MATHEMATIK FÜR NATURWISSENSCHAFTLER I
WINTERSEMESTER 2016/17

MARK HAMILTON
LMU MÜNCHEN

1. 17. OKTOBER 2016

1.1. Grundbegriffe zu Mengen.

Definition 1.1 (Mengen und Elemente)**.** Eine **Menge** ist die Zusammenfassung von **Elementen** zu einem Ganzen. Ist M eine Menge und x ein Element von M, so schreiben wir $x \in M$. Ist x kein Element von M, so schreiben wir $x \notin M$.

- Reihenfolge der Elemente in der Menge spielt keine Rolle.
- Jedes Element kann nur einmal in der Menge enthalten sein.

Mengen sind der absolute Grundbegriff der modernen Mathematik, können nicht strikt durch etwas anderes, grundlegenderes definiert werden.

Definition 1.2 (Gleichheit von Mengen)**.** Zwei Mengen sind **gleich**, $M = N$, falls gilt: Jedes $x \in M$ ist auch $x \in N$ und jedes $x \in N$ ist auch $x \in M$, d.h. M und N haben genau dieselben Elemente (Extensionalitätsaxiom). Falls M nicht gleich N ist, schreiben wir $M \neq N$.

Definition 1.3. Seien $a_1, \dots, a_n$ endlich viele Objekte. Wir schreiben

$$\{a_1, \dots, a_n\}$$

für die Menge, die genau $a_1, \dots, a_n$ als Elemente enthält. D.h. es gilt

$$x \in \{a_1, \dots, a_n\} \Leftrightarrow x = a_i \text{ für ein } 1 \leq i \leq n.$$

$\Leftrightarrow$ wird gelesen als "genau dann, wenn" (Implikation in beide Richtungen).

Beispiel 1.4.
- $\{a\}$ Menge mit einem Element a
- $\{a, b\}$ Menge mit zwei Elementen a, b
- $\{a, a\} = \{a\}$ Element kann nur einmal in der Menge enthalten sein
- $\{a, b\} = \{b, a\}$ Reihenfolge spielt keine Rolle
- $\{a, b\} = \{a\} \Leftrightarrow a = b$
- {Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag, Samstag, Sonntag} Menge der Wochentage

Definition 1.5 (Leere Menge)**.** Wir schreiben $\emptyset$ für die **leere Menge**, d.h. die Menge, die kein Element enthält. Schulschreibweise: $\emptyset = \{\}$.

Bemerkung 1.6. Mengen können selbst wieder Elemente von anderen Mengen sein:

- $\{a\}$ Menge mit einem Element a
- $\{\{a\}\}$ Menge mit einem Element $\{a\}$.

Es gilt $\{a\} \neq \{\{a\}\}$, denn $a \in \{a\}$, aber $a \notin \{\{a\}\}$.

Beispiel 1.7. Man kann so allein aus der leeren Menge unendlich viele neue Mengen konstruieren, die alle paarweise verschieden sind:

$$\begin{aligned}
M_0 &= \emptyset \\
M_1 &= \{\emptyset\} \\
M_2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
M_3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Auch für gewisse Mengen mit unendlich vielen Elementen kann man die Schreibweise mit den Mengenklammern verwenden, wenn man die Elemente der Menge "aufzählen" kann:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ Menge der **natürlichen Zahlen**
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ Menge der **ganzen Zahlen**

Definition 1.8 (Mächtigkeit)**.** Die **Mächtigkeit** $|M|$ einer endlichen Menge M ist die Anzahl ihrer Elemente. Für unendliche Mengen schreiben wir $|M| = \infty$.

Beispiel 1.9.

$$\begin{aligned}
|\emptyset| &= 0 \\
|\{a\}| &= 1 \\
|\{a, b\}| &= 2 \text{ falls } a \neq b \\
|\{a, a\}| &= 1 \\
|\mathbb{N}| &= \infty.
\end{aligned}$$

Außerdem ist $|M_k| = k$ für die Mengen aus Beispiel 1.7, für alle $k \geq 0$.

Definition 1.10 (Teilmenge)**.** Seien A, B Mengen. A ist eine **Teilmenge** von B,

$$A \subset B$$

falls gilt: Jedes $x \in A$ ist auch $x \in B$.

Falls A keine Teilmenge von B ist, schreiben wir $A \not\subset B$. Äquivalent dazu ist: Es gibt ein $x \in A$ mit $x \notin B$.

