Priv.-Doz. Dr. Josef Berger
Dr. Iosif Petrakis

Wintersemester 16/17
08.12.2016

Logik

Blatt 8

Seien $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ Mengen von Formeln und ϕ eine Formel.

Aufgabe 1. (i) Wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Modell $\mathcal{A}$ und eine Belegung b gibt, so dass $\mathcal{A} \vDash \Sigma[b]$ und der Träger von $\mathcal{A}$ n Elemente hat, dann gibt es ein Modell $\mathcal{A}$ und eine Belegung b so dass $\mathcal{A} \vDash \Sigma[b]$ und der Träger von $\mathcal{A}$ unendlich ist.

(ii) Wenn für jedes Modell $\mathcal{A}$ mit einem unendlichen Träger und für jede Belegung b

$$\mathcal{A} \vDash \Sigma[b] \;\Rightarrow \mathcal{A} \vDash \phi[b]$$

gilt, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Modell $\mathcal{A}$ und für jede Belegung b

$$(\text{der Träger von } \mathcal{A} \text{ hat } \geq k \text{ Elemente und } \mathcal{A} \vDash \Sigma[b]) \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \phi[b].$$

Aufgabe 2. Wenn $\mathcal{A} \vDash \Sigma[b]$ und der Träger von $\mathcal{A}$ so viele Elemente hat wie $\mathbb{N}$, dann gibt es ein Modell $\mathcal{B}$, so dass $\mathcal{B} \vDash \Sigma[b]$ und der Träger von $\mathcal{B}$ mindestens so viele Elemente hat wie $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Sei $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ nicht erfüllbar. Man zeige:
Es existiert eine Formel ϕ mit $\Sigma_1 \vDash \phi$ und $\Sigma_2 \vDash \neg\phi$.

Aufgabe 4. Wir definieren

$$\overline{\Sigma} := \{\phi \in \mathcal{F} \mid \Sigma \vDash \phi\}.$$

(a) Man zeige:

$$\overline{\Sigma} = \bigcup_{\Sigma_0 \subseteq^{\text{fin}} \Sigma} \overline{\Sigma_0},$$

wobei $\Sigma_0 \subseteq^{\text{fin}} \Sigma$ heißt dass Σ_0 eine endliche Teilmenge von Σ ist.

(b) Man beweise oder widerlege:

(i) $\overline{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \supseteq \overline{\Sigma_1} \cup \overline{\Sigma_2}$.

(ii) $\overline{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \subseteq \overline{\Sigma_1} \cup \overline{\Sigma_2}$.

Abgabe. Donnerstag, 15. Dezember 2016.

Besprechung. Freitag, 16. Dezember 2016, in der Übung.