sqrt[n]{a^p} < 1 + \frac{p}{n}(a - 1); \quad p = 1 \text{ liefert } \quad \sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a-1}{n}. \tag{7.44}$$

Bew.:

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^p \cdot \prod_{j=1}^{n-p} 1} \overset{\text{Th. 7.63}}{<} \frac{p\, a + n - p}{n} = 1 + \frac{p}{n}(a - 1). \tag{7.45}$$

□

Bsp. 7.65: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1: \tag{7.46}$$

Wegen $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^n < 1$ folgt
$\underset{n>1}{\forall}\ (\sqrt[n]{n})^n = n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} > 1$. Weiter

$$\underset{n>1}{\forall} \quad \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{n} \cdot \prod_{k=1}^{n-2} 1} \overset{\text{Th. 7.63}}{<} \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}. \tag{7.47}$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{\text{Übung}}{=} 0 \tag{7.48}$$

folgt (7.46) aus $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$ und Th. 7.16.

Bsp. 7.66 (Eulersche Zahl e):

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{7.49}$$

Es gilt $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $e = 2.71828\ldots$
Wir zeigen nur, dass der Grenzwert existiert:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \underset{\substack{x\in[-n,\infty[,\\ x\neq 0}}{\forall} \quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \underbrace{1\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}_{\substack{(n+1)\text{ Faktoren}\\ \text{nicht alle gleich}\\ \sum=n+1+x}} \overset{\text{Th. 7.63}}{<} \underbrace{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}_{\substack{(n+1)\text{ Fakt.}\\ \text{alle gleich}\\ \sum=n+1+x}}. \tag{7.50}$$

Def.

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \begin{aligned} a_n &:= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n := \left(1-\frac{1}{n}\right)^n, \\ c_n &:= b_{n+1}^{-1} = \left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \end{aligned} \tag{7.51}$$

(7.50) mit $x = 1 \Rightarrow (a_n)$ str. steigend,
(7.50) mit $x = -1 \Rightarrow (b_n)$ str. steigend $\Rightarrow (c_n)$ str. fallend.
$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad a_n < c_n \Rightarrow c_1$ ist ob. Schr. für (a_n),
a_1 ist unt. Schr. für (c_n)
$\overset{\text{Th. 7.19}}{\Rightarrow} (a_n)$ und (c_n) sind konvergent.
Aus $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \big(a_n(1+1/n)\big) = e\cdot 1 = e$ und
$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad a_n < e < c_n$ lässt sich e beliebig genau berechnen.

Def. 7.67: $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt <u>dicht</u> in $\mathbb{R}$ g.d.w.

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \ \underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall} \ A \cap B_\epsilon(x) \neq \emptyset.$$

Th. 7.68: **(a)** $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$.

(c) $$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{\substack{(r_n),(s_n)\\ \text{Folgen in } \mathbb{Q}}}{\exists} \quad \Big((r_n) \text{ str. steigend} \wedge (s_n) \text{ str. fallend} \wedge x = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} s_n \Big).$$

Bew. nur im Skript. □

Def. & Bem. 7.69 (Potenzen): Ziel: a^x für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ def. (a): $x \in \mathbb{Q}$, (b): $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(a) Sei $x = \frac{k}{n}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Def.

$$a^x := a^{\frac{k}{n}} := \sqrt[n]{a^k}. \tag{7.52}$$

Zeige: Def. hängt nicht von Darstellung von x ab, d.h., $x = \frac{k}{n} = \frac{km}{nm} \Rightarrow a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{km}{nm}}$. Dazu:

$$(a^{\frac{k}{n}})^{nm} = (\sqrt[n]{a^k})^{nm} = a^{km} \quad \text{und} \quad (a^{\frac{km}{nm}})^{nm} = (\sqrt[nm]{a^{km}})^{nm} = a^{km} \tag{7.53}$$

$\Rightarrow a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{km}{nm}}$, da $\lambda \mapsto \lambda^{nm}$ injektiv.
Potenzregeln für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$a^{x+y} = a^x\, a^y, \tag{7.54a}$$
$$a^x\, b^x = (ab)^x, \tag{7.54b}$$
$$(a^x)^y = a^{x\,y}. \tag{7.54c}$$

Z.B. für (7.54a): $\underset{k,l\in\mathbb{Z}}{\exists} \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists} \quad x = \frac{k}{n},\ y = \frac{l}{n}$ und

$$\begin{aligned}(a^{x+y})^n = (a^{\frac{k+l}{n}})^n = a^{k+l} &\overset{\text{Th. 5.7(a)}}{=} a^k\, a^l = (a^{\frac{k}{n}})^n\, (a^{\frac{l}{n}})^n \\ &\overset{\text{Th. 5.7(b)}}{=} (a^x\, a^y)^n.\end{aligned}$$

Monotonie: Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$\underset{x>0}{\forall} \Big(a < b \quad \Rightarrow \quad a^x < b^x\Big), \tag{7.55a}$$
$$\underset{x<0}{\forall} \Big(a < b \quad \Rightarrow \quad a^x > b^x\Big), \tag{7.55b}$$
$$\underset{a>1}{\forall} \Big(x < y \quad \Rightarrow \quad a^x < a^y\Big), \tag{7.55c}$$
$$\underset{0<a<1}{\forall} \Big(x < y \quad \Rightarrow \quad a^x > a^y\Big). \tag{7.55d}$$

Abschätzungen: Für $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$a > 1 \ \wedge\ x > 0 \quad \Rightarrow \quad a^x - 1 < x \cdot a^{x+1}, \tag{7.56}$$

$$\underset{m\in\mathbb{N}}{\forall} \Big(x, y \in [-m, m] \quad \Rightarrow \quad |a^x - a^y| \le L\,|x - y|, \\ \text{mit} \quad L := \max\{a^{m+1},\ (1/a)^{m+1}\}\Big). \tag{7.57}$$

Bew. v. (7.56): $x \ge 1$: $a^x < a^{x+1} < x \cdot a^{x+1} + 1$.
$x < 1$: $x = \frac{p}{n}$ mit $p < n \Rightarrow a^x \overset{(7.44)}{<} 1 + x(a-1) < 1 + xa < 1 + x \cdot a^{x+1}$.
Bew. v. (7.57): $x = y$: ✓
Sei $x < y$ (bei $x > y$ ggf. x, y umbenennen).

$a = 1$: ✓
$a > 1$: Setze $z := y - x > 0 \overset{(7.56)}{\Rightarrow} a^z - 1 < z a^{z+1}$

$$\overset{\cdot a^x}{\Rightarrow} \quad a^x\, a^z - a^x = a^y - a^x < z \cdot a^x\, a^{z+1} = (y-x)\, a^{y+1} \leq (y-x)\, a^{m+1}.$$

$a < 1$: $a^{-1} > 1$

$$\Rightarrow \quad |a^x - a^y| = |(a^{-1})^{-x} - (a^{-1})^{-y}| \leq |y - x|\, (a^{-1})^{m+1}.$$

(b) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ def.

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{q_n}, \quad \text{wobei } (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathbb{Q} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} q_n = x. \tag{7.58}$$

zeige: lim ex. und hängt nicht von Folge ab

Für die Existenz wählt man monotone Folge q_n nach Th. 7.68(c) und bemerkt, dass $(a^{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton & beschr. ist.
Sei nun (r_n) in $\mathbb{Q}$ beliebig mit $x = \lim r_n$. Dann gilt

$$\lim |q_n - r_n| = 0 \quad \overset{(7.57)}{\Rightarrow} \quad \underset{L>0}{\exists} \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad |a^{q_n} - a^{r_n}| \leq L\, |q_n - r_n| \to 0 \tag{7.59}$$

$$\Rightarrow \quad \lim a^{r_n} = \lim(a^{r_n} - a^{q_n} + a^{q_n}) = 0 + a^x = a^x, \tag{7.60}$$

d.h., (7.58) hängt nicht von der Folge ab.

Prop. 7.70: (7.54) – (7.57) gelten auch für $x, y \in \mathbb{R}$. Außerdem:

$$\underset{a>0}{\forall} \quad \underset{(x_n) \text{ Folge in } \mathbb{R}}{\forall} \quad \Big(\lim x_n = x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim a^{x_n} = a^x \Big). \tag{7.61}$$

Bew. (exemplarisch): (7.57): Seien (p_n), (q_n) monotone Folgen in $\mathbb{Q} \cap [-m, m]$, $m \in \mathbb{N}$ mit $\lim p_n = x \in \mathbb{R}$, $\lim q_n = y \in \mathbb{R}$.
Dann:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad |a^{p_n} - a^{q_n}| \overset{(7.57) \text{ für } \mathbb{Q}}{\leq} L\, |p_n - q_n|$$

$$\overset{\text{Th. 7.13(c)}}{\Rightarrow} \quad |a^x - a^y| \leq L\, |x - y|.$$

(7.61) folgt nun wegen

$$0 \leq |a^{x_n} - a^x| \leq L\, |x_n - x| \to 0.$$

(7.54a):

$$a^{x+y} = \lim a^{p_n + q_n} \overset{(7.54a) \text{ für } \mathbb{Q}}{=} \lim(a^{p_n}\, a^{q_n}) = a^x\, a^y.$$

□

Def. 7.71: **(a)** Jede Fkt. der Form

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{7.62}$$

heißt Potenzfkt. Für $\alpha > 0$ setze auch $0^\alpha := 0$;
für $\alpha \in \mathbb{Z}$ ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ def.; für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ auf $\mathbb{R}$.

(b) Jede Fkt. der Form

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) := a^x, \quad a > 0, \tag{7.63}$$

heißt (allgemeine) Exponentialfkt. Oft ist mit Exponentialfkt. der Fall $a = e$ gemeint. Schreibe auch $\exp(x) := e^x$.

Th. 7.72: **(a)** Jede Potenzfkt. ist auf ihrem Def.bereich stetig.
$\alpha > 0$: str. steigend auf $[0, \infty[$;
$\alpha < 0$: str. fallend auf $]0, \infty[$.

(b) Jede Exp.fkt. ist stetig.
$a > 1$: str. steigend;
$0 < a < 1$: str. fallend.

Bew.: (a): (7.55a) & (7.55b): Monotonie.
$\alpha \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$ Polynom (st. nach Bsp. 7.40(b)),
$\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ rat. Fkt. (st. nach Bsp. 7.40(c)).
$\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^+$: Siehe Bsp. 7.76(a) unten.
Stetigkeit in $x = 0$ für $\alpha > 0$:
Sei (x_n) Folge in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim x_n = 0$ sowie $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} \leq \alpha$.
$\underset{N \in \mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n > N}{\forall} \quad x_n \leq 1 \Rightarrow 0 < x_n^\alpha \leq x_n^{1/k}$.
$x \mapsto x^{1/k}$ st. $\Rightarrow \lim x_n^{1/k} = 0 \overset{\text{Th. 7.16}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} x_n^\alpha = 0$
$\Rightarrow x \mapsto x^\alpha$ st. in $x = 0$.

(b): (7.61) $\Rightarrow$ Stetigkeit.
(7.55c) & (7.55d) $\Rightarrow$ Monotonie. □

Bem. & Def. 7.73 (Logarithmus): Sei $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.
Nach Th. 7.72(b) ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) := a^x$, stetig und str. monoton. Auch $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ (Übung).
Th. 7.60 $\Rightarrow f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert, ist st. und str. monoton. $\log_a x := f^{-1}(x)$ heißt Logarithmus von x zur Basis a. Spezialfälle:

$$\ln x := \log_e x, \quad \operatorname{lb} x := \log_2 x, \quad \lg x := \log_{10} x. \tag{7.64}$$

$\nwarrow$ natürlicher Log. (wichtig)

Kor. 7.74: Für alle $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ist $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ stetig; für $a > 1$ str. steigend; für $0 < a < 1$ str. fallend. □

Th. 7.75 (Logarithmengesetze):

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \quad \log_a 1 = 0, \tag{7.65a}$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \quad \log_a a = 1, \tag{7.65b}$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \ \forall_{x \in \mathbb{R}^+} \quad a^{\log_a x} = x, \tag{7.65c}$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \ \forall_{x \in \mathbb{R}} \quad \log_a a^x = x, \tag{7.65d}$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \ \forall_{x,y \in \mathbb{R}^+} \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \tag{7.65e}$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \ \forall_{x \in \mathbb{R}^+} \ \forall_{y \in \mathbb{R}} \quad \log_a(x^y) = y \log_a x, \tag{7.65f}$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \ \forall_{x,y \in \mathbb{R}^+} \quad \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y, \tag{7.65g}$$

$$\forall_{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \ \forall_{x \in \mathbb{R}^+} \ \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x, \tag{7.65h}$$

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}} \ \forall_{x \in \mathbb{R}^+} \quad \log_b x = (\log_b a)\, \log_a x. \tag{7.65i}$$

Bew. (exemplarisch): Benutze $\log_a x = f^{-1}(x)$ mit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) := a^x$.