Beispiel 1.11.

$$\begin{aligned} \{a,b\} &\subset \{a,b,c\} \\ \{1,2,3\} &\subset \mathbb{N} \\ \{-1,0,1\} &\not\subset \mathbb{N} \\ \{0\} &\subset \mathbb{Z} \\ \mathbb{N}_0 &\subset \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} &\not\subset \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Klar ist: $A \subset A$ für jede Menge A. Etwas weniger trivial ist:

Proposition 1.12. *Für jede Menge A gilt $\emptyset \subset A$.*

Beweis. Beweis durch Widerspruch: Angenommen es gibt eine Menge A, so dass $\emptyset \not\subset A$. Dann muss es ein $x \in \emptyset$ geben mit $x \notin A$. Aber es gibt kein $x \in \emptyset$. Widerspruch $\lightning$. Also gilt $\emptyset \subset A$. □

Proposition 1.13. *Für beliebige Mengen A, B, C gilt:*

$$A \subset B \textit{ und } B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \textit{ und } B \subset A.$$

1.2. **Konstruktionen von Mengen.** Seien A, B beliebige Mengen.

Definition 1.14 (Vereinigung)**.** Die **Vereinigung** von A und B ist definiert als die Menge $A \cup B$ mit

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ oder } x \in B.$$

Bemerkung 1.15. Das "oder" ist hier **nicht** ausschließend! Das ausschließende "oder" in der Mathematik heißt "entweder oder".

Definition 1.16 (Schnitt)**.** Der **Schnitt** von A und B ist definiert als die Menge $A \cap B$ mit

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ und } x \in B.$$

Definition 1.17 (Differenz)**.** Die Differenz von A und B ist definiert als die Menge $A \setminus B$ mit

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ und } x \notin B.$$

Bemerkung 1.18. Die Different $A \setminus B$ ist auch definiert, falls $B \not\subset A$.

Beispiel 1.19. Seien

$$\begin{aligned} A &= \{2,4,5\} \\ B &= \{3,4\}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{2,3,4,5\} \\ A \cap B &= \{4\} \\ A \setminus B &= \{2,5\}. \end{aligned}$$

Definition 1.20 (Potenzmenge)**.** Die **Potenzmenge** einer Menge A ist definiert als die Menge $\mathcal{P}(A)$ mit

$$x \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow x \subset A.$$

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist die Menge aller Teilmengen von A. Jede Teilmenge von A wird ein Element ("Punkt") in $\mathcal{P}(A)$.

Beispiel 1.21.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\} \\ \mathcal{P}(\{x\}) &= \{\emptyset, \{x\}\} \\ \mathcal{P}(\{3,4\}) &= \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}\}. \end{aligned}$$

Für jede Menge A gilt:

$$\begin{aligned} \emptyset &\in \mathcal{P}(A) \\ A &\in \mathcal{P}(A). \end{aligned}$$

Satz 1.22. *Hat die Menge A genau n Elemente, dann hat $\mathcal{P}(A)$ genau 2^n Elemente. D.h. ist $|A| = n$, dann gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.*

Diesen Satz kann man mit **vollständiger Induktion** beweisen, die wir in einer späteren Vorlesung besprechen.

Sehr häufig wird die folgende Methode verwendet, um neue Mengen aus alten zu konstruieren.

Definition 1.23. Sei M eine Menge und $E(x)$ eine Eigenschaft der Elemente $x \in M$, die entweder wahr oder falsch sein kann. Dann schreibt man

$$\{x \in M \mid E(x)\}$$

für die Menge aller $x \in M$, so dass $E(x)$ wahr ist.

Bemerkung 1.24. Manche Autoren verwenden stattdessen die Schreibweise

$$\{x \in M : E(x)\}.$$

Beispiel 1.25. Sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

- $E(x) =$ "x ist eine gerade Zahl":
$$\{x \in M \mid E(x)\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$
- $F(x) =$ "x ist eine Primzahl":
$$\{x \in M \mid F(x)\} = \{2, 3, 5, 7\}.$$
- $G(x) =$ "x ist kleiner als 7":
$$\{x \in M \mid G(x)\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$
- $H(x) =$ "x ist Quadrat einer natürlichen Zahl":
$$\{x \in M \mid H(x)\} = \{1, 4, 9\}.$$

Definition 1.26 (Kartesisches Produkt)**.** Seien A, B Mengen. Das **kartesische Produkt** von A und B ist definiert als die Menge $A \times B$ aller **geordneten Paare** (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Bemerkung 1.27. Das Paar (a, b) ist nicht dasselbe wie $\{a, b\}$, denn bei dem geordneten Paar (a, b) kommt es auf die Reihenfolge an. Außerdem ist $\{a, a\} = \{a\}$, aber $(a, a) \neq \{a\}$.

