

Übungen zur Vorlesung “Mathematische Logik”

Aufgabe 1. Für eine Aussage ϕ setze

$$S(\phi) = \{|A| \mid \mathfrak{A} \models \phi, A = \text{Träger von } \mathfrak{A}, A \text{ endlich}\}.$$

Man zeige:

(a) es existiert eine Aussage ϕ mit

$$S(\phi) = \{3n \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}.$$

(b) es existiert eine Aussage ψ mit

$$S(\psi) = \{p \mid p \text{ Primzahl}\}.$$

Aufgabe 2. Eine L -Formel ϕ ist *termreduziert*, wenn sie nur atomare Formeln der Form

$$R(x_1, \dots, x_n), \quad f(x_1, \dots, x_n) = y, \quad x = y, \quad c = x$$

enthält, wobei $x_1, \dots, x_n, y$ Variablen, c Konstante, R Relationszeichen, f Funktionszeichen sind. Man zeige:

Für alle L -Formeln ϕ existiert eine termreduzierte L -Formel $\bar{\phi}$ mit

$$\text{Fr}(\bar{\phi}) = \text{Fr}(\phi) \quad \text{und} \quad \models (\phi \leftrightarrow \bar{\phi}).$$

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, <)$, wobei die übliche Ordnung auf den natürlichen Zahlen ist. Weiterhin sei $\mathfrak{N}^* = (\mathbb{N}^*, <^*)$ eine echte elementare Erweiterung von $\mathfrak{N}$, d.h. es gilt $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}^*$, $\mathfrak{N}^* \neq \mathfrak{N}$ und für alle Formeln ϕ und alle $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$:

$$\mathfrak{N} \models \phi_{\vec{x}}[k_1, \dots, k_m] \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{N}^* \models \phi_{\vec{x}}[k_1, \dots, k_m].$$

Man zeige:

(a) für alle $a \in \mathbb{N}^* - \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ $n <^* a$.

(b) es existiert eine Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{N}^*$ mit $a_{i+1} <^* a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Abgabe. Donnerstag, 13. November 2014, in der Vorlesung.

Besprechung. Donnerstag, 13. November 2014, in der Übung.