Prof. Dr. Andreas Rosenschon
Thomas Jahn

Sommersemester 2013
3. Juni 2013

Höhere Algebra – Übungsblatt 7 [Entwurf]

Aufgabe 1 (Zerfallende exakte Sequenzen).
Sei $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gleichwertig sind:

(a) Es gibt eine A-lineare Abbildung $h : M'' \to M$, sodass $gh = \mathrm{id}_{M''}$.

(b) Es gibt eine A-lineare Abbildung $k : M \to M'$, sodass $kf = \mathrm{id}_{M'}$.

(c) Es gibt einen Isomorphismus $\varphi : M \to M' \oplus M''$ derart, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M'}"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M''}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\iota_1"] & M' \oplus M'' \arrow[r, "\pi_2"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutiert und die letzte Zeile exakt ist. Dabei ist $\iota_1(x) = (x, 0)$ und $\pi_2(x, y) = y$.

Eine exakte Sequenz mit den Eigenschaften (i)–(iii) heißt zerfallend.

Aufgabe 2 (Projektive Moduln).

(i) Zeigen Sie, dass für einen A-Modul P folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Seien M, N A-Moduln und seien $g : M \to N$ und $f : P \to N$ A-lineare Abbildungen, wobei g surjektiv ist. Dann gibt es eine A-lineare Abbildung $h : P \to M$, sodass $gh = f$ ist.

(b) Jede kurze exakte Sequenz von A-Moduln $0 \to M' \to M \to P \to 0$ zerfällt.

(c) Es gibt einen freien A-Modul F sowie einen A-Modul K, sodass $F \cong P \oplus K$ gilt.

Ein A-Modul P mit den Eigenschaften (i)–(iii) heißt projektiv.

(ii) Finden Sie unendlich viele verschiedene Beispiele von nicht-projektiven $\mathbb{Z}$-Moduln.

Aufgabe 3 (Flache Moduln).

(i) Zeigen Sie, dass für einen A-Modul N folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Für jede exakte Sequenz $\cdots \to M_{i-1} \to M_i \to M_{i+1} \to \cdots$ ist auch die Folge $\cdots \to M_{i-1} \otimes_A N \to M_i \otimes_A N \to M_{i+1} \otimes_A N \to \cdots$ exakt.

(b) Ist die Folge $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exakt, so gilt dies auch für die Folge $0 \to M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0$.

(c) Ist $f : M' \to M$ injektiv, so ist auch $f \otimes 1 : M' \otimes_A N \to M \otimes_A N$ injektiv.

*Ein A-Modul mit den Eigenschaften (i)–(iii) heißt A-*flach.

(ii) Sei A ein Integritätsbereich und M ein A-Modul. Zeigen Sie, dass jeder A-flache Modul torsionsfrei ist (d.h. aus $am = 0$ mit $a \in A$, $m \in M$ folgt stets $a = 0$ oder $m = 0$).

(iii) Sei $A = k[x, y]$ der Polynomring in zwei Variablen über einem Körper k. Zeigen Sie, dass der A-Modul (x, y) torsionsfrei aber nicht A-flach ist.

Aufgabe 4 (Universelle Eigenschaften von Kern und Cokern).
Sei $\mathfrak{A}$ eine der folgenden Kategorien:

1. A-$\mathfrak{Mod}$, die Kategorie der A-Moduln
2. $\mathfrak{Ab}$, die Kategorie der abelschen Gruppen
3. $\mathfrak{Ring}$, die Kategorie der (kommutativen) Ringe
4. k-$\mathfrak{VR}$, die Kategorie der k-Vektorräume

Sei $f : M \to N$ ein Morphismus in $\mathfrak{A}$.

(i) Der Kern von f (zusammen mit dem offensichtlichen Einbettungshomomorphismus $i : \ker(f) \to M$) erfüllt die folgende universelle Eigenschaft und ist durch diese bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmt.

a) Die Verknüpfung $f \circ i$ ist die Nullabbildung.

b) Ist $\varphi : K \to M$ ein A-Modulhomomorphismus mit $f \circ \varphi = 0$, so gibt es einen eindeutigen Morphismus $\psi : K \to \ker(f)$ mit $i \circ \psi = \varphi$.

Zeigen Sie diese Aussage für den Fall, dass $\mathfrak{A}$ die Kategorie der A-Moduln ist.

(ii) Der Cokern von f (zusammen mit dem offensichtlich Projektionshomomorphismus $\pi : N \to \operatorname{coker}(f)$) erfüllt folgende universelle Eigenschaft und ist durch diese bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmt.

a) Die Verknüpfung $\pi \circ f$ ist die Nullabbildung.

b) Ist $\varphi : M \to C$ ein A-Modulhomomorphismus mit $\varphi \circ f = 0$, so gibt es einen eindeutigen Morphismus $\psi : \operatorname{coker}(f) \to C$ mit $\psi \circ \pi = \varphi$.

Zeigen Sie diese Aussage für den Fall, dass $\mathfrak{A}$ die Kategorie der A-Moduln ist.

Abgabe bis einschließlich 11. Juni 2013 im Übungskasten (in der Nähe der Bibliothek). Bitte geben Sie Ihren Namen gut lesbar an.