Beispiel 1.28. Seien

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{2, 5\}.$$

Dann gilt

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\}.$$

Satz 1.29. *Ist $|A| = n$ und $|B| = m$, dann gilt $|A \times B| = n \cdot m$.*

2. 24. Oktober 2016

2.1. **Definition von Abbildungen.** Ein weiterer fundamentaler Begriff in der Mathematik ist der von Abbildungen.

Definition 2.1 (Abbildung)**.** Seien M und N Mengen. Eine **Abbildung** $f\colon M \to N$ von M nach N ordnet jedem Element $x \in M$ genau ein Element $f(x) \in N$ zu. Man schreibt $x \mapsto f(x)$.

Bemerkung 2.2.
(a) Schreibt man $f\colon M \to N$, dann ist f auf ganz M definiert, d.h. für *jedes* $x \in M$ muss es ein $f(x) \in N$ geben.
(b) Das wichtige an Abbildungen ist, dass jedem $x \in M$ nur *genau ein* $f(x) \in N$ zugeordnet ist.
(c) Es gibt auch Abbildungen, die verschiedene $x_1, x_2 \in M$ auf dasselbe $f(x_1) = f(x_2) \in N$ abbilden.
(d) Wir werden Abbildungen immer nur auf nicht-leeren Mengen $M \neq \emptyset$ betrachten.
(e) Es kann auch $N = M$ sein.

Definition 2.3 (Graph)**.** Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Dann heißt die Teilmenge

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in M \times N \mid x \in M\} \subset M \times N$$

der **Graph** von f.

Bemerkung 2.4. Man führt in der Mathematik die Definition von Abbildungen auf die Definition von gewissen Teilmengen des kartesischen Produkts $M \times N$ zurück, indem man zuerst den Graph und dann die Abbildung definiert.

Beispiel 2.5. Seien $M, N \neq \emptyset$ beliebige Mengen.
(a) Die **Identität** Id_M von M ist die folgende Abbildung

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_M\colon M &\longrightarrow M\\ x &\longmapsto x.\end{aligned}$$

Sie bildet jedes $x \in M$ auf sich selbst ab.

(b) Sei $a \in N$ ein beliebiges Element. Dann ist die **konstante Abbildung auf** a definiert durch

$$\begin{aligned} c_a \colon M &\longrightarrow N \\ x &\longmapsto a. \end{aligned}$$

Sie bildet jedes $x \in M$ auf denselben Punkt $a \in N$ ab.

Definition 2.6 (Gleichheit von Abbildungen)**.** Seien $f \colon M \to N$ und $g \colon P \to Q$ Abbildungen. Wir schreiben

$$f = g,$$

d.h. f und g sind **gleich** oder **identisch**, falls $M = P$, $N = Q$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in M$.

Definition 2.7 (Einschränkung)**.** Sei $f \colon M \to N$ eine Abbildung zwischen Mengen M und N. Sei $L \subset M$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist die **Einschränkung** von f auf L definiert als die Abbildung

$$f|_L \colon L \longrightarrow N$$

mit

$$(f|_L)(x) = f(x)$$

für alle $x \in L$.

2.2. **Beispiele.**

Beispiel 2.8. Die folgenden Abbildungen sind wohldefiniert:

(a)

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto 2x. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} g \colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto -x. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} h \colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 &\longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ (x, y) &\longmapsto x + y. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} i \colon \mathbb{Z} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $\mathbb{Q}$ die Menge der **rationalen Zahlen** (alle Brüche von ganzen Zahlen).

Beispiel 2.9. Die folgenden Abbildungen sind nicht definiert:

(a)

$$\begin{aligned} j\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto -x. \end{aligned}$$

Hier liegen die Werte der Abbildung nicht in $\mathbb{N}$, da sie negative Zahlen sind.

(b)

$$\begin{aligned} k\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Hier ist die Abbildung in 0 nicht definiert (Division durch Null).

