Dr. Mark Hamilton
Stefanie Motzokan
Serj Aristarkhov
Anne Froemel

Sommersemester 2017

Vorlesung: Mathematik für Naturwissenschaftler II
Übungsblatt 10

Aufgabe 1.

(a) Überprüfen Sie, ob der Vektor $w = (1, -3, 5) \in \mathbb{R}^3$ eine Linearkombination des Tupels (v_1, v_2) bestehend aus den beiden Vektoren $v_1 = (1, 7, -2)$ und $v_2 = (0, 5, 1)$ ist.

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist der Vektor $w_a = (1 + a, 2, -3)$ eine Linearkombination von (v_1, v_2) aus Teilaufgabe a)?

(c) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und sei $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ eine dreielementige, linear unabhängige Menge von Vektoren aus V. Zeigen Sie, dass die Menge $\{s_1, 2s_1, s_1 + s_2\}$ dreielementig und linear abhängig ist.

Aufgabe 2. Ist V ein Vektorraum über einem Körper K (für uns gibt es nur die Möglichkeiten $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$) und $A \subset V$ eine Teilmenge des Vektorraums, dann ist

$$\operatorname{lin}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \,\middle|\, \lambda_i \in K, a_i \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$$

die **lineare Hülle** von A. Die lineare Hülle ist die Menge aller endlichen Linearkombinationen der Elemente aus A. Im Fall einer endlichen Teilmenge A vereinfacht sich diese Definition zu

$$\operatorname{lin}(\{a_1, a_2, ..., a_n\}) = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n | \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K\}$$

Nun zur eigentlichen Aufgabe:
Sei $K = \mathbb{R}$. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 7 \\ -4 & -9 & 5 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,4} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie gemäß der Anleitung unten, dass für die gesamte Lösungsmenge $L_{A,b}$ dieses Systems gilt:

$$L_{A,b} = \begin{pmatrix} -104 \\ 44 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Anleitung:

(a) Zeigen Sie, dass jeder Vektor aus der Menge auf der rechten Seite tatsächlich eine Lösung des Gleichungssystems ist.

(b) Umgekehrt sei $z \in \mathbb{R}^4$ beliebig mit $Az = b$. Eliminieren Sie die erste Gleichung nach z_1 und setzen Sie diesen Term in die zweite Gleichung ein. Eliminieren Sie dann die (neue) zweite Gleichung nach z_2 und setzen Sie diesen Term in die nach z_1 eliminierte erste Gleichung ein. Betrachten Sie nun z, indem Sie z_1 und z_2 durch die jeweiligen Terme ersetzen. Daran ist zu erkennen, dass z in der Menge der rechten Seite liegt.

Aufgabe 3. Überprüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen $S \subset V$ von Vektorräumen V über dem Körper K linear unabhängig sind.

(a) $K = \mathbb{R},\ V = \mathbb{R}^3,\ S = \{(1,1,2),(7-1,5),(4,-4,1)\}$

(b) $K = \mathbb{R},\ V = \mathbb{C},\ S = \{i, 1+i\}$

(c) $K = \mathbb{C},\ V = \mathbb{C},\ S = \{i, 1+i\}$

(d) $K = \mathbb{R},\ V =$ Abb$([0,1],\mathbb{R}),\ S = \{f,g,h\}$, wobei f,g,h durch $f(x) = |x|, g(x) = x$ und $h(x) = -x$ definiert sind.

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Montag, 17. Juli 2017, 14:00 Uhr** in dem **Briefkasten** im 1. Stock ab. Lösungen bitte immer auf einem separaten Blatt und mit Namen abgeben!