LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer, Thomas Jahn

Wintersemester 2014/15
14. Februar 2015

Lineare Algebra I

Klausur

Nachname:	Vorname:	Matrikelnummer:

Abschluss: ❍ Bachelor ❍ Master

❍ Lehramt Gymn. (modularisiert) ❍ Lehramt Gymn. (nicht modul.)

❍ Anderes: ______________________

Studiengang: ❍ Mathematik ❍ Wirtschaftsm. ❍ ______________

Prüfungsordnung: ______________________

Anrechnung der Credit Points für das

❍ Hauptfach

❍ Nebenfach, und zwar ______________

❏ Ich stimme zu, dass mein Klausurergebnis im Internet nach Angabe meiner Matrikelnummer und meines bei Klausuranmeldung angegebenen Passworts abrufbar sein wird.

Bitte beachten Sie:

- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es zusammen mit allen weiteren nicht zugelassenen Hilfsmitteln in Ihrer Tasche.
- Legen Sie Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.
- Überprüfen Sie, ob Sie **sechs Aufgaben** erhalten haben.
- Schreiben Sie mit einem **dokumentenechten** Stift, jedoch nicht in den Farben rot und grün.
- Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nach- und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt. Falls der Platz nicht ausreicht, verwenden Sie bitte die leeren Seiten am Ende und vermerken dies deutlich auf dem Angabenblatt der entsprechenden Aufgabe. Versehen sie auch zusätzliche Seiten mit Nach- und Vornamen sowie der Aufgabennummer.
- Geben Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung ab; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
- Sie haben **180 Minuten** Zeit, die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	Summe
/10	/10	/10	/10	/10	/10	/60

Name: ______________________________

Aufgabe 1. **[10 Punkte]**

Betrachten Sie für $x \in \mathbb{Q}$ die Matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{Q}$ ist A_x invertierbar? Beweisen Sie Ihre Aussage.

b) Bestimmen Sie A_0^{-1}, $\det(A_0)$, $\det(A_0^t)$ und $(A_0^t)^{-1}$.

Name: ______________________________

Aufgabe 2. **[10 Punkte]**

Betrachten Sie die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^3$.

$$u_x := \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_x := \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\{u_x, v_x, w_x\}$ linear unabhängig? Beweisen Sie Ihre Aussage.

b) Bestimmen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Dimension des Unterraums $\langle u_x, v_x, w_x \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.

Name: ____________________

Aufgabe 3. **[10 Punkte]**

Sei $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -21 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

b) Geben Sie für jeden Eigenwert eine Basis des Eigenraums an (mit Beweis!).

c) Finden Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist und geben Sie $S^{-1}AS$ an.

Name: ______________________________

Aufgabe 4. **[10 Punkte]**

Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(p) \leq n\}$ und die Abbildung

$$\varphi : V \to \mathbb{C}, \quad p \mapsto p(i)\,,$$

wobei i die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$ ist.

a) Zeigen Sie, dass $\{1, X, X^2 + 1, X^3 + X, \ldots, X^n + X^{n-2}\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von V ist.

b) Zeigen Sie, dass φ ein $\mathbb{R}$-Vektorraumhomomorphismus ist.

c) Geben Sie die darstellende Matrix von φ bzgl. der in a) gegebenen Basis von V und der Basis $\{1, i\}$ von $\mathbb{C}$ an (mit Beweis!).

d) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von φ.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. **[10 Punkte]**

Sei K ein Körper, $\emptyset \neq M = \{x_1, \ldots, x_m\}$ eine endliche Menge und $\emptyset \neq N \subseteq M$ eine Teilmenge. Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ bezeichnen wir mit x_i^* die Abbildung

$$x_i^* : M \to K, \quad x_j \mapsto \begin{cases} 1_K, & \text{falls } i = j \\ 0_K, & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie: Die Menge $\{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$ ist eine Basis des K-Vektorraums $\mathrm{Abb}(M, K)$.

b) Für jede Abbildung $f \in \mathrm{Abb}(N, K)$ bezeichnen wir mit $\widehat{f} \in \mathrm{Abb}(M, K)$ die Fortsetzung durch Null, d.h. die Abbildung

$$\widehat{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{falls } z \in N \\ 0_K, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass $\iota : \mathrm{Abb}(N, K) \to \mathrm{Abb}(M, K)$, $f \mapsto \widehat{f}$ ein Monomorphismus ist.

c) Bestimmen Sie jeweils eine Basis der K-Vektorräume $\mathrm{Abb}(N, K)$ und $\mathrm{Abb}(M \backslash N, K)$.

d) Zeigen Sie, dass die K-Vektorräume $\mathrm{Abb}(M, K)/\iota(\mathrm{Abb}(N, K))$ und $\mathrm{Abb}(M \backslash N, K)$ isomorph sind.

Name: ______________________________

Aufgabe 6. **[10 Punkte]**

Beweisen bzw. widerlegen Sie jeweils die folgenden Aussagen.

a) Sei K ein Körper und seien V, W K-Vektorräume mit $\dim_K(V) = 5$ und $\dim_K(W) = 3$. Ist $f : V \to W$ ein Epimorphismus, dann gibt es einen Unterraum $V_1 \subseteq V$ mit $\dim_K(V_1) = 2$ und einen Isomorphismus $g : V/V_1 \to W$.

b) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sind $\{b_1, \dots, b_n\}$ und $\{b'_1, \dots, b'_m\}$ zwei Erzeugendensysteme von V, so gilt $m = n$.

c) Ist $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ eine Matrix mit $A^t = 2A$, so gilt $A = 0$.

d) Sei K ein Körper, V, W K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Ist $\dim(V) < \dim(W) < \infty$, so ist f nicht surjektiv.

e) Sei K ein Körper, G eine Gruppe und $\varphi : G \to K^\times$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt $\{ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G\} \subseteq \ker(\varphi)$.

Name: ____ Aufgabe: __________

Name: ______________________________ Aufgabe: ____________

Name: ______________________________ Aufgabe: ____________