LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer, Thomas Jahn

Sommersemester 2015
5. Juni 2015

Lineare Algebra II – Übungsblatt 8

Innere Produkträume

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Konstruieren Sie mit dem Gram-Schmidtschen Verfahren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarproduktes, ausgehend von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Es sei $V_n \subseteq \mathbb{R}[x]$ der Unterraum aller Polynome vom Grad $\leq n$. Für alle $f, g \in V_n$ definieren wir

$$\varphi(f, g) := \int_0^1 f(t) \cdot g(t) \, \mathrm{d}t.$$

a) Zeigen Sie, dass $\varphi(\ ,\ )$ ein inneres Produkt auf V_n ist.
b) Sei nun $n = 3$. Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Verfahren auf die Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ von V_3 an, um eine Orthonormalbasis zu konstruieren.

Aufgabe 3 (8 Punkte).
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit innerem Produkt $\langle\ ,\ \rangle$. Für $v, w \in V$ sei $d(v, w) := \|v - w\|$ (wobei wie üblich $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ ist).

a) Zeige Sie, dass d eine Metrik auf der Menge V ist.
b) Zeigen Sie: Ist $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidisch (d.h. $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$), so ist der metrische Raum (V, d) vollständig.
c) Es sei $V = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ der Vektorraum aller reellen Folgen, deren Einträge fast alle verschwinden.
Zeigen Sie: Durch $\langle (a_n)_n, (b_n)_n \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ist ein inneres Produkt auf V gegeben, das V zu einem *nichtvollständigen* metrischen Raum macht.

Aufgabe 4 (6 Punkte).
Es sei $n \geq 1$ und $V = \mathbb{C}^{n \times n}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum mit dem hermiteschen inneren Produkt

$$\langle A, B \rangle := \operatorname{tr}(AB^*),$$

wobei $A, B \in V$. Zudem sei $U \subseteq V$ der Unterraum aller Diagonalmatrizen. Bestimmen Sie das orthogonale Komplement von U in V.

Nur eine vollständig ausgearbeitete Lösung kann mit der maximalen Anzahl an Punkten bewertet werden. Ihre Lösungen sind spätestens am **Dienstag, 16. Juni 2015** um **22 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe die Namen und die Gruppenkürzel in leserlicher Form. Nur *geheftete* Abgaben werden bei der Korrektur berücksichtigt. *Achtung, dieses Semester sind nur mehr Einzelabgaben zulässig!*