2.3. **Bild und Urbild.**

Definition 2.10 (Bild und Urbild)**.** Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung zwischen Mengen M und N.

(a) Sei $A \subset M$ eine beliebige Teilmenge. Dann schreibt man $f(A)$ für **das Bild von** A **unter** f, definiert durch

$$f(A) = \{y \in N \mid \text{es gibt ein } x \in A \text{ mit } f(x) = y\} \subset N.$$

Das Bild $f(M)$ von M unter f heißt einfach **Bild von** f.

(b) Sei $B \subset N$ eine beliebige Teilmenge. Dann schreibt man $f^{-1}(B)$ für **das Urbild von** B **unter** f, definiert durch

$$f^{-1}(B) = \{x \in M \mid f(x) \in B\} \subset M.$$

Bemerkung 2.11. In der Mathematik bedeutet "es gibt ein..." dasselbe wie "es gibt mindestens ein...". Wenn man meint, dass es nur genau eines gibt, muss man sagen "es gibt genau ein...".

Bemerkung 2.12. Das Urbild $f^{-1}(B)$ ist immer definiert, selbst wenn die Umkehrabbildung f^{-1} (siehe später) nicht definiert ist. Die Schreibweise ist daher etwas verwirrend, aber Standard.

Bemerkung 2.13. Für eine Abbildung $f\colon M \to N$ muss nicht $f(M) = N$ gelten. Es gilt aber immer $f^{-1}(N) = M$.

Beispiel 2.14. (a) Für die Abbildung f aus Beispiel 2.8 gilt z.B.

$$\begin{aligned} f(\{4\}) &= \{8\} \\ f(\{1,2,3\}) &= \{2,4,6\} \\ f^{-1}(\{12,16,20\}) &= \{6,8,10\} \\ f^{-1}(\{15\}) &= \emptyset \\ f^{-1}(\{14,15\}) &= \{7\}. \end{aligned}$$

(b) Für die Abbildung h aus Beispiel 2.8 gilt z.B.

$$h^{-1}(\{1\}) = \{(0,1),(1,0)\}$$
$$h^{-1}(\{8\}) = \{(0,8)(1,7),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(7,1),(8,0)\}.$$

2.4. **Surjektiv, injektiv, bijektiv.**

Definition 2.15 (Surjektiv, injektiv, bijektiv)**.** Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

(a) f heißt **surjektiv**, falls jedes $y \in N$ von f getroffen wird, d.h. falls jedes $y \in N$ von der Form $y = f(x)$ für ein $x \in M$ ist. Mit anderen Worten: $f(M) = N$.
(b) f heißt **injektiv**, falls es kein $y \in N$ gibt, das von mehr als einem $x \in M$ getroffen wird, d.h. falls $x_1 \neq x_2 \in M$, dann gilt immer $f(x_1) \neq f(x_2) \in N$.
(c) f heißt **bijektiv**, falls f sowohl surjektiv als auch injektiv ist.

Man schreibt manchmal $f\colon M \hookrightarrow N$ für injektive und $f\colon M \twoheadrightarrow N$ für surjektive Abbildungen.

Beispiel 2.16. (a) Für jede Menge $M \neq \emptyset$ ist die Identität Id_M bijektiv.
(b) Die Abbildung f aus Beispiel 2.8 ist injektiv, aber nicht surjektiv.
(c) Die Abbildung g aus Beispiel 2.8 ist bijektiv.
(d) Die Abbildung h aus Beispiel 2.8 ist nicht injektiv, aber surjektiv.
(e) Die Abbildung i aus Beispiel 2.8 ist injektiv, aber nicht surjektiv.

2.5. **Verknüpfung von Abbildungen.**

Definition 2.17 (Verknüpfung)**.** Seien

$$f\colon M \longrightarrow N, \quad g\colon N \longrightarrow P$$

Abbildungen. Dann ist die **Verknüpfung** oder **Verkettung** von f und g definiert als die Abbildung

$$g \circ f\colon M \longrightarrow P$$

mit

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

für alle $x \in M$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & N \arrow[r, "g"] & P \end{tikzcd}$$

Bemerkung 2.18. Man beachte die Reihenfolge in der Schreibweise $g \circ f$: Zuerst kommt f, dann kommt g.