(7.65c): $a^{\log_a x} = f(f^{-1}(x)) = x$.

(7.65e): Wegen

$$f(\log_a x + \log_a y) = a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x}\, a^{\log_a y} \overset{(7.65c)}{=} xy,$$

folgt $\log_a(xy) = f^{-1}(xy) = f^{-1}\big(f(\log_a x + \log_a y)\big) = \log_a x + \log_a y$. □

Bsp. 7.76: **(a)** Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \tag{7.66}$$

↙ st. nach Kor. 7.74.

stetig: $f = \exp \circ (\alpha \ln) \Rightarrow f$ st. nach Th. 7.41.

↖ st. nach Th. 7.72(b)

(b) Nach Th. 7.41 sind auch stetig:

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_1(x) := \big(\exp(\lambda + x^2)\big)^\alpha,$$

$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_2(x) := \frac{1}{e^{\alpha x} + \lambda},$$

$$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_3(x) := \frac{x^5}{(\lambda + |x|)^\alpha}$$

(für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$).

7.3. Reihen

7.3.1. Definition & Konvergenz

Def. 7.77: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{K}$ (oder in anderer Menge A, wo Addition def. ist). Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad s_n := \sum_{j=1}^{n} a_j, \tag{7.67}$$

heißt (unendl.) Reihe. Notation:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j := \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j := (s_n)_{n\in\mathbb{N}}. \tag{7.68}$$

a_j: Summanden, s_n: Partialsummen.
Die Reihen $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$ heißen Reste von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Für $(a_j)_{j\in I}$ mit $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow I$ bij. def.

$$\sum_{j\in I} a_j := \sum_{j=1}^{\infty} a_{\phi(j)}. \tag{7.69}$$

Achtung: $\sum_{j\in I} a_j$ hängt von ϕ ab!

$\rightarrow$ Reihen sind spezielle Folgen.

Def. 7.78: Reihe (s_n) aus Def. 7.77 heißt konvergent g.d.w. $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{K}$.
Schreibe dann:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = s \tag{7.70}$$

und nenne s Summe der Reihe.
(s_n) divergent $:\Leftrightarrow$ (s_n) nicht konvergent.
Auch $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \pm\infty :\Leftrightarrow \lim s_n = \pm\infty$.

Warnung 7.79: Notation $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ wird mit zwei verschiedenen Bedeutungen benutzt, die man aus dem Zusammenhang erkennen muss:

(a) als Folge (z.B. in "$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}$ konvergiert"),

(b) als Zahl (z.B. in "$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1$").

Bsp. 7.80: **(a)** Geometrische Reihe: $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ für $|q| < 1$.

$s_n = \sum_{j=0}^{n} q^j \overset{\text{(3.22b)(gilt auch für } q \in \mathbb{C})}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

$$\underset{|q|<1}{\forall} \quad \sum_{j=0}^{\infty} q^j = \lim s_n = \lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \underset{\substack{\uparrow \\ \lim q^{n+1} = 0 \text{ nach Bsp. 7.6}}}{=} \frac{1}{1-q}. \tag{7.71}$$

(b) Harmonische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty. \quad \nwarrow \text{Bsp. 7.30} \tag{7.72}$$

Kor. 7.81: Seien $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ konvergent.

(a) Linearität:

$$\underset{\lambda,\mu \in \mathbb{C}}{\forall} \quad \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda\, a_j + \mu\, b_j) = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} a_j + \mu \sum_{j=1}^{\infty} b_j. \tag{7.73}$$

(b) Konjugation:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \overline{a_j} = \overline{\sum_{j=1}^{\infty} a_j}. \tag{7.74}$$

(c) Monotonie:

$$\left(\underset{j \in \mathbb{N}}{\forall} \quad a_j, b_j \in \mathbb{R} \ \wedge \ a_j \leq b_j \right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} b_j. \tag{7.75}$$

(d) $\lim a_n = 0$, $\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \quad \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j$ konvergiert.
Mit $S := \sum_{j=1}^{\infty} a_j$, $r_n := \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j$ gilt:

$$\left(\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} S = s_n + r_n \right), \quad \lim_{n \to \infty} r_n = 0. \tag{7.76}$$

Bew.: Alles folgt einfach aus den entsprechenden Grenzwertsätzen. Z.B.:
(b)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \overline{a_j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} \overset{\text{Def. \& Bem. 5.5(a)}}{=} \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{j=1}^{n} a_j} \overset{(7.11f)}{=} \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j} = \overline{\sum_{j=1}^{\infty} a_j},$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = S - S = 0,$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad r_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=n+1}^{k} a_j = \lim_{k\to\infty}(s_k - s_n) = S - s_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - s_n) = S - S = 0.$$

□

7.3.2. Konvergenzkriterien

Kor. 7.82: Für $a_j \in \mathbb{R}_0^+$, $s_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$ gilt

$$\lim s_n = \begin{cases} \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} & \text{für } (s_n) \text{ beschr.,} \\ \infty & \text{für } (s_n) \text{ unbeschr.} \end{cases} \tag{7.77}$$

Bew.: Folgt aus (7.21), da (s_n) steigend ist. □

Th. 7.83: Ang., $\exists_{k\in\mathbb{N}} \quad \forall_{j\geq k} \quad |a_j| \leq |b_j|$, $(a_j, b_j \in \mathbb{C})$.

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|$ konv. $\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konv. und

$$\left|\sum_{j=k}^{\infty} a_j\right| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |b_j|. \tag{7.78}$$

(b) $\sum a_j$ divergent $\Rightarrow \sum |b_j|$ div.

Bew.: Genügt, (a) zu zeigen ((b) ist Kontraposition).

Setze $s_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$, $t_n := \sum_{j=1}^{n} |b_j|$.
(t_n) konv. $\Rightarrow$ (t_n) ist Cauchy nach Th. 7.29, d.h.,

$$\forall_{\epsilon>0} \ \exists_{N\geq k} \ \forall_{n>m>N} \ |t_n - t_m| = |b_{m+1}| + \cdots + |b_n| < \epsilon$$

d.h., für $n > m > N$:

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= |a_{m+1} + \cdots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| \\ &\leq |b_{m+1}| + \cdots + |b_n| < \epsilon, \end{aligned}$$

d.h., auch (s_n) ist Cauchy und somit konv.
(7.78) folgt dann aus Th. 7.13(c). □

Def. 7.84: $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ mit $a_j \in \mathbb{R}$ heißt <u>alternierend</u> g.d.w.

$$\underset{j\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \operatorname{sgn}(a_{j+1}) = -\operatorname{sgn}(a_j) \neq 0.$$

Th. 7.85 (Leibnizkriterium): Sei $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ alternierend, $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend und $\lim a_n = 0$. Dann ist $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konv. und

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \underset{0\leq\theta_n\leq 1}{\exists} \quad \underbrace{r_n := \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j = \theta_n\, a_{n+1}}_{=\sum_{j=1}^{\infty} a_j - s_n = \text{“Abbruchfehler”}} \tag{7.79}$$

(sogar $0 < \theta_n < 1$, falls $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ streng fallend).

Bew. nur im Skript.

Bsp. 7.86: **(a)** Nach Th. 7.85 sind konvergent:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \dots, \tag{7.81a}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{2\,j-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots, \tag{7.81b}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\ln(j+1)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - + \dots \tag{7.81c}$$

(b) im Skript zeigt, dass Th. 7.85 ohne Vor., dass $(|a_n|)$ fallend, i.A. falsch wird.

Def. 7.87: $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ heißt <u>absolut konv.</u> $:\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ konv.

Kor. 7.88: $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ abs. konv. $\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konv. und Δ-Ungl. gilt, d.h.,

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|. \tag{7.82}$$

Bew.: Setze $a_j = b_j$ in Th. 7.83(a). $\square$

Th. 7.89: **(a)** $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ konv. $\wedge \underset{j\in\mathbb{N}}{\forall} \quad |a_j| \leq c_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ abs. konv.

(b) Wurzelkriterium:

$$\left(\underset{0<q<1}{\exists}\ (\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N})\right)$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ abs. konv.,} \tag{7.83a}$$

$$\#\left\{n \in \mathbb{N} : \ \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1\right\} = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ div.} \tag{7.83b}$$

(c) Quotientenkriterium: Seien alle $a_n \neq 0$.

$$\left(\underset{0<q<1}{\exists}\ \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \text{ für fast alle } n\right)\right)$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ abs. konv.,} \tag{7.84a}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \text{ für fast alle } n \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ div.} \tag{7.84b}$$

Bew.skizze: (a) ist Spezialfall von Th. 7.83(a).

(7.83a) & (7.84a) aus (a) durch Vergleich mit geometr. Reihe.
In (7.83b) und (7.84b) folgt zunächst $\neg(\lim a_n = 0)$. □

Warnung 7.90: Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ ist
$\underset{n\geq 2}{\forall}\ \sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1$, $\frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} < 1$, d.h.,
"< 1" reicht <u>nicht</u> in (7.83a) oder (7.84a).

Bsp. 7.91: **(a)** Wurzelkrit.
$\Rightarrow \underset{|z|<1}{\forall}\ \underset{p\in\mathbb{N}_0}{\forall}\ \sum_{n=1}^{\infty} n^p z^n$ abs. konv.:
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p |z|^n} = |z| < 1.$
$\nwarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$ nach Bsp. 7.65

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$. Quot.krit.
$\Rightarrow \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n\, n!}{n^n}$ abs. konv. für alle $|z| < e$
$\wedge \quad ||$ div. für alle $|z| \geq e\Big)$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z|\,(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{|z|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \overset{(7.49)}{\to} \frac{|z|}{e} \quad \text{für } n \to \infty. \tag{7.85}$$

Also $|z| < e \Rightarrow$ Konv. mit (7.84a),
$|z| > e \Rightarrow$ Div. mit (7.84b),
$|z| = e \Rightarrow$ Div. mit (7.84b), da
$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ nach Bsp. 7.66.

7.3.3. Abs. Konv. & Umordnungen

Th. 7.92: Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (siehe Def. 7.21) und $\sum_{j=1}^\infty a_j$ abs. konv., so ist auch $\sum_{j=1}^\infty b_j$ abs. konv., und es gilt $\sum_{j=1}^\infty a_j = \sum_{j=1}^\infty b_j$.

Th. 7.93 (großer Umordnungssatz): Sei I abzählbar mit $\#I = \#\mathbb{N}$ und

$$I = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} I_n \tag{7.86}$$

eine disjunkte Zerlegung von I (die I_n sind völlig beliebig, dürfen also leer, endlich oder unendlich sein).

(a) Ist $\sum_{j\in I} a_j$ abs. konv., so gilt

$$\sum_{j\in I} a_j = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha\in I_n} a_\alpha. \tag{7.87}$$

(b) Es sind äquivalent:

(i) $\sum_{j\in I} a_j$ ist abs. konv.

(ii) Es gibt $C \geq 0$ so, dass $\sum_{j\in J} |a_j| \leq C$ für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$.

(iii) $\sum_{n=1}^\infty \sum_{\alpha\in I_n} |a_\alpha| < \infty$.

Bsp. 7.94: Anwendung von Th. 7.93 auf Reihen mit $I := \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (sogenannte Doppelreihen).
Notation:

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} := \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{(m,n)}. \tag{7.88}$$

Nach Th. 3.24 ist $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ abzählbar, und es gibt $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ bijektiv. Nach (7.69) ist

$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{\phi(j)}$, und das Konvergenzverhalten und (falls existent) die Summe der Reihe hängt i.A. von ϕ ab!

Ist die Reihe jedoch abs. konv., so hängt der Wert nach Th. 7.92 nicht von ϕ ab, und wir können Th. 7.93 anwenden. Die Zerlegungen

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \dot{\bigcup_{m\in\mathbb{N}}} \{(m,n) : n \in \mathbb{N}\}, \tag{7.89a}$$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} \{(m,n) : m \in \mathbb{N}\}, \tag{7.89b}$$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : m+n=k\} \tag{7.89c}$$

liefern

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{(m,n)} &\overset{(7.89a)}{=} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \overset{(7.89b)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \\ &\overset{(7.89c)}{=} \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m+n=k} a_{mn} := \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{k-1} a_{m,k-m}. \end{aligned} \tag{7.90}$$

Th. 7.95: Sind $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ abs. konv., so lässt sich ihr Produkt als Doppelreihe berechnen:

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n = \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\sum_{m=1}^{k-1} a_m b_{k-m}}_{a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_{k-1} b_1}. \tag{7.91}$$

Man bezeichnet dies auch als Cauchyprodukt der Reihen.

