LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Andreas Rosenschon
Thomas Jahn

Sommersemester 2013
8. Juli 2013

Höhere Algebra – Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (Normaler Abschluss und Polynomringe).
Sei A ein noetherscher Ring. Zeigen Sie, dass $A[x]^{\sim} = A^{\sim}[x]$ gilt.

(Zusatzaufgabe: Ist A ein beliebiger Ring, so stimme die Aussage $A[x]^{\sim} = A^{\sim}[x]$ ebenfalls. Zeigen Sie, wie sich der allgemeine Fall auf „A ist noethersch" reduzieren lässt.)

Aufgabe 2 (Noethernormalisierung).
Sei K ein unendlicher Körper und $A = K[a_1, \dots, a_m]$. Nach Noethernormalisierung gibt es es algebraisch unabhängige Elemente $c_1, \dots, c_n \in A$, sodass A ganz über $C = K[c_1, \dots, c_n]$ ist.

Zeigen Sie, dass diese c_i so gewählt werden können, dass für geeignete $\gamma_{ij} \in K$ gilt:

$$c_i = a_i + \sum_{j=n+1}^{m} \gamma_{ij} \cdot a_j \,.$$

(Setzen Sie $y_i := x_i - \beta_i x_m$ im Beweis der Noethernormalisierung.)

Aufgabe 3 (Going-Up/Down-Eigenschaft).
Ein Ringhomomorphismus $f : A \to B$ erfüllt die *Going-Up-Eigenschaft* (bzw. *Going-Down-Eigenschaft*), wenn für die Ringerweiterung $f(A) \subseteq B$ die Schlussfolgerung über Primidealketten des Going-Up-Theorems (bzw. Going-Down-Theorems) gilt.

Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung $f^* : \mathrm{Spec}(B/\mathfrak{q}) \to \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{q}^c)$, $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^c$ ist genau dann surjektiv, wenn f die Going-Up-Eigenschaft erfüllt.

(ii) Die Abbildung $f^* : \mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{q}}) \to \mathrm{Spec}(A_{\mathfrak{q}^c})$, $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^c$ ist genau dann surjektiv, wenn f die Going-Down-Eigenschaft erfüllt.

Aufgabe 4 (Unendlichdimensionaler noetherscher Ring [Nagata 1962]).
Wir konstruieren in dieser Aufgabe ein Beispiel für einen noetherschen Ring dessen Dimension unendlich ist.

Sei $A = k[x_1, x_2, \dots]$ der Polynomring in unendlich vielen Variablen über einem Körper k. Für eine streng monoton steigende Funktion $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ setze $\mathfrak{p}_1 = (x_1, \dots, x_{d(1)})$,

$\mathfrak{p}_2 = (x_{d(1)+1}, \ldots, x_{d(2)})$ usw. Die Familie $\{\mathfrak{p}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ besteht also aus unendlich vielen Primidealen, die von paarweise disjunkten Mengen erzeugt werden. Wir setzen $S = A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{p}_n$ und betrachten die Lokalisierung $S^{-1}A$.

(i) Zeigen Sie, dass $\dim(S^{-1}A) = \sup\{d(n) - d(n-1) : n \in \mathbb{N}\}$ ist.

(ii) Zeigen Sie: Sei B ein Ring derart, dass für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq B$ der Ring $B_{\mathfrak{m}}$ noethersch ist und, dass jedes Element $b \in B$ in nur endlich vielen maximalen Idealen enthalten ist, so ist B noethersch.

(Wählen Sie ein Ideal $\mathfrak{b}$ und ein $0 \neq b \in \mathfrak{b}$. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_n$ die maximalen Ideale, die b enthalten und sei $(f_{i,1}, \ldots, f_{i,n(i)})_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{b}_i$. Zeigen Sie, dass b und die $f_{i,j}$ das Ideal $\mathfrak{b}$ erzeugen.)

(iii) Geben Sie ein Beispiel eines noetherschen Rings von unendlicher Dimension an.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Klausur!

Für dieses Blatt ist keine Korrektur mehr vorgesehen; eine Lösung wird vsl. in der letzten Vorlesungswoche veröffentlicht werden.