Beispiel 2.19. (a) Seien

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ y &\longmapsto 3y. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} g \circ f \colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto 6x, \end{aligned}$$

denn

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3f(x) = 3 \cdot 2x = 6x.$$

(b) Seien

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g \colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ y &\longmapsto \frac{1}{5+y}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} g \circ f \colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto \frac{1}{5+2x}, \end{aligned}$$

denn

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{5+f(x)} = \frac{1}{5+2x}.$$

2.6. **Umkehrabbildung.**

Definition 2.20 (Umkehrabbildung)**.** Sei $f \colon M \to N$ eine bijektive Abbildung. Dann ist die **Umkehrabbildung**

$$f^{-1} \colon N \longrightarrow M$$

definiert durch $f^{-1}(y) = x$ genau dann, wenn $f(x) = y$.

Bemerkung 2.21. Man kann sich überlegen, dass die Umkehrabbildung f^{-1} nur definiert ist, falls f injektiv und surjektiv ist, d.h. bijektiv.

Proposition 2.22. *Sei $f \colon M \to N$ bijektiv und $f^{-1} \colon N \to M$ die Umkehrabbildung. Dann gilt*

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= \mathrm{Id}_M \\ f \circ f^{-1} &= \mathrm{Id}_N. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $x \in M$ beliebig und $y = f(x)$. Dann gilt

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x.$$

Sei $y \in N$ beliebig und $x = f^{-1}(y)$. Dann gilt

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y.$$

□

Proposition 2.23. *Sei $f\colon M \to N$ eine beliebige Abbildung und $g\colon N \to M$ eine Abbildung, so dass*

$$g \circ f = \mathrm{Id}_M$$
$$f \circ g = \mathrm{Id}_N$$

gilt. Dann ist f bijektiv und $g = f^{-1}$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beispiel 2.24. (a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto x+4 \end{aligned}$$

is bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ y &\longmapsto y-4. \end{aligned}$$

(b) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto 3x \end{aligned}$$

is bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ y &\longmapsto \frac{1}{3}y. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.25. Man kann eine (teilweise) Umkehrabbildung auch dann definieren, wenn f nicht bijektiv, aber injektiv ist: Sei $f\colon M \to N$ eine injektive Abbildung und $f(M)$ das Bild von f. Dann ist die Umkehrabbildung

$$f^{-1}\colon f(M) \to M$$

definiert durch $f^{-1}(y) = x$ genau dann, wenn $f(x) = y$.

3. 31. Oktober 2016

3.1. **Natürliche Zahlen.** In der ersten Vorlesung haben wir die Menge der **natürlichen Zahlen**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots,\}$$

bzw.

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots,\}$$

betrachtet. Auf diesen Mengen sind die Operationen **Addition** $+$ und **Multiplikation** $\cdot$ definiert. Mathematisch gesehen sind das Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n,m) &\longmapsto n+m \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\longmapsto n \cdot m \end{aligned}$$

(analog für $\mathbb{N}_0$). Gewisse Gleichungen kann man in diesen Mengen nicht lösen, z.B.

$$5 + x = 3$$

und

$$5 \cdot x = 3$$

für eine Unbekannte x.

3.2. **Ganze Zahlen.** In einem ersten Schritt führt man deswegen die **ganzen Zahlen** ein:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\} \\ &= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}. \end{aligned}$$

Auf dieser Menge sind analoge Abbildungen definiert:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (n, m) &\longmapsto n + m \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (n, m) &\longmapsto n \cdot m. \end{aligned}$$

Diese Abbildungen haben die folgenden Eigenschaften (für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$):

- $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$ **(Kommutativgesetze)**
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ **(Assoziativgesetze)**
- $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ **(Distributivgesetz)**
- $a + 0 = a = 0 + a$ und $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ **(Existenz eines neutralen Elements für Addition und Multiplikation)**.

Bemerkung 3.1. Im Distributivgesetz können wir auf der rechten Seite die Klammern weglassen, da Multiplikation per Konvention **stärker bindet** als Addition ("Punkt vor Strich").

Die Addition hat außerdem die folgende Eigenschaft:

- **Existenz eines additiv Inversen:** Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $b \in \mathbb{Z}$ mit

  $$a + b = 0 = b + a.$$

  Man schreibt (Konvention) $b = -a$.

Bemerkung 3.2. Diese Eigenschaften zusammen besagen, dass $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein **kommutativer Ring** ist.

