LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer

Wintersemester 2018/19
12. Februar 2019

Algebra

Hauptklausur

Nachname:	Vorname:	Matrikelnummer:

Abschluss: ❍ Bachelor ❍ Master

❍ Anderes: ____________

Studiengang: ❍ Mathematik ❍ Wirtschaftsm. ❍ ____________

Prüfungsordnung: ____________

Anrechnung der Credit Points für das

❍ Hauptfach

❍ Nebenfach, und zwar ____________

Bitte beachten Sie:

- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es zusammen mit allen weiteren nicht zugelassenen Hilfsmitteln in Ihrer Tasche.
- Legen Sie Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar auf den Tisch.
- Überprüfen Sie, ob Sie **fünf Aufgaben** erhalten haben.
- Schreiben Sie mit einem **dokumentenechten** Stift, jedoch nicht in den Farben rot und grün.
- Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nach- und Vornamen**. Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf den dafür vorgesehenen Blättern. Versehen Sie auch zusätzliche Blätter mit Nach- und Vornamen sowie der Aufgabennummer. Vermerken Sie deutlich, wenn Ihre Lösung auf weiteren Blättern fortgesetzt wird.
- Geben Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung ab; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
- Sie haben **120 Minuten** Zeit, die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	Summe
/10	/7	/10	/12	/10	/49

Name: ____

Aufgabe 1. (10 Punkte)
Sei G eine Gruppe der Ordnung 175.

a) Zeigen Sie: G besitzt einen Normalteiler H mit $|H| = 7$. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie: Es gibt einen Normalteiler H' von G mit $|H'| = 25$ und $G \cong H \times H'$. (4 Punkte)

c) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist abelsch. (2 Punkte)

d) Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle Gruppen der Ordnung 175. (2 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 2. (7 Punkte)
Betrachten Sie die folgende Menge von Polynomen

$$R = \{f(X) \in \mathbb{Q}[X] \mid f(n) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$$

a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : R &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ f(X) &\longmapsto f(5) \end{aligned}$$

ist ein surjektiver Ringhomomorphismus. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die $m \in \mathbb{N}$ für die

$$I_m := \{f(X) \in R \mid f(5) \equiv 0 \bmod m\mathbb{Z}\}$$

ein Primideal in R ist. (3 Punkte) *Hinweis: Betrachten Sie das Kompositum von φ und der kanonischen Projektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.*

c) Bestimmen Sie die Anzahl der maximalen Ideale in R/I_{10}. (2 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 3. (10 Punkte)
Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom von Grad 3, welches genau eine reelle Nullstelle hat und sei E der Zerfällungskörper von $f(X)$.

a) Zeigen Sie: Die Erweiterung $E/\mathbb{Q}$ ist galoissch. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie: $G(E/\mathbb{Q})$ ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3. (4 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Anzahl der echten Zwischenkörper von $E/\mathbb{Q}$. (2 Punkte)

d) Zeigen Sie: Es gibt in $E/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung $F/\mathbb{Q}$ mit $[F : \mathbb{Q}] = 2$. (2 Punkte)

Name: ______________________________

Aufgabe 4. (jeweils 2 Punkte)
Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ ist $\mathbb{C}$.

b) Die Automorphismengruppe von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ hat drei Untergruppen.

c) Jede einfache auflösbare Gruppe ist abelsch.

d) Die Permutation $(123)(35)$ hat Ordnung 6.

e) Die Gruppe $(\mathbb{Z}/21\mathbb{Z})^\times$ ist zyklisch.

f) Das Polynom $X^3 + 33X^2 + 32X + 31 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel.

Name: ____

Aufgabe 5. (10 Punkte) Sei $d \in \mathbb{N}_{>1}$, d quadratfrei und $d \equiv 1 \mod 4$.
Damit definieren wir $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, $G(K/\mathbb{Q}) = \langle \sigma \rangle$ sowie

$$\begin{aligned} N : K &\longrightarrow \mathbb{Q}, \\ z &\longmapsto z \cdot \sigma(z). \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass für $\alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ gilt $N(\alpha) = a^2 - db^2$ und für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ gilt $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie: Es gibt keine Lösungen $x, y \in \mathbb{Z}$ für die Gleichung $x^2 - dy^2 = \pm 2$. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass 2 ein irreduzibles Element in R ist. (3 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass R kein faktorieller Ring ist. (3 Punkte)