Priv.-Doz. Dr. Josef Berger
Dr. Iosif Petrakis

Wintersemester 16/17
01.12.2016

Logik

Blatt 7

Aufgabe 1. Man beweise oder widerlege, dass für alle Formeln ϕ, ψ und σ gilt:
(i) $(\phi \vee \psi) \vDash \sigma \;\Leftrightarrow\; (\phi \vDash \sigma$ und $\psi \vDash \sigma)$.
(ii) $(\phi \wedge \psi) \vDash \sigma \;\Leftrightarrow\; (\phi \vDash \sigma$ oder $\psi \vDash \sigma)$.

Aufgabe 2. Sei Σ eine Menge von Formeln und ϕ eine Formel.
(i) Man beweise oder widerlege:

$$\Sigma \vDash \phi \text{ oder } \Sigma \vDash \neg\phi$$

(ii) Man zeige:

$$\Sigma \vDash \phi \;\Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\phi\} \text{ ist nicht erfüllbar.}$$

Aufgabe 3. Die Sprache $\mathcal{L}_0$ sei gegeben durch ein zweistelliges Relationszeichen R. Es sei $\mathcal{A}_0 = (\mathbb{N}, \hat{R})$ das Modell der Sprache $\mathcal{L}_0$ mit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und

$$\hat{R} = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ und } m < n\}.$$

Ferner sei f ein einstelliges Funktionszeichen und $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup \{f\}$.

Man zeige, dass für jedes Modell $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \hat{R}, \hat{f})$ der Sprache $\mathcal{L}$ und für jede Belegung b gilt:

$$\mathcal{A} \vDash \forall x \exists y \exists z (R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge \neg R(f(z), f(y)))[b]$$

Aufgabe 4. Die Sprache $\mathcal{L}$ sei gegeben durch ein einstelliges Funktionszeichen f. Geben Sie eine $\mathcal{L}$-formel ϕ an, so dass für jedes Modell $\mathcal{A}$ der Sprache $\mathcal{L}$ und für jede Belegung b gilt:

$$\mathcal{A} \vDash \phi[b] \text{ und der Träger von } \mathcal{A} \text{ ist endlich} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ es gibt } n > 0, \text{ so dass der Träger von } \mathcal{A} \text{ genau } 2n \text{ Elemente hat.}$$

Abgabe. Donnerstag, 8. Dezember 2016.

Besprechung. Freitag, 9. Dezember 2016, in der Übung.