Mit dem additiv Inversen kann man die **Subtraktion** definieren als

$$a - b = a + (-b).$$

Man kann die folgenden Rechenregeln zeigen:

Lemma 3.3. *Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:*

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= 0 \\ a \cdot (-1) &= -a \\ (-a) \cdot (-b) &= a \cdot b. \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen nur die erste Rechenregel. Es gilt

$$x + 0 = x$$

für alle $x \in \mathbb{Z}$, d.h. insbesondere

$$0 + 0 = 0$$

und damit

$$a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0.$$

Mit dem Distributivgesetz folgt

$$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$$

und damit

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot 0 - a \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

In $\mathbb{Z}$ kann man eine der eingangs erwähnten Gleichungen lösen.

Proposition 3.4. *Für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ hat die Gleichung*

$$x + n = m$$

eine eindeutige Lösung, gegeben durch $x = m - n$.

Beweis. Sei $x = m - n$. Das ist ein Element in $\mathbb{Z}$ und es gilt nach dem Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} x + n &= (m - n) + n \\ &= m + (-n + n) \\ &= m + 0 \\ &= m, \end{aligned}$$

da 0 das neutrale Element der Addition ist.

Sei x' eine weitere Lösung der Gleichung. Dann gilt

$$x + n = m = x' + n$$

und daher nach dem Assoziativgesetz

$$x = (x + n) - n = (x' + n) - n = x'.$$

Also ist $x = x'$ und die Lösung der Gleichung ist eindeutig. □

3.3. **Rationale Zahlen.** Die Gleichung

$$5 \cdot x = 3$$

hat weiterhin keine Lösung in den ganzen Zahlen. Deshalb führt man die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ ein. Die Menge $\mathbb{Q}$ besteht aus Symbolen $\frac{n}{m}$, genannt **Brüche**, wobei $n, m \in \mathbb{Z}$ und $m \neq 0$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}.$$

Zwei Brüche $\frac{x}{y}$ und $\frac{n}{m}$ sind genau dann gleich, d.h.

$$\frac{x}{y} = \frac{n}{m},$$

wenn

$$x \cdot m = y \cdot n$$

in $\mathbb{Z}$. Zum Beispiel sind die folgenden Brüche alle gleich:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{-3}{-5} = \frac{300}{500} = \dots.$$

Auf $\mathbb{Q}$ gibt es wieder eine Addition und eine Multiplikation, definiert durch

$$\frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2} = \frac{n_1 \cdot m_2 + n_2 \cdot m_1}{m_1 \cdot m_2}$$
$$\frac{n_1}{m_1} \cdot \frac{n_2}{m_2} = \frac{n_1 \cdot n_2}{m_1 \cdot m_2}.$$

Die Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ werden so auf die Operationen auf $\mathbb{Z}$ zurückgeführt. Man kann nachrechnen, dass diese Operationen die folgenden Eigenschaften haben:

- Kommutativgesetze
- Assoziativgesetze
- Distributivgesetz
- Existenz eines neutralen Elements $0 = \frac{0}{1}$ und $1 = \frac{1}{1}$ für Addition und Multiplikation.
- Existenz eines additiv Inversen $\frac{-n}{m}$ für jedes $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$.

Zusätzlich hat die Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ die folgende Eigenschaft:

- **Existenz eines multiplikativ Inversen:** Für jedes $\frac{n}{m} \neq 0$ in $\mathbb{Q}$ gilt

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1 = \frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}.$$

Es ist wichtig zu beachten, dass es multiplikativ Inverse nur für Elemente ungleich 0 in $\mathbb{Q}$ gibt.

Bemerkung 3.5. Diese Eigenschaften zusammen besagen, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein **Körper** ist.

Durch die Existenz eines multiplikativ Inversen kann man die **Division** definieren:

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{a}{b}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{b}{a},$$

für all $\frac{a}{b} \neq 0$.

Man sieht, dass $\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ aufgefasst werden kann, indem man

$$n = \frac{n}{1}$$

schreibt (genauer gesagt, definiert das eine injektive Abbildung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$). Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ schränken sich zur Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ ein.

Man kann beweisen:

Proposition 3.6. (a) *Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ hat die Gleichung*

$$x + a = b$$

eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{Q}$.

(b) *Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung*

$$x \cdot a = b$$

eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{Q}$.

