Prof. Dr. Andreas Rosenschon
Thomas Jahn

Sommersemester 2013
29. April 2013

Höhere Algebra – Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (Noethersch).
Sei A ein Ring. Zeigen Sie:

(i) Ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Element in der Menge der Ideale von A, die nicht endlich erzeugt sind, so ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A.

(ii) A ist genau dann noethersch, wenn jedes Primideal in A endlich erzeugt ist.

Aufgabe 2 (Potenzreihen über noetherschen Ringen).
Zeigen Sie: Ist A ein noetherscher Ring, so ist auch der Ring der formalen Potenzreihen $A[\![x]\!]$ mit Koeffizienten in A noethersch.

Aufgabe 3 (Spektrum eines Rings).
Sei A ein Ring. Das *Spektrum* von A ist die Menge aller Primideale in A:

$$\operatorname{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \text{ ist Primideal}\}$$

Für eine Teilmenge $E \subseteq A$ setze $V(E) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid E \subseteq \mathfrak{p}\}$. Zeigen Sie:

(i) Ist $\mathfrak{a} \subseteq A$ das von E erzeugte Ideal, so ist $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$.

(ii) $V((0)) = \operatorname{Spec}(A)$ und $V((1)) = \emptyset$.

(iii) Ist $(E_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von A, so ist $V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(E_i)$.

(iv) Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ ist $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Wir bezeichnen eine Teilmenge $X \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ als abgeschlossen, wenn $X = V(E)$ für eine geeignete Teilmenge $E \subseteq A$ ist. Vergleichen Sie die in dieser Aufgabe bewiesenen Aussagen mit einer geeigneten Definition eines topologischen Raums, die Sie bereits aus anderen Vorlesungen kennen[1]*. Sie werden einsehen, dass wir in dieser Aufgabe gezeigt haben, dass das Spektrum eines Ringes ein topologischer Raum ist. Die definierte Topologie wird als* Zariskitopologie *bezeichnet.*

Aufgabe 4 (Eine Basis der Zariskitopologie).
Sei A ein Ring. Für ein Element $f \in A$ bezeichne X_f das (mengentheoretische) Komplement von $V(f)$ in $X = \operatorname{Spec}(A)$. Zeigen Sie:

[1]Sollte Ihnen die Definition nicht geläufig sein, so konsultieren Sie ein Buch über Topologie Ihrer Wahl. Z.B. Klaus Jänich, Topologie, Springer-Verlag.

(i) Die Menge $\mathcal{B} = \{X_f | f \in A\}$ ist eine Basis der Zariskitopologie, d.h.

a) Jede Menge in $\mathcal{B}$ ist offen in X.

b) Jede offene Teilmenge von X ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

(ii) $X_f \cap X_g = X_{fg}$.

(iii) $X_f = \emptyset \Leftrightarrow f$ ist nilpotent.

(iv) $X_f = X \Leftrightarrow f \in A^\times$.

(v) $X_f = X_g \Leftrightarrow r((f)) = r((g))$.

Abgabe bis einschließlich 7. Mai 2013 im Übungskasten (in der Nähe der Bibliothek). Bitte geben Sie Ihren Namen gut lesbar an.