



Höhere Algebra – Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (Quotient von Moduln).

Sei M ein A -Modul, $N \subseteq M$ ein A -Untermodul und $\pi : M \rightarrow M/N, x \mapsto x + N$ die Quotientenabbildung. Zeigen Sie:

- (i) Die Quotientengruppe M/N ist mit der durch $a(x + N) = ax + N$ definierten Skalarmultiplikation ein A -Modul und die Abbildung π ist ein surjektiver A -Modulhomomorphismus.
- (ii) Die Abbildung π induziert eine inklusionserhaltende Bijektion zwischen der Menge der A -Untermoduln von M die N enthalten und der Menge der A -Untermoduln von M/N .

Aufgabe 2 (Isomorphiesätze).

- (i) Seien $N \subseteq M \subseteq L$ A -Moduln. Beweisen Sie, dass $(L/N)/(M/N)$ und L/M als A -Moduln isomorph sind.
- (ii) Seien $M_1, M_2 \subseteq M$ A -Moduln. Zeigen Sie, dass $M_2/(M_1 \cap M_2)$ und $(M_1 + M_2)/M_1$ als A -Moduln isomorph sind.

Aufgabe 3 (Modulhomomorphismen).

Seien M, M', N A -Moduln und $u \in \text{Hom}_A(M, M')$. Zeigen Sie:

- (i) $u^* : \text{Hom}_A(M', N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N), f \mapsto f \circ u$ ist A -linear.
- (ii) $u_* : \text{Hom}_A(N, M) \rightarrow \text{Hom}_A(N, M'), f \mapsto u \circ f$ ist A -linear.
- (iii) $\text{Hom}_A(A, M)$ und M sind als A -Moduln isomorph.

Aufgabe 4 (\mathbb{Z} -Modulhomomorphismen).

- (i) Sei A eine abelsche Gruppe und m eine positive ganze Zahl. Zeigen Sie:

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, A) \cong A[m] := \{a \in A \mid ma = 0\}.$$

- (ii) Seien m, n positive ganze Zahlen und $d = \text{ggT}(m, n)$. Zeigen Sie:

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

- (iii) Sei $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Quotientenabbildung. Zeigen Sie, dass die induzierte Abbildung $\pi_* : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ nicht surjektiv ist.

Abgabe bis einschließlich 28. Mai 2013 im Übungskasten (in der Nähe der Bibliothek). Bitte geben Sie Ihren Namen gut lesbar an.