Man kann zeigen, dass sich rationale Zahlen als **periodische Dezimalbrüche** darstellen lassen:

$$\frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{3}{5} = 0.6, \quad \frac{5}{16} = 0.3125, \quad \frac{1}{3} = 0.\overline{3}, \quad \frac{15}{11} = 1.\overline{36}.$$

Hier bedeutet $\overline{36}$, dass die Ziffernfolge 36 periodisch wiederholt wird:

$$\frac{15}{11} = 1.36363636363636\ldots$$

Analog gilt

$$0.5 = 0.5\overline{0}.$$

Wir haben nicht exakt definiert, was eine Dezimalbruchschreibweise ist. Wenn man das macht (mit Reihen), kann man beweisen, dass

$$0.\overline{9} = 0.99999999999999\ldots = 1.$$

Diese Gleichheit gilt nicht nur näherungsweise, sondern exakt! Wenn man Dezimalbrüche mit Periode 9 ausschließt, ist die Dezimalbruchschreibweise einer rationalen Zahl eindeutig. Außerdem kann man zeigen, dass jeder periodische Dezimalbruch eine rationale Zahl ist.

3.4. **Reelle Zahlen.** Man kann sich fragen, welchen Zahlen **nichtperiodische Dezimalbrüche** entsprechen. Solche Zahlen sind leicht hinzuschreiben, z.B.

$$x = 0.1010010001000010000 0\dots$$

Anschaulich ist es so, dass es viel mehr nichtperiodische Dezimalbrüche geben sollte als periodische. Denkt man sich eine Gerade, auf der man die periodischen Dezimalbrüche aufträgt, dann bleiben dazwischen viele Löcher. Man kann nichtperiodische Dezimalbrüche außerdem beliebig genau durch periodische approximieren, z.B. nähern sich die folgenden periodischen Dezimalbrüche

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.1\overline{0} \\ x_2 &= 0.101\overline{0} \\ x_3 &= 0.101001\overline{0} \\ x_4 &= 0.1010010001\overline{0} \end{aligned}$$

der Zahl x beliebig genau.

Man nennt nichtperiodische Dezimalbrüche **irrationale Zahlen** und die Menge aller periodischen und nichtperiodischen Dezimalbrüche die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$. Die reellen Zahlen sind daher die Vereinigung der rationalen und irrationalen Zahlen. Man kann zeigen, dass z.B. die folgenden Zahlen irrational sind:

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{7}, \quad \pi, \quad e, \quad \ln 6.$$

Die reellen Zahlen sind alle Zahlen auf der Zahlengeraden, ohne Löcher.

Man kann $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ auffassen und die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ fortsetzen:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (n, m) &\longmapsto n + m \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (n, m) &\longmapsto n \cdot m. \end{aligned}$$

Diese Abbildungen haben genau dieselben Eigenschaften wie auf $\mathbb{Q}$, d.h. $\mathbb{R}$ ist auch ein Körper:

- Kommutativgesetze
- Assoziativgesetze
- Distributivgesetz
- Existenz eines neutralen Elements 0 und 1 für Addition und Multiplikation.
- Existenz eines additiv Inversen $-x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
- Existenz eines multiplikativ Inversen für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Das multiplikative Inverse zu $x \neq 0$ schreibt man als x^{-1} oder $\frac{1}{x}$. Subtraktion und Division von reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ sind dann definiert durch

$$x - y = x + (-y)$$
$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1} = x \cdot \frac{1}{y} \quad (y \neq 0).$$

3.5. **Anordnung.** In dem Abschnitt über Mengen haben wir gesagt, dass die Elemente einer Menge im allgemeinen keine Anordnung haben. Man kann aber eine Anordnung auf Mengen M als zusätzliche Struktur (Relation, eine bestimmte Art von Teilmenge von $M \times M$) definieren.

Definition 3.7. Auf der Menge $\mathbb{R}$ der rationalen Zahlen gibt es eine Relation $<$ ("kleiner als") mit folgenden Eigenschaften für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$:

- Es gilt entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$ ("entweder" bedeutet ausschließendes oder, d.h. es gilt nur genau eine der drei Möglichkeiten).
- **Transitivitätsgesetz:** Gilt $a < b$ und $b < c$, dann auch $a < c$.
- **Monotoniegesetze:** Es gilt
$$a < b \Rightarrow a + c < b + c.$$
Falls $0 < c$, gilt
$$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

Bemerkung 3.8. Das additive Monotoniegesetz gilt für alle $c \in \mathbb{R}$, das multiplikative nur für $0 < c$.

