LMU

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Andreas Rosenschon
Thomas Jahn

Sommersemester 2013
2. Juli 2013

Höhere Algebra – Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (Berechnung).
Sei $n \in \mathbb{Z}$, $A_n = \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ und C_n der ganze Abschluss von A_n. Zeigen Sie, dass

$$C_n = \begin{cases} \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{n}], & \text{falls } n \equiv 1 (\mathrm{mod} 4) \\ A_n, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 2 (Ganzheit und Lokalisierung).
Sei k ein Körper mit $\operatorname{char} k = 0$ und seien $A = k[x^2 - 1] \subseteq B = k[x]$. Betrachten Sie die maximalen Ideale $\mathfrak{n} = (x-1) \subseteq B$ und $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^c = A \cap \mathfrak{n} \subseteq A$ und zeigen Sie:

(i) B ist ganz über A.

(ii) $B_\mathfrak{n}$ ist nicht ganz über $A_\mathfrak{m}$ (Betrachten Sie hierzu $1/(x+1)$).

Aufgabe 3 (Going-Down versagt).
Sei k ein Körper mit $\operatorname{char} k \neq 2$. Betrachten Sie den Ring $A = k[x^2-1, x(x^2-1), y] \subseteq k[x,y]$ und zeigen Sie:

(i) Es gilt $A^\sim = k[x,y]$.

(ii) Das Ideal $\mathfrak{p} = ((x^2-1) - (y^2-1), x(x^2-1) - y(y^2-1)) \subseteq A$ ist ein Primideal und im Primideal $\mathfrak{q}' = (x-1, y+1) \subseteq k[x,y]$ enthalten.

(iii) Es ist $\mathfrak{q} = (x-y) \in \operatorname{Spec}(k[x,y])$ das eindeutige Ideal mit $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.

(iv) Folgern Sie, dass Going-Down in diesem Beispiel versagt hat.

Aufgabe 4 (Hinreichendes Kriterium für Normalität).
Sei A ein Integritätsbereich und $a \in A$ ein Element, sodass das Ideal (a) ein Radikalideal und die Lokalisierung $\{1, a, a^2, \dots\}^{-1}A$ ein normaler Ring ist. Zeigen Sie, dass dann bereits A ein normaler Ring ist.

Abgabe bis einschließlich 9. Juli 2013 im Übungskasten (in der Nähe der Bibliothek). Bitte geben Sie Ihren Namen gut lesbar an.