



Priv.-Doz. Dr. Josef Berger
Dr. Iosif Petrakis

Wintersemester 16/17
18.01.2017

Logik

Blatt 11

Aufgabe 1. Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) Wenn A, B rekursiv sind, dann ist $A \times B$ rekursiv.
- (b) Wenn A, B rekursiv aufzählbar sind, dann ist $A \times B$ rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 2. Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar und unendlich. Zeigen Sie, dass es eine injektive rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt mit $A = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 3. Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) Wenn A rekursiv aufzählbar und nicht rekursiv ist, dann sind A und $\mathbb{N} \setminus A$ unendliche Mengen.
- (b) Wenn A, B rekursiv aufzählbar sind, dann ist $A \setminus B$ rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 4. Sei $\text{Rec}(\mathbb{N}, 2)$ definiert durch

$$\text{Rec}(\mathbb{N}, 2) := \left\{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ ist rekursiv und } \forall n (f(n) \in \{0, 1\}) \right\}.$$

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar und $k \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine $f \in \text{Rec}(\mathbb{N}, 2)$ an, so dass

$$\forall n (f(n) = 0) \leftrightarrow k \notin A.$$

(b) Sei LPO_{rec} die Formel: für alle $f \in \text{Rec}(\mathbb{N}, 2)$

$$\forall n (f(n) = 0) \vee \exists n (f(n) = 1).$$

Gibt es ein Algorithmus, der die Formel LPO_{rec} entscheidet?

Abgabe. Donnerstag, 26. Januar 2017.

Besprechung. Freitag, 27. Januar 2017, in der Übung.