Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2001
Blatt 5

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

1. Seien $i, j \leq n$. Die Permutation τ_{ij}, die durch

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} j : k = i \\ i : k = j \\ k : k \neq i, j \end{cases}$$

   heißt die Transposition von i und j. Im Falle $j = i + 1$ spricht man von einer Nachbartransposition.

   (a) Zeigen Sie, daß jede Transposition die Parität -1 besitzt.

   (b) Zeigen Sie, daß sich jede Permutation als Produkt von Nachbartranspositionen schreiben läßt. (6)

2. Betrachten Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie diejenigen reellen Zahlen α, für die diese Matrix einen reellen Eigenwert besitzt.

   (b) Bestimmen Sie die komplexen Eigenwerte dieser Matrix. (6)

3. Sei $K = \mathbb{Z}_5$ der Körper mit 5 Elementen. Betrachten Sie die 3×3-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   mit Einträgen aus K. Bestimmen Sie die Eigenwerte dieser Matrix sowie jeweils die algebraische und die geometrische Vielfachheit. (Hinweis: Ein Eigenwert ist 4.) (6)

4. Sei V der Unterraum des Vektorraumes aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, der von den Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\tan(x)$ erzeugt wird. Entscheiden Sie, ob die Basis

$$-\sin(x), -\cos(x), -\tan(x)$$

dieselbe Orientierung besitzt wie die Basis

$$\sin(x), \cos(x), \tan(x)$$

(Hinweis: Sie brauchen nicht zu zeigen, daß es sich hierbei um Basen handelt.) (2)

Abgabe: Mittwoch, 6.6.2001, 9.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.