Bew.: Setze $A := \sum_{m=1}^{\infty} |a_m|$, $B := \sum_{m=1}^{\infty} |b_m|$. Dann:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |a_m b_n| = \sum_{m=1}^{\infty} \big(|a_m|\, B\big) = AB < \infty,$$

d.h., $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n$ ist abs. konv. nach Th. 7.93(b)(iii). Dann folgt (7.91) aus (7.90), da

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_m b_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right). \qquad \square$$

7.3.4. b-adische Darstellungen reeller Zahlen

Beispiel im Dezimalsystem:

$$\begin{aligned} x = \frac{395}{3} &= 131.\overline{6} = 131.66\dots \\ &= 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + \sum_{n=1}^{\infty} 6 \cdot 10^{-n}, \end{aligned} \tag{7.92a}$$

wobei

$$\sum_{n=1}^{\infty} 6 \cdot 10^{-n} \overset{(7.71)}{=} 6 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3}.$$

Im Dualsystem:

$$x = 10000011.\overline{10} = 2^7 + 2^1 + 2^0 + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(2n+1)}, \tag{7.92b}$$

wobei

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(2n+1)} = \frac{2}{3} \quad \text{(Übung)}.$$

Def. 7.96: Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$.

(a) Ist $N \in \mathbb{Z}$ und $(d_N, d_{N-1}, d_{N-2}, \dots)$ Folge in $\{0, \dots, b-1\}$, so heißt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \underbrace{d_{N-\nu}}_{\text{Ziffern}} \, b^{N-\nu} \nwarrow \text{Basis} \tag{7.93}$$

<u>b-adische Reihe</u>.

(b) Ist $x \in \mathbb{R}_0^+$ die Summe der Reihe in (7.93), so heißt die Reihe <u>b-adische Darstellung</u> oder <u>b-adische Entwicklung</u> von x.

Th. 7.97: Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Jedes $x \in \mathbb{R}_0^+$ hat eine b-adische Darstellung, d.h.

$$\underset{x \in \mathbb{R}_0^+}{\forall} \quad \underset{N \in \mathbb{Z}}{\exists} \quad \underset{\substack{\text{Folge } (d_N, d_{N-1}, \dots) \\ \text{in } \{0, \dots, b-1\}}}{\exists} \quad x = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{N-\nu} \, b^{N-\nu}. \tag{7.94}$$

Für $x > 0$ und $d_N \neq 0$ gibt es genau eine oder genau zwei solche Darstellungen. Genauer sind äquivalent:

(i) Die b-adische Darstellung von x ist nicht eindeutig.

(ii) Es gibt genau zwei b-ad. Darst. von x.

(iii) Es gibt eine b-ad. Darst. von x so, dass gilt:
$\underset{n_0<N}{\exists} \quad \underset{n\leq n_0}{\forall} \quad d_n = 0.$

(iv) Es gibt eine b-ad. Darst. von x so, dass gilt:
$\underset{n_0\leq N}{\exists} \quad \underset{n\leq n_0}{\forall} \quad d_n = b-1.$

Bew.: Siehe Literatur im Skript. □

Bsp. 7.98: Jedes $n \in \mathbb{N}$ hat genau 2 dezimale (d.h. 10-adische) Darstellungen. Z.B.

$$2 = 2.\overline{0} = 1.\overline{9} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} \overset{(7.71)}{=} 1 + 9 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1 \right) = 1 + 9 \cdot \frac{1}{9}. \quad (7.95)$$

8. Konvergenz von $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen

8.1. Punktweise & gleichmäßige Konvergenz

→ Ziel: Konvergenz von Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : M \longrightarrow \mathbb{K}$, $M \subseteq \mathbb{C}$, studieren.

→ Dabei sind verschiedene Konvergenzbegriffe sinnvoll.

Def. 8.1: (f_n) sei Funktionenfolge, $f_n : M \longrightarrow \mathbb{K}$, $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$.

(a) (f_n) konvergiert punktweise (p.w.) gegen $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ g.d.w. $\underset{z\in M}{\forall} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$, also g.d.w.

$$\underset{z\in M}{\forall} \; \underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall} \; \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n>N}{\forall} \; |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad (8.1)$$

(N hängt in (8.1) i.A. von z und ϵ ab).

(b) (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ g.d.w.

$$\underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall} \; \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \; \underset{n>N}{\forall} \; \underset{z\in M}{\forall} \; |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \quad (8.2)$$

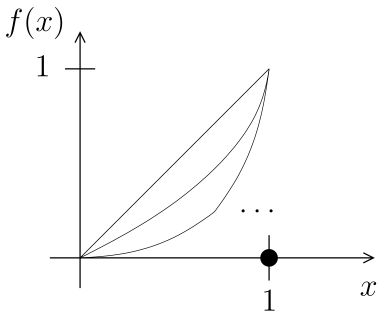
(N hängt in (8.2) nicht von z ab, aber i.A. immernoch von ϵ → Konv. ist glm. in z).

Bem. 8.2: Glm. Konv. $\Rightarrow$ p.w. Konv. (klar);
p.w. Konv. $\not\Rightarrow$ glm. Konv. (Bsp. 8.3(b)).

Bsp. 8.3: **(a)** $f_n : M \longrightarrow \mathbb{K}$, $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, $f_n(z) := \frac{1}{n}$. Dann: (f_n) konv. glm. gegen $f \equiv 0$.

(b) (f_n) mit $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$, konv. p.w., aber <u>nicht</u> glm. gegen

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1 : \end{cases} \tag{8.3}$$



p.w.: $\lim 1^n = \lim 1 = 1$,
$\underset{0 \leq x < 1}{\forall} \quad \lim x^n = 0$ (Bsp. 7.6);
nicht glm.: Für $\epsilon = \frac{1}{2}$ gilt nach Th. 7.57,
$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \quad \underset{\xi_n \in]0,1[}{\exists} \quad f_n(\xi_n) = \xi_n^n = \frac{1}{2}$, also

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} |f_n(\xi_n) - f(\xi_n)| = \xi_n^n = \frac{1}{2} = \epsilon. \tag{8.4}$$

Th. 8.4: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : M \longrightarrow \mathbb{K}$.
Sind alle f_n stetig in $\zeta \in M$ und
(f_n) konv. glm. gegen $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$, so ist f st. in ζ
(speziell: sind alle f_n st. auf M, so auch f).

Bew.: Sei $\epsilon > 0$.

$$f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f \quad \Rightarrow \quad \underset{m \in \mathbb{N}}{\exists} \underset{z \in M}{\forall} |f_m(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{8.5}$$

$$f_m \text{ st. in } \zeta \quad \Rightarrow \quad \underset{\delta > 0}{\exists} \underset{z \in M \cap B_\delta(\zeta)}{\forall} |f_m(z) - f_m(\zeta)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{8.6}$$

Also

$$\underset{z \in M \cap B_\delta(\zeta)}{\forall} |f(z) - f(\zeta)| \leq |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_m(\zeta)| + |f_m(\zeta) - f(\zeta)| < 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \tag{8.7}$$

also f st. in ζ. $\square$

8.2. Potenzreihen

Def. 8.5: **(a)** Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, (f_n) Fkt.folge, $f_n : M \longrightarrow \mathbb{K}$.
Def. die Fkt.reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j := (s_n)_{n\in\mathbb{N}}, \tag{8.8}$$

$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad s_n := \sum_{j=1}^{n} f_j$.

(b) Ist $f_n : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $f_n(z) = a_n\, z^n$, $a_n \in \mathbb{K}$, so heißt

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j := \sum_{j=0}^{\infty} f_j \tag{8.9}$$

<u>Potenzreihe</u> mit Koeffizienten a_j.
Warnung: In (8.9) schreibt man links $a_j\, z^j = f_j(z)$, obwohl man eigentlich f_j meint. Bei Potenzreihen muss man oft aus dem Zhg erschließen, ob Zahlen oder Funktionen gemeint sind.

Def. 8.6: Seien f_j, s_n wie in Def. 8.5(a).

(a) Schreibe

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \tag{8.10}$$

g.d.w. (s_n) p.w. gegen $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ konv.
$\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ heißt dann <u>Reihenentwicklung</u> von f;
<u>Potenzreihenentw.</u>, wenn $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ Potenzreihe ist.
Achtung: $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ kann Fkt. oder Fkt.folge bedeuten (vgl. Warnung 7.79).

(b) $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ konv. glm. gegen f g.d.w. (s_n) glm. gegen f konv. gemäß Def. 8.1(b).

Kor. 8.7: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, $f_j : M \longrightarrow \mathbb{K}$.

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ konv. glm. gegen f g.d.w. alle $\sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(z)$ konv. gegen $r_n(z) \in \mathbb{K}$ und

$$\underset{\epsilon\in\mathbb{R}^+}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ \underset{z\in M}{\forall}\ |r_n(z)| < \epsilon. \tag{8.11}$$

(b) Sind $a_j \in \mathbb{R}_0^+$, $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konv. in $\mathbb{R}$ und

$$\underset{z\in M}{\forall}\ \underset{j\in\mathbb{N}}{\forall}\ |f_j(z)| \leq a_j, \tag{8.12}$$

so konv. $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ glm.

(c) Sind alle f_j stetig (in $\zeta \in M$) und $\sum_{j=1}^{\infty} f_j \overset{\text{glm.}}{\to} f$, so ist auch f st. (in ζ).

Bem. 8.8: Problem für $f_j : M \longrightarrow \mathbb{K}$: Für welche $z \in M$ konv. $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$? Oft schwer zu lösen. Bei Potenzreihen hilft Th. 8.9:

Th. 8.9: Für jede Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j$ gibt es $r \in [0,\infty] := \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, genannt <u>Konvergenzradius</u> (KR) der Reihe so, dass

$$\Big(z \in \mathbb{K}\ \wedge\ |z| < r\Big) \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j \quad \text{konv. abs. in } \mathbb{K}, \tag{8.13a}$$

$$\Big(z \in \mathbb{K}\ \wedge\ |z| > r\Big) \quad \Rightarrow \quad || \quad \text{divergiert in } \mathbb{K}. \tag{8.13b}$$

Insbesondere: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j$ konv. p.w. auf $B_r(0)$.
Weiter

$$\underset{0<r_0<r}{\forall} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j \quad \text{konv. glm. auf } \overline{B}_{r_0}(0) \right). \tag{8.14}$$

Es gilt

$$r = \frac{1}{L}, \quad \text{mit} \quad L := \underbrace{\limsup_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{8.15}$$

$$:= \begin{cases} \text{größter HP, falls } (\sqrt[n]{|a_n|}) \text{ beschr.,} \\ \infty \text{ sonst} \end{cases}$$

(hier: $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$).
Einfacher gilt

$$r = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}, \tag{8.16}$$

falls alle $a_n \neq 0$ und $\quad || \quad$ ex. in $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$.

Bew.idee: Wurzelkriterium aus Th. 7.89(b) anwenden, bzw. Quot.krit aus Th. 7.89(c) für (8.16). $\square$

Kor. 8.10: Hat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j$ KR $r > 0$, so ist

$$f : B_r(0) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad f(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j, \tag{8.17}$$

stetig (stetig auf $\mathbb{K}$ für $r = \infty$).

Bew.: Folgt aus (8.14) und Th. 8.4. $\square$

Bsp. 8.11: **(a)** $\underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\forall}$ KR für $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha\, z^n$ ist $r = 1$, da

$$\underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1 \tag{8.18}$$

(folgt für $\alpha \in \mathbb{Z}$ aus (7.46) & Th. 7.13(a) und dann für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ aus Th. 7.16).
$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ (Fall $\alpha = 0$) div. für $|z| = 1$ ($|z^n| \not\to 0$),
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ (Fall $\alpha = -1$) div. für $z = 1$ (harm. Reihe), konv. für $z = -1$ (Bsp. 7.86(a)).

(b) KR von (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ und (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ ist $r = \infty$:

$$\text{(a):} \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty, \tag{8.19a}$$

$$\text{(b):} \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{8.19b}$$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ hat KR $r = 0$, da

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0. \tag{8.20}$$

Warnung 8.12: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j$ konv. i.A. <u>nicht</u> glm. auf $B_r(0)$ (r: KR)
(z.B. konv. $\sum z^j$ nicht glm. auf $B_1(0)$, Übung).
Für $|z| = r$ kann $\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j$ div. oder konv.
(siehe Bsp. 8.11(a)).

