

### Übungen zur Vorlesung “Mathematische Logik”

**Aufgabe 1.** Die Sprache  $\bar{L}$  sei gegeben durch ein zweistelliges Relationszeichen  $R$ . Es sei  $\bar{\mathfrak{A}} = (\mathbb{N}, R^{\bar{\mathfrak{A}}})$  die  $\bar{L}$ -Struktur mit  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  und

$$R^{\bar{\mathfrak{A}}} = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ und } m < n\}.$$

Ferner sei  $f$  ein einstelliges Funktionszeichen und  $L = \bar{L} \cup \{f\}$ .

(a) Man gebe eine  $L$ -expansion von  $\bar{\mathfrak{A}}$  an, in der die  $L$ -Aussage

$$\forall x \exists y \exists z (R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge R(f(z), f(y)))$$

gilt.

(b) Man zeige, dass in jeder  $L$ -expansion von  $\bar{\mathfrak{A}}$  die  $L$ -Aussage

$$\forall x \exists y \exists z (R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge \neg R(f(z), f(y)))$$

gilt.

**Aufgabe 2.** Man beweise oder widerlege, dass für alle  $L$ -Aussagen  $\phi, \psi$  und  $\theta$  gilt:

(a)  $(\phi \vee \psi) \models \theta$  gdw  $(\phi \models \theta$  und  $\psi \models \theta)$

(b)  $(\phi \wedge \psi) \models \theta$  gdw  $(\phi \models \theta$  oder  $\psi \models \theta)$

**Aufgabe 3.** Seien  $\phi_0, \dots, \phi_n$  und  $\psi$   $L$ -Aussagen. Man zeige:

$$\{\phi_0, \dots, \phi_n\} \models \psi \quad \text{gdw} \quad \models (\phi_0 \wedge \dots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$$

**Abgabe.** Donnerstag, 07. November 2013, in der Vorlesung.

**Besprechung.** Donnerstag, 07. November 2013, in der Übung.