

Übungen zur Vorlesung “Mathematische Logik”

Aufgabe 1. Sei $\bar{L} = \{Q\}$, wobei Q ein zweistelliges Relationszeichen ist. Sei $\bar{\mathfrak{A}} = (\mathbb{R}, Q^{\bar{\mathfrak{A}}})$ die \bar{L} -Struktur mit $\mathbb{R} =$ Menge der reellen Zahlen und

$$Q^{\bar{\mathfrak{A}}} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a < b\}.$$

Ferner sei f ein einstelliges Funktionszeichen und $L = \bar{L} \cup \{f\}$. Geben Sie eine L -expansion von $\bar{\mathfrak{A}}$ an, in der die L -Aussage

$$\forall x \exists y \exists z (Q(x, y) \wedge Q(y, z) \wedge Q(f(z), f(y)))$$

gilt.

Aufgabe 2. Sei $L = \{f, R\}$ mit f zweistelliges Funktionszeichen und R einstelliges Relationszeichen.

(a) Sei ϕ die L -Aussage $\exists x \forall y f(x, y) = y$. Geben Sie zwei L -Strukturen $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1$ an mit ϕ gilt in \mathfrak{A}_0 , aber nicht in \mathfrak{A}_1 .

(b) Sei ψ die L -Aussage $\exists x (R(x) \wedge \forall y R(f(x, y)))$.

Geben Sie zwei L -Strukturen $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1$ an mit ψ gilt in \mathfrak{B}_0 , aber nicht in \mathfrak{B}_1 .

Aufgabe 3. Seien $\phi_0, \dots, \phi_n, \psi$ L -Aussagen. Man zeige:

$$\{\phi_0, \dots, \phi_n\} \models \psi \quad \text{gdw} \quad \models (\phi_0 \wedge \dots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$$

Abgabe. Donnerstag, 30. Oktober 2014, in der Vorlesung.

Besprechung. Donnerstag, 30. Oktober 2014, in der Übung.