Def. & Bem. 8.13: Das <u>Cauchyprodukt</u> von $p := \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j$ und $q := \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, z^j$ ist

$$p * q := \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, z^j, \quad \text{mit} \quad \underset{j\in\mathbb{N}_0}{\forall} \quad c_j := \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + \dots + a_j b_0.$$

$\nwarrow$ heißt auch <u>Faltung</u> von p und q (8.21)

Achtung: $p * q$ ist Funktionenfolge und muss nicht konvergieren. Aber:
Wenn r_p: KR von p, r_q KR von q und $r_p, r_q > 0$, so sind

$$\begin{aligned} f : B_r(0) &\longrightarrow \mathbb{K}, \quad f(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j, \\ g : B_r(0) &\longrightarrow \mathbb{K}, \quad g(z) := \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, z^j, \end{aligned} \tag{8.22}$$

wohldef. für $r := \min\{r_p, r_q\}$ und

$$(7.91) \quad \Rightarrow \quad \forall_{z \in B_r(0)} \quad f(z)g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, z^j \quad \text{mit } c_j \text{ aus (8.21).} \tag{8.23}$$

8.3. Exponentialfunktionen

$\rightarrow$ können exp jetzt auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen:

Def. & Bem. 8.14: Def. die Exponentialfkt. durch

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \tag{8.24}$$

$\rightarrow$ nach Bsp. 8.11(b) ist KR $= \infty$.
Wir benutzen nun zunächst diese neue Def. von exp, sowie die neuen Def. $e := \exp(1) > 1 > 0$ und $\ln x := \log_{\exp(1)}(x)$ für $x \in \mathbb{R}^+$.
Wir werden zeigen, dass die neuen Def. mit den alten übereinstimmen, nämlich

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \tag{8.25}$$

und

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \tag{8.26}$$

(siehe (8.36) und Th. 8.16(c) unten).

Prop. 8.15: Ist $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und gilt

$$a := E(1) > 0 \quad \text{und} \tag{8.27a}$$

$$\underset{x,y\in\mathbb{R}}{\forall} \quad E(x+y) = E(x)E(y), \tag{8.27b}$$

so folgt

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad E(x) = a^x. \tag{8.28}$$

Bew.: $a = E(1) = E(0+1) = E(0)E(1) = E(0)\,a \overset{a>0}{\Rightarrow} E(0) = 1.$

$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad 1 = E(0) = E(x-x) = E(x)E(-x) \Rightarrow E(-x) = E(x)^{-1}$

$\Rightarrow E(x) \neq 0.$

$E(1) > 0 \wedge$ Th. 7.57 $\Rightarrow \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad E(x) > 0.$

Induktion liefert

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad E(n\cdot x) = \big(E(x)\big)^n. \tag{8.29}$$

$x = 1 \Rightarrow \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad E(n) = a^n.$

$x = \frac{1}{n} \Rightarrow a = E(1) = (E(\frac{1}{n}))^n \Rightarrow E(\frac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}}$

$$\Rightarrow \quad \underset{n,k\in\mathbb{N}}{\forall} \quad E(k/n) \overset{(8.29)}{=} \big(E(1/n)\big)^k = (a^{\frac{1}{n}})^k = a^{\frac{k}{n}},$$

d.h., (8.28) gilt für $x \in \mathbb{Q}^+$.

$$\underset{x\in\mathbb{R}^+}{\forall} \quad \lim \underbrace{q_n}_{\in\mathbb{Q}^+} = x \quad \Rightarrow \quad a^x = \lim_{n\to\infty} a^{q_n} = \lim_{n\to\infty} E(q_n) \underset{E \text{ stetig}}{=} E(x).$$

$$\underset{x\in\mathbb{R}^-}{\forall} \quad a^x = (a^{-x})^{-1} = \big(E(-x)\big)^{-1} = E(x).$$

$\square$

Th. 8.16: Mit exp aus (8.24) gilt:

(a) exp ist stetig auf $\mathbb{C}$.

(b) $\underset{z,w\in\mathbb{C}}{\forall} \quad \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w).$

(c) Mit $e := \exp(1)$ gilt

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Bew.: (a) gilt nach Kor. 8.10.
(b): Nach (7.91) gilt:

$$\forall_{z,w\in\mathbb{C}} \left(\begin{aligned} &\exp(z)\exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \\ &\qquad\text{mit} \quad c_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}\frac{w^{n-j}}{(n-j)!} = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} z^j\, w^{n-j} \overset{(5.23)}{=} \frac{(z+w)^n}{n!} \end{aligned} \right). \tag{8.30}$$

(c) folgt aus (a), (b) und Prop. 8.15. □

Def. 8.17: Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und ζ sei Häufungspunkt von M.
$f: M \longrightarrow \mathbb{K}$ hat <u>Limes</u> $\eta \in \mathbb{K}$ für $z \to \zeta$
(Notation: $\lim_{z\to\zeta} f(z) = \eta$)
g.d.w.

$$\forall_{\text{Folge } (z_k) \text{ in } M\setminus\{\zeta\}} \left(\lim_{k\to\infty} z_k = \zeta \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} f(z_k) = \eta \right). \tag{8.31}$$

$\to f$ braucht in ζ nicht definiert sein!

Th. 8.18: Mit $e^z := \exp(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ und $\ln x := \log_{\exp(1)}(x)$ für $x \in \mathbb{R}^+$ gelten:

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = 1 \quad \big(z \in M := \mathbb{C}\setminus\{0\}\big), \tag{8.32}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \big(x \in M :=]-1,\infty[\setminus\{0\}\big), \tag{8.33}$$

$$\forall_{\xi\in\mathbb{R}} \quad \lim_{x\to 0}\ln(1+\xi\, x)^{\frac{1}{x}} = \xi \quad \big(x \in M := \{x \in \mathbb{R}:\ 1+\xi\, x > 0\}\setminus\{0\}\big), \tag{8.34}$$

$$\forall_{\xi\in\mathbb{R}} \quad \lim_{x\to 0}(1+\xi\, x)^{\frac{1}{x}} = e^\xi \quad \big(x \in M := \{x \in \mathbb{R}:\ 1+\xi\, x > 0\}\setminus\{0\}\big), \tag{8.35}$$

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \tag{8.36}$$

Bew.: (8.32):

$$(8.24) \quad \Rightarrow \quad \forall_{z\neq 0} \quad \frac{e^z-1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots$$

$\Rightarrow$ (8.32), da $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$ stetig nach Kor. 8.10.

(8.33): Betrachte $f:]-1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \ln(x+1)$ mit $f^{-1}(x) = e^x - 1$. Dann:

$$\forall_{(x_k) \text{ in }]-1,\infty[\setminus\{0\}} \quad \lim x_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+x_k)}{x_k} = \lim \frac{\ln\big(1+f^{-1}(f(x_k))\big)}{f^{-1}(f(x_k))}$$
$$= \lim \frac{\ln\big(1+e^{f(x_k)}-1\big)}{e^{f(x_k)}-1} = \lim \frac{f(x_k)}{e^{f(x_k)}-1} \underset{(8.32)}{=} 1.$$
$$\lim f(x_k) = \ln 1 = 0 \nearrow$$

(8.34), (8.35): Übung.

(8.36): $x_n := \frac{1}{n}$ in (8.35) liefert:
$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$. $\square$

Def. 8.19 (komplexe Exponenten): Für $a \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{C}$ setze

$$a^z := \exp(z \ln a). \tag{8.37}$$

Th. 8.20: **(a)**

$$\underbrace{\forall_{a,b>0} \quad \forall_{z,w\in\mathbb{C}}}_{||} \quad a^{z+w} = a^z\, a^w, \tag{8.38a}$$

$$a^z\, b^z = (ab)^z. \tag{8.38b}$$

(b)

$$\forall_{a>0} \quad f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := a^z, \quad \text{stetig}, \tag{8.39a}$$

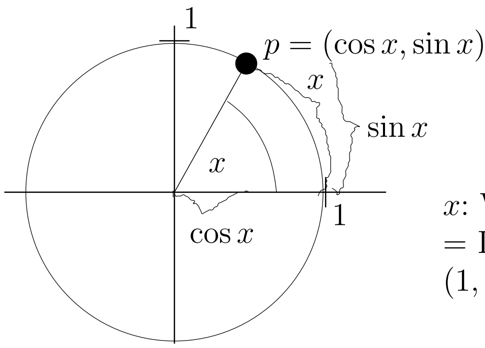
$$\forall_{\zeta\in\mathbb{C}} \quad g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(x) := x^\zeta, \quad \text{stetig}. \tag{8.39b}$$

(c)

$$\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{8.40}$$

8.4. Trigonometrische Funktionen

"Schuldefinition" von sin und cos am Einheitskreis:



x: Winkel im Bogenmaß
= Länge der Kreislinie zwischen
$(1,0)$ und p

Def. ist nicht mathematisch rigoros – und wie soll man z.B. $\sin 1$ berechnen?

Def. & Bem. 8.21:

$$\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots, \tag{8.41a}$$

$$\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots. \tag{8.41b}$$

(a) In beiden Fällen gilt $|a_n| \le \frac{|z|^n}{n!}$, also $\underset{z\in\mathbb{C}}{\forall} \quad |\sin z|, |\cos z| \le e^{|z|} < \infty$, d.h. beide Reihen sind abs. konv., die Potenzreihen haben KR $= \infty$. Kor. 8.10 $\Rightarrow \sin, \cos$ stetig.

(b) Def. $\pi := 2\min\{x \in \mathbb{R}^+ : \cos x = 0\}$.
Zu zeigen: Das Min. existiert. Dazu:

$$\underset{x\in\mathbb{R}^+}{\forall}\ \underset{k\in\mathbb{N}}{\forall} \left(\underbrace{\frac{x^k}{k!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 > \frac{x}{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad k+1 > x \right).$$

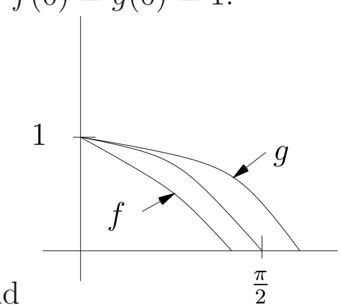
gilt also für alle $k \geq 2$, $0 < x < 3$,

und $\dfrac{x^k}{k!} \to 0$ monoton für $k \to \infty$.

Aus Th. 7.85 und (7.79) folgt dann

$$\underset{0<x<3}{\forall} \begin{pmatrix} f(x) := 1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} =: g(x), \\ x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}. \end{pmatrix} \tag{8.42}$$

f hat kl. pos. Nullst. $\sqrt{2}$;
g hat kl. pos. Nullst. $\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$; $f(0) = g(0) = 1$.



Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ Min. ex. und

$$1.4 < \sqrt{2} < \frac{\pi}{2} < \sqrt{6 - 2\sqrt{3}} < 1.6 \tag{8.43}$$

Man kann zeigen, dass
$\pi \notin \mathbb{Q}$, $\pi = 3.14159\ldots$ (Literatur im Skript).

Th. 8.22 (Trigonometr. Identitäten):

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \tag{8.44a}$$

$$\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad \sin z = -\sin(-z), \quad \cos z = \cos(-z), \tag{8.44b}$$

$$\forall_{z,w\in\mathbb{C}} \quad \sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \tag{8.44c}$$

$$\forall_{z,w\in\mathbb{C}} \quad \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \tag{8.44d}$$

$$\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad (\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1, \tag{8.44e}$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \forall_{x\in[0,\frac{\pi}{2}[} \quad \cos x > 0, \tag{8.44f}$$

$$\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad \sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \quad \cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin z, \tag{8.44g}$$

$$\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad \sin(z+\pi) = -\sin z, \quad \cos(z+\pi) = -\cos z, \tag{8.44h}$$

$$\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad \sin(z+2\pi) = \sin z, \quad \cos(z+2\pi) = \cos z \tag{8.44i}$$

(d.h., $\sin, \cos$ sind 2π-periodisch),

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1, \quad \lim_{z\to 0}\frac{\cos z - 1}{z^2} = -\frac{1}{2}. \tag{8.44j}$$

Bew. (exemplarisch): (a),(b) direkt aus (8.41).
(c),(d): Mit Cauchyprodukt (7.91) ähnlich wie in (8.30).
(e):

$$\begin{aligned}(\sin z)^2 + (\cos z)^2 &\overset{(8.44b)}{=} \cos z \cos(-z) - \sin z \sin(-z) \\ &\overset{(8.44d)}{=} \cos(z-z) = \cos 0 = 1.\end{aligned}$$

(j):

$$\forall_{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}} \quad \frac{\sin z}{z} = \underbrace{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - + \dots}_{=:f(z)}$$

Wie in Def. & Bem. 8.21 folgt KR $r = \infty$ und Stetigkeit auf $\mathbb{C}$. Also $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0} f(z) = f(0) = 1$. □

Th. 8.23: $\sin(\mathbb{R}) = \cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Monotonie:

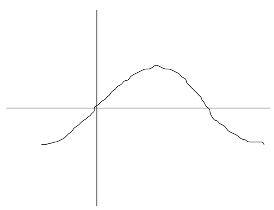
$$\underset{k\in\mathbb{Z}}{\forall} \quad \text{sin ist str. steigend auf} \quad \left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right], \tag{8.45a}$$

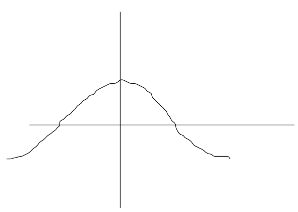
$$|| \quad \text{sin ist str. fallend auf} \quad \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right], \tag{8.45b}$$

$$|| \quad \text{cos ist str. steigend auf} \quad [(2k-1)\pi, 2k\pi], \tag{8.45c}$$

$$|| \quad \text{cos ist str. fallend auf} \quad [2k\pi, (2k+1)\pi], \tag{8.45d}$$

d.h., für $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi]$ durchläuft
$(\cos x, \sin x)$ den Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn.





