Dr. Mark Hamilton
Stefanie Motzokan
Serj Aristarkhov
Anne Froemel

Sommersemester 2017

Vorlesung: Mathematik für Naturwissenschaftler II
Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Die reellen hyperbolischen Funktionen sind aus Übungsblatt 1 bekannt. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\cos(a + bi) = \cos(a) \cdot \cosh(b) - \sin(a) \cdot \sinh(b)i$

(b) $\sin(a + bi) = \sin(a) \cdot \cosh(b) + \cos(a) \cdot \sinh(b)i$

Hinweis: Benutzen Sie die Euler-Formel, um zunächst einen Ausdruck für $\cos(z)$ bzw. $\sin(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ zu erhalten.

Aufgabe 2. Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die affine Ebene E gegeben durch

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \mu, \kappa \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Welche Bedingungen muss ein Vektor $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ erfüllen, damit $v \perp (1, 0, -1)$ und $v \perp (1, 1, 0)$ gilt? Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für a, b, c auf und lösen Sie es.

(b) Sei $v \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor wie in Aufgabenteil (a), $v_0 \in \mathbb{R}^3$ ein weiterer Vektor und $G \subset \mathbb{R}^3$ die affine Gerade gegeben durch

$$G = \{v_0 + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten, v_0 so zu wählen, dass G durch den Punkt $(1, 1, 1)$ läuft. Geben Sie mindestens zwei davon an.

(c) Seien u_1, u_2 zwei beliebige Punkte auf der Geraden G und w_1, w_2 zwei beliebige Punkte auf der Ebene E. Weisen Sie nach, dass $(u_2 - u_1) \perp (w_2 - w_1)$ gilt, indem Sie die Eigenschaft des Vektors v aus Aufgabenteil (a) nutzen.

Durch das Ergebnis von Aufgabenteil (c) ist es gerechtfertigt zu sagen, dass die Gerade G senkrecht auf der Ebene E steht.

Aufgabe 3. Eine *Norm* auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$||\cdot||\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$$

mit folgenden Eigenschaften:

- $||x|| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$
- $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x|| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$

(a) Auf dem $\mathbb{R}^2$ kann man definieren:

$$||(x,y)||_a = |y| + |y-x|.$$

Zeigen Sie, dass $||\cdot||_a$ eine Norm ist.

(b) Auf dem $\mathbb{R}^3$ kann man definieren:

$$||(x,y,z)||_b := |y|.$$

Zeigen Sie, dass $||\cdot||_b$ keine Norm ist.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Montag, 03. Juli 2017, 14:00 Uhr** in dem **Briefkasten** im 1. Stock ab. Lösungen bitte immer auf einem separaten Blatt und mit Namen abgeben!