

Algebra – Weihnachtsferienblatt

Die Aufgaben auf diesem Übungsblatt sind nicht so ganz einfach und nur zur Langeweile-Prophylaxe gedacht. Wer mag, darf sie trotzdem abgeben und kann auch Punkte dafür kassieren – notfalls muß eben der Assistent zum Korrigieren ran. . .

Aufgabe 1: Etwas Zahlentheorie.

- i) Es sei $n \geq 1$. Zeige: Ist $2^n + 1$ eine Primzahl, so ist n eine Zweierpotenz. Finde einige Primzahlen dieser Form (bis heute sind nur fünf bekannt).
- ii) Charakterisiere diejenigen natürlichen Zahlen n , für die $\varphi(n) := |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$ eine Zweierpotenz ist.

Aufgabe 2: Verführerischer Fehlschluß. Es sei R ein (kommutativer) Ring und $a, b \in R$ mit $Ra = Rb$. Gibt es dann immer ein $u \in R^\times$ mit $b = ua$?

Aufgabe 3: Das Reduktionskriterium versagt. Zeige, daß das Polynom $f = X^4 - 10X^2 + 1$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist, aber für jede Primzahl p in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ reduzibel wird. Konstruiere auch weitere Polynome mit dieser Eigenschaft.

Etwaige Lösungen nimmt der Assistent gerne persönlich oder per Mail entgegen.