Bew. für cos: $\sin^2 + \cos^2 = 1 \Rightarrow \cos(\mathbb{R}) \subseteq [-1,1]$.
Zwischenwertsatz $\Rightarrow [-1,1] \subseteq \cos(\mathbb{R})$.

$$\underset{0\leq x<x+y\leq\frac{\pi}{2}}{\forall} \quad \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y \overset{(*)}{\leq} \cos x \cos y \overset{(**)}{<} \cos x.$$

$(*)$: (8.42) $\Rightarrow 0 < x - \frac{x^3}{6} < \sin x \quad \underbrace{\text{für } x \in]0, \frac{\pi}{2}]};$

$(**)$: (8.42) $\Rightarrow \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} < 1 \quad || \quad .$

Dann (8.44)(b,g-i) $\Rightarrow$ Monotonie auf anderen Intervallen. $\square$

Th. 8.24:

$$\underset{z\in\mathbb{C}}{\forall} \quad e^{iz} = \cos z + i\,\sin z \quad \text{(Eulerformel)}, \tag{8.46a}$$

$$\underset{z\in\mathbb{C}}{\forall} \quad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \tag{8.46b}$$

$$\underset{z\in\mathbb{C}}{\forall} \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{8.46c}$$

Bew.: (a) direkt aus Potenzreihendef.

(b): $e^{iz} + e^{-iz} \overset{(8.46a)}{=} \cos z + i \sin z + \cos(-z) + i \sin(-z) = 2 \cos z$.

(c): $e^{iz} - e^{-iz} \overset{(8.46a)}{=} \cos z + i \sin z - \cos(-z) - i \sin(-z) = 2i \sin z$. □

Th. 8.25:

$$\exp^{-1}\{1\} = \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}, \tag{8.47a}$$

↖ alle Lösungen von $e^z = 1$

$$\exp^{-1}\{0\} = \emptyset \quad \text{(exp hat keine Nullstellen)}, \tag{8.47b}$$

$$\sin^{-1}\{0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \tag{8.47c}$$

$$\cos^{-1}\{0\} = \left\{(2k+1)\,\tfrac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\} \tag{8.47d}$$

((8.47c) und (8.47d) liefern alle Nullst. von $\cos, \sin$ in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$).

Def. & Bem. 8.26: Def.

$$\tan : \mathbb{C} \setminus \cos^{-1}\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \tag{8.48a}$$

$$\cot : \mathbb{C} \setminus \sin^{-1}\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}, \tag{8.48b}$$

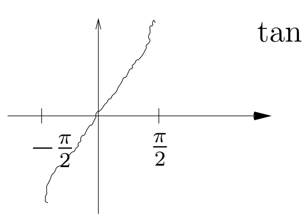
$\tan, \cot$ sind π-periodisch:

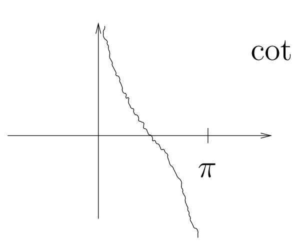
$$\tan(z+\pi) = \frac{\sin(z+\pi)}{\cos(z+\pi)} \overset{(8.44h)}{=} \frac{-\sin z}{-\cos z} = \tan z \tag{8.49}$$

(cot analog).
Auch folgt $\tan(\mathbb{R} \setminus \cos^{-1}\{0\}) = \cot(\mathbb{R} \setminus \sin^{-1}\{0\}) = \mathbb{R}$,

$$\underset{k\in\mathbb{Z}}{\forall} \quad \text{tan str. steigend auf} \quad \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \tag{8.50a}$$

$$\underset{k\in\mathbb{Z}}{\forall} \quad \text{cot str. fallend auf} \quad \left]k\pi, (k+1)\pi\right[. \tag{8.50b}$$





Def. & Bem. 8.27: Die strenge Monotonie von $\sin, \cos, \tan, \cot$ liefert Umkehrfkt.

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2], \tag{8.51a}$$
$$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0, \pi], \tag{8.51b}$$
$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[, \tag{8.51c}$$
$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[, \tag{8.51d}$$

nach Th. 7.60 alle stetig,
$\arcsin, \arctan$: str. steigend,
$\arccos, \operatorname{arccot}$: str. fallend.
Achtung: In der Literatur werden mit $\arcsin, \dots$ auch Umkehrfkt. von $\sin, \dots$ auf anderen Monotonieintervallen von $\sin, \dots$ bezeichnet, und unsere Fkt. aus (8.51) als Hauptwerte.

8.5. Polarkoordinaten komplexer Zahlen, Fundamentalsatz der Algebra

Th. 8.28:

$$\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad \exists_{\substack{r\in\mathbb{R}_0^+,\\ \varphi\in\mathbb{R}}} \quad z = r\, e^{i\varphi}. \tag{8.52}$$

Dabei ist $r = |z|$ und φ ist für $z \neq 0$ bis auf Addition eines Vielfachen von 2π bestimmt, d.h.

$$\forall_{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}} \quad \Big(z = r\, e^{i\varphi_1} = r\, e^{i\varphi_2} \ \wedge \ r \geq 0 \quad \Rightarrow \quad r = |z| \ \wedge \exists_{k\in\mathbb{Z}} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k\Big). \tag{8.53}$$

Bew.: $z = 0$: ✓
Sei $z \neq 0$, $z = x + iy$. Setze $r := |z|$.
Fall $y \geq 0$. Dann:

$$\frac{z}{r} = \xi + i\eta \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{x}{r}, \quad \eta = \frac{y}{r} \geq 0, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1. \tag{8.54}$$

Also $\xi \in [-1,1]$ und $\varphi := \arccos \xi \in [0, \pi]$.
Also $\xi = \cos\varphi$, $\sin\varphi \geq 0$ und

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - (\cos\varphi)^2} = \sqrt{1 - \xi^2} \overset{(8.54)}{=} \eta.$$

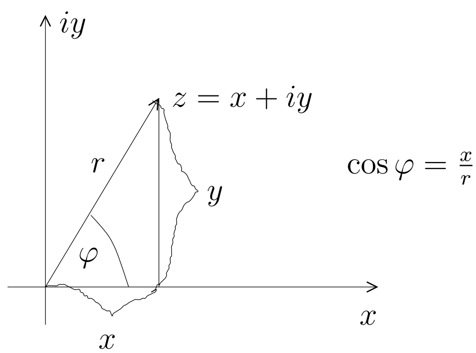
Also

$$\frac{z}{r} = \xi + i\eta = \cos\varphi + i\sin\varphi \overset{(8.46a)}{=} e^{i\varphi}.$$

Fall $y \leq 0$: Wende obigen Fall auf $\bar{z} = x - iy$ an.

Gilt $r\,e^{i\varphi_1} = r\,e^{i\varphi_2}$, $r > 0$, so folgt
$e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = 1 \overset{(8.47a)}{\Rightarrow} i(\varphi_1 - \varphi_2) \in \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$. □

Def. & Bem. 8.29: Gilt $z = r\,e^{i\varphi}$, so heißen
(r, φ) Polarkoordinaten von $z \in \mathbb{C}$;
(x, y) für $z = x + iy$ kartesische Koordinaten.
(r, φ) eindeutig, falls $z \neq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$.
r: Betrag, φ: Argument.
In kompl. Ebene:
$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$
$\Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
(Beträge mult., Argumente add.)



Kor. 8.30: Die Abb.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad f(\varphi) := e^{i\varphi}, \tag{8.55}$$

ist surjektiv und $f(\varphi_1) = f(\varphi_2) \Leftrightarrow \underset{k\in\mathbb{Z}}{\exists} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k$. □

Kor. 8.31 (Einheitswurzeln): Gleichung $z^n = 1$ hat genau die n verschiedenen Lösungen $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\underset{k=1,\dots,n}{\forall} \quad \zeta_k := e^{k2\pi i/n} \overset{(8.46a)}{=} \cos\frac{k2\pi}{n} + i\,\sin\frac{k2\pi}{n} = \zeta_1^k. \tag{8.56}$$

$\nwarrow$ heißen die n. Einheitswurzeln

Bew.: Nach Kor. 8.30 sind alle ζ_k versch. und nach Th. 6.6(a) müssen dies dann alle Lösungen von $z^n = 1$ sein. □

Th. 8.32 (Fundamentalsatz der Algebra): Jedes Polynom
$P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $P(z) := \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ von Grad $n \geq 1$
hat mindestens eine Nullst. $z_0 \in \mathbb{C}$.

Bew.idee: Betrachte Fall $a_n = 1$.
Zeige, dass es $z_0 \in \mathbb{C}$ so gibt, dass $|P|$ in z_0 minimal ist.
Zeige, dass $|P|$ an Stellen $z \in \mathbb{C}$ mit $P(z) \neq 0$ nicht
minimal ist. □

Kor. 8.33:

$$\underset{\substack{P:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\\ P \text{ Pol., } \deg(P)=n\geq 1}}{\forall} \quad \underset{c,\zeta_1,\dots,\zeta_n\in\mathbb{C}}{\exists} \quad P(z) = c(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\cdots(z-\zeta_n) \tag{8.57}$$

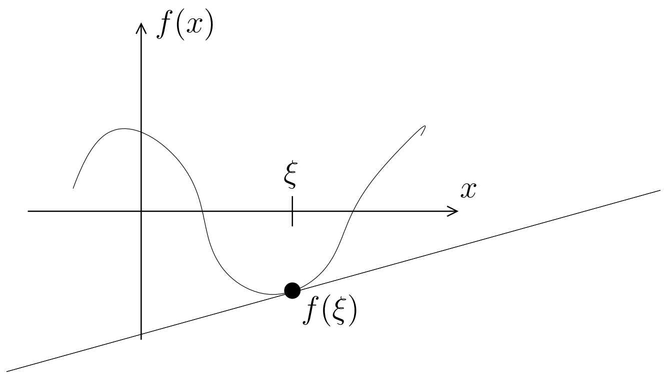
(die ζ_k sind genau die Nullst. von P;
sie müssen nicht verschieden sein).

Bew.: Kombiniere Th. 8.32 mit Bem. 6.7. □

9. Differentialrechnung

9.1. Def. der Ableitung und Regeln

Idee: Fkt. f lokal durch (affin) lineare Fkt. approximieren, den Graph von f in ξ durch die Tangente in ξ: $f'(\xi)$: Steigung der Tangente.



Def. 9.1: Sei $a < b$, $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$ ($a = -\infty$, $b = \infty$
erlaubt), $\xi \in]a,b[$.

f heißt <u>differenzierbar</u> in ξ g.d.w. folgender Limes im Sinn von Def. 8.17 existiert:

$$f'(\xi) := \partial_x f(\xi) := \frac{df(\xi)}{dx} := \lim_{x\to\xi} \overbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}^{\text{Differenzenquotient}} \underset{\uparrow}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}. \tag{9.1}$$

$$\text{da } \lim x_k = \xi \Leftrightarrow \lim \underbrace{h_k}_{:=x_k-\xi} = 0$$

$f'(\xi) \in \mathbb{K}$ heißt dann <u>Ableitung</u> oder <u>Differentialquotient</u> von f in ξ.
f heißt <u>dif.bar</u> g.d.w.
$f'(\xi)$ ex. für alle $\xi \in]a,b[$. Dann heißt
die Fkt

$$f' :]a,b[\longrightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto f'(x), \tag{9.2}$$

die <u>Ableitung</u> von f.

Bem. 9.2: Sei $\xi \in]a,b[$, $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{C}$. Dann:
f dif.bar in $\xi \Leftrightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ dif.bar in ξ.
Dann gilt:

$$f'(\xi) = (\operatorname{Re} f)'(\xi) + i\,(\operatorname{Im} f)'(\xi). \tag{9.3}$$

Bew.:

$$\underset{x\neq\xi}{\forall} \quad \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \frac{\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Re} f(\xi)}{x-\xi} + i\,\frac{\operatorname{Im} f(x) - \operatorname{Im} f(\xi)}{x-\xi}. \tag{9.4}$$

$$\searrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\zeta \overset{(7.2)}{\Leftrightarrow} \qquad \operatorname{Re}\zeta \qquad \wedge \qquad \operatorname{Im}\zeta$$

□

Def. 9.3: Ist $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ dif.bar in ξ gemäß Def. 9.1, so heißt der Graph von

$$L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad L(x) := f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi), \tag{9.5}$$

also die Gerade durch $(\xi, f(\xi))$ mit Steigung $f'(\xi)$,
die <u>Tangente</u> an den Graph von f in ξ.

Th. 9.4: Ist $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$ dif.bar in ξ, so ist f stetig in ξ.

Bew.: Ist (x_k) Folge in $]a,b[\setminus \{\xi\}$ mit $\lim x_k = \xi$, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} \big(f(x_k) - f(\xi)\big) = \lim \frac{(x_k-\xi)\big(f(x_k)-f(\xi)\big)}{x_k-\xi} = 0 \cdot f'(\xi) = 0, \tag{9.6}$$

d.h., f st. in ξ. □

Bsp. 9.5: **(a)** Für $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{K}$, $f(x):=ax+b$ mit $a,b\in\mathbb{K}$ gilt $f':\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{K}$, $f'(x)=a$:

$$\lim h_k=0 \quad (\text{alle } h_k\neq 0)$$
$$\Rightarrow \quad \lim\frac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k}=\lim\frac{a(x+h_k)+b-ax-b}{h_k}=\lim\frac{a\,h_k}{h_k}=a. \tag{9.7}$$

Speziell: $f\equiv b\Rightarrow f'\equiv 0$.

(b) Sei $c\in\mathbb{K}$. Für $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{K}$, $f(x):=e^{cx}$ gilt $f':\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{K}$, $f'(x)=c\,e^{cx}$:
Fall $c=0$: Siehe (a). Fall $c\neq 0$:

$$\lim h_k=0 \quad (\text{alle } h_k\neq 0)$$
$$\Rightarrow \quad \lim\frac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k}=\lim\frac{e^{cx+ch_k}-e^{cx}}{h_k}$$
$$=c\,e^{cx}\underbrace{\lim\frac{e^{ch_k}-1}{ch_k}}_{=1 \text{ nach } (8.32)}=c\,e^{cx}. \tag{9.8}$$

$c=1$: $f(x)=e^x\Rightarrow f'(x)=e^x$;
$c=\ln a$, $a\in\mathbb{R}^+$: $f(x)=a^x=e^{x\ln a}\Rightarrow f'(x)=(\ln a)\,a^x$.

(c) $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$
$\Rightarrow f',g':\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f'(x)=\cos x$, $g'(x)=-\sin x$:

$$\lim h_k=0 \quad (\text{alle } h_k\neq 0)$$
$$\Rightarrow \quad \lim\frac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k}=\lim\frac{\sin(x+h_k)-\sin x}{h_k}$$
$$\overset{(8.44c)}{=}\lim\frac{\sin x\cos h_k+\cos x\sin h_k-\sin x}{h_k}$$
$$=\sin x\lim_{k\to\infty}\frac{h_k(\cos h_k-1)}{h_k^2}+\cos x\lim_{k\to\infty}\frac{\sin h_k}{h_k}$$
$$\overset{(8.44j)}{=}(\sin x)\cdot 0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(\cos x)\cdot 1=\cos x. \tag{9.9}$$

$g'(x)=-\sin x$: Übung.

(d) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x):=|x|$, ist nicht dif.bar in $\xi=0$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(0+\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=\lim 1=1, \tag{9.10a}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(0-\frac{1}{n})-f(0)}{-\frac{1}{n}}=\lim\frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}}=-1, \tag{9.10b}$$

d.h., $\lim\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ ex. <u>nicht</u>.

Th. 9.6: Seien $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ dif.bar in $\xi \in]a, b[$.

(a) $\underset{\lambda \in \mathbb{K}}{\forall} \quad \lambda f$ dif.bar in ξ und $(\lambda f)'(\xi) = \lambda f'(\xi)$.

(b) $f + g$ dif.bar in ξ und $(f + g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi)$.

(c) Produktregel: fg dif.bar in ξ und $(fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi)$.

(d) Quotientenregel: $g(\xi) \neq 0 \Rightarrow f/g$ dif.bar in ξ und

$$(f/g)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}.$$

Bew. von (c),(d): Sei $\lim h_k = 0$, alle $h_k \neq 0$.

(c):

$$\begin{aligned}
&\lim \frac{(fg)(\xi + h_k) - (fg)(\xi)}{h_k} \\
&= \lim \frac{f(\xi + h_k)g(\xi + h_k) - f(\xi)g(\xi + h_k) + f(\xi)g(\xi + h_k) - f(\xi)g(\xi)}{h_k} \\
&= \lim g(\xi + h_k) \lim_{k \to \infty} \frac{f(\xi + h_k) - f(\xi)}{h_k} + f(\xi) \lim_{k \to \infty} \frac{g(\xi + h_k) - g(\xi)}{h_k} \\
&= f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi).
\end{aligned}$$

$\nwarrow$ g st. in ξ

(d): Fall $f \equiv 1$:

$$\lim \frac{(1/g)(\xi + h_k) - (1/g)(\xi)}{h_k} = \lim \frac{g(\xi) - g(\xi + h_k)}{g(\xi + h_k)g(\xi)h_k} \overset{\swarrow g \text{ st. in } \xi}{=} -\frac{g'(\xi)}{(g(\xi))^2}.$$

Allg. Fall folgt mit $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ aus (c). $\square$

Bsp. 9.7: **(a)**

$$\begin{aligned}
& P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \quad a_j \in \mathbb{K} \\
\Rightarrow \quad & P' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad P'(x) = \sum_{j=1}^{n} j\, a_j x^{j-1} :
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Bew. mit Induktion über n: Fall $n = 0, 1$ gilt nach Bsp. 9.5(a).
Ind.schritt: $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j + a_{n+1} x\, x^n$

$$\overset{\text{Ind.vor., Th. 9.6}}{\Rightarrow} \quad P'(x) = \sum_{j=1}^{n} j\, a_j x^{j-1} + a_{n+1}(\underbrace{1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1}}_{(n+1)x^n}) = \sum_{j=1}^{n+1} j\, a_j x^{j-1}.$$

(b) Ableitung von rationalen Fkt P/Q berechnet man mit (9.11) und Quot.regel Th. 9.6(d).

(c)

$$\tan' : \mathbb{R} \setminus \cos^{-1}\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tan' x = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2, \tag{9.12a}$$

$$\cot' : \mathbb{R} \setminus \sin^{-1}\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \cot' x = -\frac{1}{(\sin x)^2} = -(1 + (\cot x)^2) : \tag{9.12b}$$

Bsp. 9.5(c) & Th. 9.6(d):

$$\tan' x = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} \overset{(8.44e)}{=} \frac{1}{(\cos x)^2} \overset{(8.44e)}{=} 1 + (\tan x)^2.$$

$\cot'$ analog.

Th. 9.8 (Abl. der Umkehrfkt): Sei $I :=]a,b[$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dif.bar und str. steigend (bzw. str. fallend), $J := f(I)$. Dann ex. $f^{-1} : J \longrightarrow I$ st. und str. steigend (bzw. str. fallend) und

$$\underset{\xi \in I}{\forall} \left(f'(\xi) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f^{-1} \text{ dif.bar in } \eta := f(\xi) \text{ und } (f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(\eta)\big)} \right). \tag{9.13}$$

Bew.: Wegen Th. 9.4 & Th. 7.60 ist nur noch (9.13) zu zeigen. Sei (y_k) Folge in $J \setminus \{\eta\}$ mit $\lim y_k = \eta$. Dann ist $(f^{-1}(y_k))$ Folge in $I \setminus \{\xi\}$ mit $\lim f^{-1}(y_k) = f^{-1}(\eta) = \xi$, da f^{-1} stetig. Also

$$(f^{-1})'(\eta) = \lim \frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(\eta)}{y_k - \eta} = \lim \frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(\eta)}{f\big(f^{-1}(y_k)\big) - f\big(f^{-1}(\eta)\big)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(\eta)\big)}. \tag{9.14}$$

$\square$

Bsp. 9.9: **(a)** Für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^x$ ist $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \ln x$. $f'(x) = e^x \neq 0$, also

$$\underset{x \in \mathbb{R}^+}{\forall} \quad \ln' x = \frac{1}{f'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

(b) Für $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow]-1,1[$, $f(x) = \sin x$ ist
$f'(x) = \cos x \neq 0$, $f^{-1} :]-1,1[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
$f^{-1}(x) = \arcsin x$, also

$$\underset{x\in]-1,1[}{\forall} \quad \arcsin' x = \frac{1}{f'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos\arcsin x} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-(\sin\arcsin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$(*)$, da $\cos^2 = 1 - \sin^2$ und $\cos t > 0$ für $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(c)

$$\underset{x\in]-1,1[}{\forall} \quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{folgt analog zu (b).}$$

(d) $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$ (Übung).

(e) $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \operatorname{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2}$ (Übung).

Th. 9.10 (Kettenregel): $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $g :]c,d[\longrightarrow \mathbb{K}$, $f(]a,b[) \subseteq]c,d[$
($a, c = -\infty$ sowie $b, d = \infty$ ist erlaubt).
f dif.bar in $\xi \in]a,b[\wedge g$ dif.bar in $f(\xi) \in]c,d[$
$\Rightarrow g \circ f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$ dif.bar in ξ und

$$(g \circ f)'(\xi) = f'(\xi) g'(f(\xi)). \tag{9.15}$$

Bew.: Def. $\eta := f(\xi)$ und

$$\tilde{g} :]c,d[\longrightarrow \mathbb{K}, \quad \tilde{g}(x) := \begin{cases} \frac{g(x)-g(\eta)}{x-\eta} & \text{für } x \neq \eta, \\ g'(x) & \text{für } x = \eta. \end{cases} \tag{9.16}$$

Dann:

$$\underset{x\in]c,d[}{\forall} \quad g(x) - g(\eta) = \tilde{g}(x)(x-\eta). \tag{9.17}$$

Sei nun $\lim x_k = \xi$ (alle $x_k \neq \xi$). Dann:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{g\big(f(x_k)\big) - g\big(f(\xi)\big)}{x_k - \xi} &\overset{(9.17)}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{\tilde{g}\big(f(x_k)\big)\big(f(x_k) - f(\xi)\big)}{x_k - \xi} \\ &= \lim_{k\to\infty} \tilde{g}\big(f(x_k)\big) \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k) - f(\xi)}{x_k - \xi} \\ &= f'(\xi) g'(f(\xi)). \end{aligned} \tag{9.18}$$

□

Bsp. 9.11: **(a)** Sei $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := \sin(-x^3)$.
Kettenregel (9.15) $\Rightarrow \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \quad h'(x) = -3x^2\cos(-x^3)$.

(b) Sei $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{K}$, $h(x) := x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, $\alpha \in \mathbb{K}$.
(9.15) $\Rightarrow \underset{x\in\mathbb{R}^+}{\forall} \quad h'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha\, x^{\alpha-1}$.

9.2. Ableitungen höherer Ordnung; die Mengen C^k

Def. 9.12: Sei $I :=]a,b[$, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. Rekursive Def. der k-ten Ableitung $f^{(k)}$ von f für $k \in \mathbb{N}_0$: $f^{(0)} := f$. Ang., für $k \in \mathbb{N}_0$ ex. $f^{(k)}(x)$ für alle $x \in I$. Def. dann, falls $f^{(k)}$ in $\xi \in I$ dif.bar ist:

$$f^{(k+1)}(\xi) := (f^{(k)})'(\xi). \tag{9.19}$$

Ex. $f^{(k+1)}(\xi)$ für alle $\xi \in I$, so heißt f $(k+1)$-mal dif.bar und $f^{(k+1)} : I \longrightarrow \mathbb{K}$ die $(k+1)$-ste Ableitung von f. Notation:
$f' := f^{(1)}$, $f'' := f^{(2)}$, $f''' := f^{(3)}$,
aber $f^{(k)}$ für $k \geq 4$.
$f^{(k)}$ kann stetig oder unstetig sein (vgl. Bsp. 9.13(c)).
Def.

$$\underset{k\in\mathbb{N}_0}{\forall} \quad C^k(I,\mathbb{K}) := \Big\{ f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K}) : \ f^{(k)} \text{ ex. und ist stetig} \Big\}, \tag{9.20}$$

$$C^\infty(I,\mathbb{K}) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} C^k(I,\mathbb{K}) \tag{9.21}$$

(also $C^0(I,\mathbb{K}) = C(I,\mathbb{K}) \supseteq C^1(I,\mathbb{K}) \supseteq C^2(I,\mathbb{K}) \supseteq \dots$).
Notation: $C^k(I) := C^k(I,\mathbb{R})$.

Bsp. 9.13: **(a)** $\sin \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\sin' = \cos$,
$\sin'' = -\sin$, $\sin''' = -\cos$, $\sin^{(4)} = \sin$, ...

(b) Sei $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$, $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$, $a_j \in \mathbb{K}$. Dann
$P^{(n)}(x) = n!\, a_n$ (einfache Induktion).
Also $P \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

(c)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist dif.bar, aber f' ist unstetig (Übung).

9.3. Mittelwertsatz, Monotonie und Extrema

Th. 9.14: Sei $a < b$, $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ dif.bar in $\xi \in]a,b[$ und ξ ein lok. Min. od. lok. Max. für f. Dann gilt $f'(\xi) = 0$.

Bew.: ξ lok. Max. für f
$\Rightarrow \underset{\epsilon>0}{\exists} \Big(|h| < \epsilon \;\Rightarrow\; f(\xi + h) - f(\xi) \le 0 \Big)$.
Sei (h_k) Folge in $]0,\epsilon[$ mit $\lim h_k = 0$. Dann:

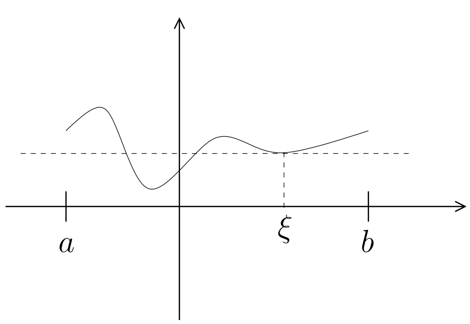
$$f'(\xi) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(\xi + h_k) - f(\xi)}{h_k} \le 0, \quad f'(\xi) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(\xi - h_k) - f(\xi)}{-h_k} \ge 0 \tag{9.22}$$

$$\nwarrow \qquad f(\xi \pm h_k) - f(\xi) \le 0 \qquad \nearrow$$

$\Rightarrow f'(\xi) = 0$.
f hat lok. Min. in $\xi \Rightarrow -f$ hat lok. Max. in ξ, also
$f'(\xi) = -(-f)'(\xi) = 0$. $\square$

Bem. 9.15: Für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^3$, gilt $f'(0) = 0$, aber f hat weder lok. Min noch Max in 0.
$f'(\xi) = 0 \not\Rightarrow f$ hat lok. Min/Max in ξ.
Pkte ξ mit $f'(\xi) = 0$ heißen auch <u>kritische</u> od. <u>stationäre</u> Pkte für f.

Th. 9.16 (Satz von Rolle): Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und dif.bar auf $]a,b[$ sowie $f(a) = f(b)$, dann
$\underset{\xi\in]a,b[}{\exists} \; f'(\xi) = 0$.



Bew.: Klar, wenn f konstant. Sonst:
$\underset{x\in]a,b[}{\exists} \; f(x) \neq f(a)$.

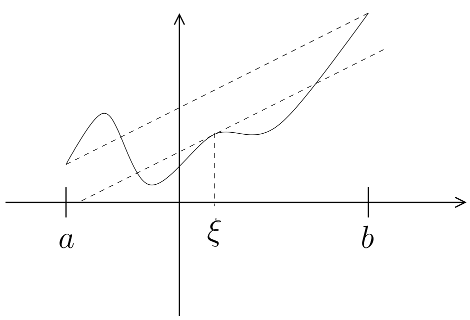
$f(x) > f(a) \overset{\text{Th. 7.54}}{\Rightarrow} \underset{\xi\in]a,b[}{\exists}\ f$ hat lok. Max in ξ
$\overset{\text{Th. 9.14}}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0.$
$f(x) < f(a)$ analog. □

Th. 9.17 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung): $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetig und dif.bar
auf $]a, b[$, $\underset{x\in]a,b[}{\forall}\ g'(x) \neq 0$. Dann:

$$\underset{\xi\in]a,b[}{\exists}\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{9.23a}$$

Für $g(x) = x$ ergibt sich die Standardform

$$\underset{\xi\in]a,b[}{\exists}\ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \tag{9.23b}$$



Bew.: $g' \neq 0 \wedge$ Th. 9.16 $\Rightarrow g(b) - g(a) \neq 0$. Sei

$$h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := f(x) - \big(g(x) - g(a)\big)\,\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{9.24}$$

$h(a) = f(a) = h(b) \overset{\text{Th. 9.16}}{\Rightarrow} \underset{\xi]a,b[}{\exists}\ h'(\xi) = 0 \Rightarrow$ (9.23a). □

Kor. 9.18: Sei $f :]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}$ dif.bar.

(a) $f' \geq 0$ (bzw. $f' \leq 0$) $\Rightarrow f$ steigend (bzw. fallend).
$f' > 0$ (bzw. $f' < 0$) $\Rightarrow f$ str. steigend (bzw. str. fallend).

(b) $f' \equiv 0 \Rightarrow f$ konstant.

□

Lem. 9.19: Sei $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ dif.bar in $\xi \in]a,b[$.

$$f'(\xi) > 0 \Rightarrow \underset{\epsilon>0}{\exists} \underset{a_1 \in]\xi-\epsilon,\xi[}{\forall} \underset{b_1 \in]\xi,\xi+\epsilon[}{\forall} f(a_1) < f(\xi) < f(b_1), \quad (*)$$

$$f'(\xi) < 0 \Rightarrow \underset{\epsilon>0}{\exists} \underset{a_1 \in]\xi-\epsilon,\xi[}{\forall} \underset{b_1 \in]\xi,\xi+\epsilon[}{\forall} f(a_1) > f(\xi) > f(b_1). \quad (**)$$

Bew.: Ang., $(*)$ gilt nicht.
Dann gibt es Folge (x_k) in $]a,b[\setminus\{\xi\}$ mit $\lim x_k = \xi$ und

$$\left(\underset{k\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \frac{f(x_k)-f(\xi)}{x_k-\xi} \le 0 \right) \quad \Rightarrow \quad f'(\xi) \le 0.$$

$(**)$ folgt ganz analog. □

Th. 9.20 (Hinreichende Bed. für Extrema): Sei
$f :]c,d[\longrightarrow \mathbb{R}$ dif.bar und $f'(\xi) = 0$ für ein $\xi \in]c,d[$, $c < d$.

(a)

$$\left(\underset{x\in]c,\xi[}{\forall} \quad f'(x) > 0 \right) \quad \wedge \quad \left(\underset{x\in]\xi,d[}{\forall} \quad f'(x) < 0 \right) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f \text{ hat str. Max. in } \xi}_{||},$$

$$f''(\xi) \text{ ex. mit } f''(\xi) < 0 \Rightarrow$$

(b)

$$\left(\underset{x\in]c,\xi[}{\forall} \quad f'(x) < 0 \right) \quad \wedge \quad \left(\underset{x\in]\xi,d[}{\forall} \quad f'(x) > 0 \right) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f \text{ hat str. Min. in } \xi}_{||},$$

$$f''(\xi) \text{ ex. mit } f''(\xi) > 0 \Rightarrow$$

Bew.: (a):

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ für } x \in]c,\xi[\quad \overset{(9.23b)}{\Rightarrow} \quad \underset{a\in]c,\xi[}{\forall} \quad f(\xi)-f(a) > 0, \\ f'(x) < 0 \text{ für } x \in]\xi,d[\quad \overset{(9.23b)}{\Rightarrow} \quad \underset{b\in]\xi,d[}{\forall} \quad f(\xi)-f(b) > 0 \\ \Rightarrow \quad f \text{ hat str. Max. in } \xi. \end{array} \right\} \quad (*)$$

$f''(\xi) < 0 \overset{\text{Lem. 9.19}}{\Rightarrow} \underset{\epsilon>0}{\exists} \quad f' > 0$ auf $]\xi-\epsilon,\xi[$ und $f' < 0$ auf $]\xi,\xi+\epsilon[$.
Anwendung von $(*)$ mit $c := \xi-\epsilon$, $d := \xi+\epsilon$
$\Rightarrow f$ hat str. Max in ξ.

(b): analog. □

Bsp. 9.21: Betrachte

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) := x\,e^x, \tag{9.25a}$$
$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f'(x) = e^x + x\,e^x = (1+x)\,e^x. \tag{9.25b}$$

Es folgt $f'(x) < 0$ für alle $x < -1$, $(*)$
$f'(x) = 0$ für $x = -1$,
$f'(x) > 0$ für alle $x > -1$. $(**)$.
Also f str. fallend auf $]-\infty,-1[$,
f str. steigend auf $]-1,\infty[$.
Da $\xi = -1$ einzige Nullst. von f', kann f nur
in $\xi = -1$ ein Extremum haben. Wegen $(*)$ und $(**)$
hat f ein str. Min in ξ.

9.4. Regel von de L'Hôpital

Th. 9.22 (Regel von de L'Hôpital): Sei $a < \xi < b$, $I =]a,\xi[$
oder $I :=]\xi,b[$. Seien $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dif.bar,
$\underset{x\in I}{\forall}\; g'(x) \neq 0$, und es gelte (a) oder (b) mit

(a) $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} g(x) = 0$.

(b) $\lim_{x\to\xi} g(x) = \infty$ oder $\lim_{x\to\xi} g(x) = -\infty$
(Def. 8.17 sei dafür auf Fall $\eta = \pm\infty$ erweitert).

Dann gilt

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta \tag{9.26}$$

(gilt auch für $\xi \in \{-\infty,\infty\}$ und/oder $\eta \in \{-\infty,\infty\}$).

Bew.: Wir beweisen nur (a) $\Rightarrow$ (9.26) für $\xi \in \mathbb{R}$.
Def. $f(\xi) := g(\xi) = 0$. Wegen (a) sind dann
$f,g : I \cup \{\xi\} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei (x_k) Folge
in I mit $\lim x_k = \xi$.

$$\text{(9.23a)} \quad \Rightarrow \quad \underset{k\in\mathbb{N}}{\forall} \quad \underset{\xi_k\in]x_k,\xi[}{\exists} \quad \frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(x_k)-f(\xi)}{g(x_k)-g(\xi)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}. \tag{9.27}$$

Th. 7.16 $\Rightarrow \lim \xi_k = \xi$, also
$\lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta \wedge (9.27) \Rightarrow \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta$. □

Bsp. 9.23: **(a)** Anwendung der Regel von de l'Hôpital auf
$f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \tan x$,
$g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := e^x - 1$, mit $\xi = 0$ liefert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \tan^2 x}{e^x} = \frac{1}{1} = 1 \tag{9.28}$$

(beachte $g'(x) = e^x \neq 0$ für $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).

(b) Manchmal führt mehrfache Anw. von de l'Hôpital zum Ziel: Sei $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$; $f, g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^{\alpha x}$, $g(x) := x^n$, $\xi := \infty$.
Sei $1 \leq k \leq n$.
Es ist $g^{(k)}(x) = n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k} \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}^+$, und n-malige Anw. von de l'Hôp. liefert

$$\underset{\alpha \in \mathbb{R}^+}{\forall} \quad \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{\alpha^n e^{\alpha x}}{n!} = \infty. \tag{9.29}$$

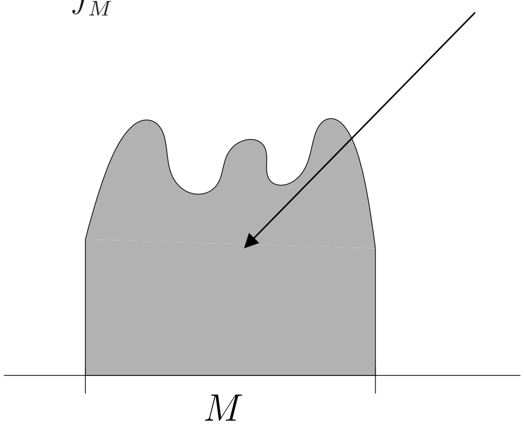
(c) De l'Hôpital führt <u>nicht</u> immer zum Ziel:
Z.B. $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$, $g(x) := 2e^x$, $\xi = -\infty$.
Es ist $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$, aber
$\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \quad \lim_{x \to -\infty} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to -\infty} g^{(n)}(x) = 0$.

10. Das Riemannintegral auf reellen Intervallen

10.1. Definitionen und "einfache" Eigenschaften

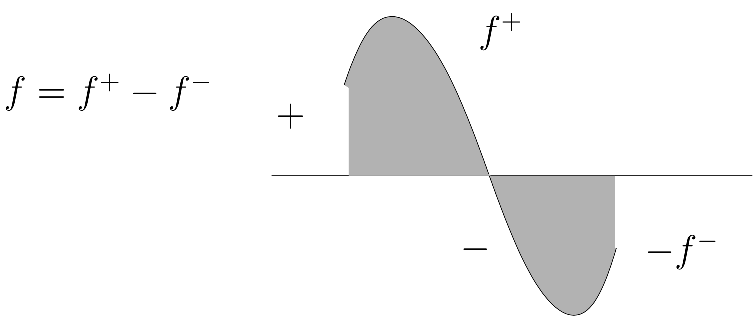
Ziel: Für $f : M \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $M \subseteq \mathbb{R}$ sei

$$\int_M f = \text{ Flächeninhalt von } \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in M,\ 0 \le y \le f(x)\big\}. \tag{10.1}$$



Für $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_M f = \int_M f^+ - \int_M f^-. \tag{10.2}$$



Wir betrachten nur $M = [a,b]$ und f beschränkt.

Def. 10.1: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. f heißt
<u>beschränkt</u> g.d.w. $\{|f(x)| \in \mathbb{R}_0^+ : x \in M\}$
ist beschr., d.h., g.d.w.

$$\|f\|_{\sup} := \sup\{|f(x)| : x \in M\} \in \mathbb{R}_0^+. \tag{10.3}$$

Def. 10.2: Für $I := [a, b]$, $a \leq b$, def.

$$|I| := b - a = |a - b|, \tag{10.4}$$

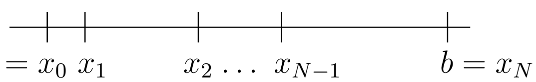
als die <u>Länge</u> von I (heißt auch 1-dim. <u>Volumen</u> oder <u>Maß</u> von I).

Idee: Zerlege $I = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ und def.

$$\int_I f := \lim_{|I_j| \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(t_j)|I_j| \quad \text{mit } t_j \in I_j,$$

falls der Limes existiert.

Def. 10.3: $\Delta := (x_0, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$, heißt <u>Zerlegung</u> von $I = [a, b]$ g.d.w.
$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (a = x_0 = b$ für $a = b)$



x_j: <u>Knoten</u>, $\nu(\Delta) := \{x_0, \dots, x_N\}$: <u>Knotenmenge</u>.
$(t_1, \dots, t_N)$ heißen <u>Zwischenpunkte</u> g.d.w.
$\underset{j=1,\dots,N}{\forall} \quad t_j \in [x_{j-1}, x_j] =: I_j$.

$$|\Delta| := \max\left\{|I_j| : j = 1, \dots, N\right\} \tag{10.5}$$

heißt <u>Feinheitsmaß</u> der Zerl. Δ.
Für $a = b$: $I_0 := I$, $\Delta = x_0 = a$, $|\Delta| = 0$.

Def. 10.4: Sei Δ Zerl. von $I = [a, b]$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Def.

$$\left.\begin{aligned} m_j &:= m_j(f) := \inf\{f(x) : x \in I_j\}, \\ M_j &:= M_j(f) := \sup\{f(x) : x \in I_j\}, \end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

$$r(\Delta, f) := \sum_{j=1}^{N} m_j \, |I_j| = \sum_{j=1}^{N} m_j (x_j - x_{j-1}), \tag{10.7a}$$

$$R(\Delta, f) := \sum_{j=1}^{N} M_j \, |I_j| = \sum_{j=1}^{N} M_j (x_j - x_{j-1}). \tag{10.7b}$$

Sind $(t_1, \dots, t_N)$ Zwischenpkte, so auch noch

$$\rho(\Delta, f) := \sum_{j=1}^{N} f(t_j)\,|I_j| = \sum_{j=1}^{N} f(t_j)(x_j - x_{j-1}). \tag{10.7c}$$

$r(\Delta, f)$: riemannsche Untersumme,
$R(\Delta, f)$: riemannsche Obersumme,
$\rho(\Delta, f)$: riemannsche Zwischensumme.
Für $a = b$ ist $r(\Delta, f) = R(\Delta, f) = \rho(\Delta, f) = 0$.

Def. 10.5: Sei $I = [a, b]$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ beschr.

(a) Def.

$$J_*(f, I) := \sup\big\{r(\Delta, f) : \Delta \text{ Zerl. von } I\big\}, \tag{10.8a}$$
$$J^*(f, I) := \inf\big\{R(\Delta, f) : \Delta \text{ Zerl. von } I\big\}. \tag{10.8b}$$

$J_*(f, I)$: unteres Riemannintegral,
$J^*(f, I)$: oberes Riemannintegral.

(b) f heißt <u>riemannintegrierbar</u> (r.int.bar) g.d.w. $J_*(f, I) = J^*(f, I)$. Ist f r.int.bar, so heißt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_I f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b f := \int_I f := J_*(f, I) = J^*(f, I) \tag{10.9}$$

das <u>Riemannintegral von f über I</u>.
$\mathcal{R}(I)$ sei die Menge aller r.int.baren Fkt. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Bem. 10.6: I, Δ, f wie vorher.

$$m_j(f) \overset{(4.9c)}{=} -M_j(-f), \quad m_j(-f) \overset{(4.9d)}{=} -M_j(f), \tag{10.11a}$$
$$\Rightarrow \quad r(\Delta, f) = -R(\Delta, -f), \quad r(\Delta, -f) = -R(\Delta, f), \tag{10.11b}$$
$$\Rightarrow \quad J_*(f, I) = -J^*(-f, I), \quad J_*(-f, I) = -J^*(f, I). \tag{10.11c}$$

Bsp. 10.7: **(a)** Ist $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ konstant, $f \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$, so ist $f \in \mathcal{R}(I)$ und

$$\int_a^b f = c\,(b - a) = c\,|I| : \tag{10.12}$$

Für jede Zerl. Δ von I gilt

$$\begin{aligned} r(\Delta, f) &= \sum_{j=1}^{N} m_j\,|I_j| = c \sum_{j=1}^{N} |I_j| = c\,|I| = c\,(b - a) \\ &= \sum_{j=1}^{N} M_j\,|I_j| = R(\Delta, f), \end{aligned} \tag{10.13}$$

also $J_*(f, I) = c\,(b - a) = J^*(f, I)$.

(b) Die Dirichletfkt.

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \qquad (a < b), \tag{10.14}$$

ist nicht r.int.bar: Für jede Zerl. Δ von I gilt
$r(\Delta, f) = 0$, $R(\Delta, f) = \sum_{j=1}^{N} |I_j| = b - a$, also
$J_*(f, I) = 0 \neq (b-a) = J^*(f, I)$, d.h., $f \notin \mathcal{R}(I)$.

Gegenüber dem Skript wird jetzt Material weggelassen, so dass auch einige Nummern fehlen.

Th. 10.10: Sei $I := [a,b]$, $a \leq b$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ beschr.

(a) ... Verfeinerung ...

(b) Sind Δ, Δ' Zerl. von I, so gilt

$$r(\Delta, f) \leq R(\Delta', f).$$

(c) $J_*(f, I) \leq J^*(f, I)$.

(d) Sei $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von Zerl. von I mit $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$.
Dann:

$$\lim_{n\to\infty} r(\Delta_n, f) = J_*(f, I), \quad \lim_{n\to\infty} R(\Delta_n, f) = J^*(f, I).$$

Für $f \in \mathcal{R}(I)$:

$$\lim r(\Delta_n, f) = \lim R(\Delta_n, f) = \int_I f,$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\Delta_n, f) = \int_I f,$$

falls die Δ_n Zwischenpkte haben.

Th. 10.11: **(a)** Integral ist linear, d.h.,

$$\underset{f,g \in \mathcal{R}(I)}{\forall} \quad \underset{\lambda,\mu \in \mathbb{R}}{\forall} \quad \Big(\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}(I) \ \wedge \ \int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g \Big).$$

(b) Integration über Teilintervalle:
Sei $\tilde{\Delta} = (y_0, \dots, y_M)$ Zerl. von I,
$J_k := [y_{k-1}, y_k]$. Dann:
$f \in \mathcal{R}(I) \Leftrightarrow \underset{k=1,\dots,M}{\forall} \quad f \in \mathcal{R}(J_k)$.
Für $f \in \mathcal{R}(I)$ gilt

$$\int_a^b f = \int_I f = \sum_{k=1}^{M} \int_{J_k} f = \sum_{k=1}^{M} \int_{y_{k-1}}^{y_k} f.$$

(c) Monotonie des Integrals:
f, g beschr. und $f \leq g \Rightarrow J_*(f, I) \leq J_*(g, I)$,
$J^*(f, I) \leq J^*(g, I)$. Speziell:

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \quad \Rightarrow \quad \int_I f \leq \int_I g.$$

(d) Dreiecksungl.:

$$f \in \mathcal{R}(I) \quad \Rightarrow \quad \left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

(e) Mittelwertsatz der Integralrechnung:
$f \in \mathcal{R}(I)$ und $m \leq f \leq M$

$$\Rightarrow \quad m\,(b-a) = m\,|I| \leq \int_a^b f = \int_I f \leq M\,|I| = M\,(b-a)$$

(für $a < b$ heißt $\frac{\int_I f}{b-a}$ der <u>Mittelwert</u> von f auf I).

Th. 10.12: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ beschr. Dann:

$$f \in \mathcal{R}(I) \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\epsilon > 0}{\forall} \quad \underset{\text{Zerl. } \Delta \text{ von } I}{\exists} \quad R(\Delta, f) - r(\Delta, f) < \epsilon.$$

Th. 10.15: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b]$.

(a) f stetig $\Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)$.

(b) f steigend oder fallend $\Rightarrow f \in \mathcal{R}(I)$.

Def. & Bem. 10.16: $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, heißt <u>lipschitzstetig</u> g.d.w.

$$\underset{L \in \mathbb{R}_0^+}{\exists} \quad \underset{x, y \in M}{\forall} \quad |f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|.$$

L heißt dann <u>Lipschitzkonstante</u>.
f lip.st. $\Rightarrow f$ st.: Ist (y_n) Folge in M mit
$\lim y_n = \xi \in M$

$$\Rightarrow \quad \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} \quad |f(\xi) - f(y_n)| \leq L\,|\xi - y_n| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow \lim f(y_n) = f(\xi)$.
$f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$, ist stetig, aber nicht lip.st.

Th. 10.17: Wieder $I := [a, b]$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f \in \mathcal{R}(I) \wedge \phi : f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ lip.st. $\Rightarrow \phi \circ f \in \mathcal{R}(I)$.

(b) $f \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow |f|, f^2, f^+, f^- \in \mathcal{R}(I)$,

$$\left(\underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{x\in I}{\forall} \quad f(x) \geq \delta > 0 \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} \in \mathcal{R}(I).$$

(c) $f, g \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow fg, \max(f,g), \min(f,g) \in \mathcal{R}(I)$,

$$\left(f, g \in \mathcal{R}(I) \ \wedge \ \underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{x\in I}{\forall} \quad g(x) \geq \delta > 0 \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{g} \in \mathcal{R}(I).$$

10.2. Wichtige Sätze

10.2.1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Not. 10.18:

$$\int_a^b f := \int_I f, \int_b^a f := -\int_a^b f,$$
$$[f(t)]_a^b := [f]_a^b := f(b) - f(a).$$

Th. 10.19 (Hauptsatz):

(a) Sei $\xi \in I \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(I)$,
f st. in ξ. Dann gilt für alle $c \in I$:

$$F_c : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F_c(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

ist dif.bar in ξ mit $F_c'(\xi) = f(\xi)$.
Speziell: $f \in C(I) \Rightarrow F_c \in C^1(I)$ mit $F_c' = f$.

(b) $F \in C^1(I)$ oder F dif.bar mit $F' \in \mathcal{R}(I)$

$$\Rightarrow \quad F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b = \int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

und

$$\underset{c,x\in I}{\forall} \quad F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Def. 10.20: $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt <u>Stammfkt.</u> zu $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$
g.d.w. F dif.bar mit $F' = f$.

Bsp. 10.21: **(a)** $\int_0^1 (x^5 - 3x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Th. 10.19(b)}}{=} \left[\frac{x^6}{6} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{3}$.

(b) $\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Th. 10.19(b)}}{=} [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$.

(c) $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x \overset{\text{Th. 10.19(b)}}{=} [-\cos x]_0^\pi = 2$.

10.2.2. Partielle Integration

Th. 10.22: Sind $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ st. dif.bar, so gilt

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g.$$

Bsp. 10.23:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t &= [-\sin t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \quad | \quad + \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 2\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\;\mathrm{d}t = 2\pi$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \pi.$$

10.2.3. Substitutionsformel

Th. 10.24: Sei $\phi \in C^1(I)$,
$f \in C(J)$, $\phi(I) \subseteq J$. Dann gilt

$$\underset{a,b\in I}{\forall} \quad \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f\circ\phi)\,\phi'.$$

Bsp. 10.25: Berechne $\int_0^1 t^2\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$.
Substituiere $x := \phi(t) := 1-t$ mit $\phi'(t) = -1$.
Dann $t = 1-x$ und

$$\int_0^1 t^2\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t = -\int_{1=\phi(0)}^{0=\phi(1)} (1-x)^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}\right]_0^1 = \frac{16}{105}.$$