Beispiel 3.9. Zum Beispiel gilt

$$1 < 5.3, \quad -3 < -2, \quad 5 = 5, \quad e < \pi.$$

Wir definieren eine Relation $>$ ("größer als") durch

$$b > a \Leftrightarrow a < b.$$

Wir definieren außerdem die Symbole $\leq$ ("kleiner gleich")

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \text{ oder } a = b$$

und $\geq$ ("größer gleich")

$$a \geq b \Leftrightarrow a > b \text{ oder } a = b.$$

Man schreibt manchmal $a < b < c$, was äquivalent ist zu $a < b$ und $b < c$. Analog definiert man $a \leq b \leq c$, usw.

4. 7. November 2016

Definition 4.1. Reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ heißen **positiv**, mit $a < 0$ **negativ** mit $a \geq 0$ **nicht-negativ** und mit $a \leq 0$ **nicht-positiv**.

Aus Definition 3.7 lassen sich die folgenden Rechenregeln ableiten:

Proposition 4.2. *Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) *Ist $a < b$ und $c < 0$, dann $a \cdot c > b \cdot c$*

(b) *Ist* $a < b$ *und* $c < d$*, dann* $a + c < b + d$
(c) *Ist* $0 < a < b$ *und* $0 < c < d$*, dann* $a \cdot c < b \cdot d$
(d) *Ist* $0 < a < b$*, dann* $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Beweis. Den Beweis von (a) und (b) findet man in [Pruscha-Rost 2008]. Behauptungen (c) und (d) folgen ähnlich. □

4.1. **Intervalle und Betrag.** Mit $<$ und $\leq$ kann man Intervalle definieren.

Definition 4.3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann definieren wir die Mengen:

(a) **abgeschlossenes Intervall:**

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

(b) **offenes Intervall:**

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

(c) **halboffene Intervalle:**

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

(d) **ein- und zweiseitig unendliche Intervalle:**

$$\begin{aligned}
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\
(-\infty, \infty) &= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Die Intervalle in (a), (b), (c) heißen **beschränkt**, die in (d) **unbeschränkt**.

Bemerkung 4.4. (a) Das offene Intervall (a, b) darf man nicht mit dem geordneten Paar (a, b) verwechseln. Die Bedeutung, was gemeint ist, ergibt sich aus dem Kontext.

(b) Gewisse Intervalle sind Teilmengen von anderen, z.B.

$$(a, b) \subset (a, b] \subset [a, b] \subset [a, \infty).$$

(c) Intervalle mit Grenzen $-\infty$ oder ∞ sind an dieser Seite stets offen, da $\pm\infty$ nicht Elemente von $\mathbb{R}$ sind.

Definition 4.5 (Betrag)**.** Sei $x \in \mathbb{R}$. Der **Betrag** von x ist definiert als

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Es gilt z.B.

$$|-10| = 10 = |10|$$
$$|-\sqrt{2}| = \sqrt{2} = |\sqrt{2}|.$$

Lemma 4.6. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x| \geq 0$ und $x \leq |x|$. Es gilt $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.*

Definition 4.7. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$. Dann heißen

$$\begin{aligned} B_r(x) &= \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| < r\} \\ &= (x - r, x + r) \end{aligned}$$

der **offene Ball** oder das **offene Intervall** von Radius r um x und

$$\begin{aligned} \overline{B}_r(x) &= \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| \leq r\} \\ &= [x - r, x + r] \end{aligned}$$

der **abgeschlossene Ball** oder das **abgeschlossene Intervall** von Radius r um x.

Bemerkung 4.8. Es gilt tatsächlich

$$\{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| < r\} = (x - r, x + r),$$

denn

$$\begin{aligned} |y - x| < r &\Leftrightarrow (y - x) < r \text{ und } -(y - x) < r \\ &\Leftrightarrow y < x + r \text{ und } y > x - r \\ &\Leftrightarrow y \in (x - r, x + r). \end{aligned}$$

Man kann die folgenden allgemeinen Rechenregeln für Beträge beweisen:

Satz 4.9. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
(b) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ *falls* $y \neq 0$
(c) **Dreiecksungleichung***:*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

(d) $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Beweis. Die Dreiecksungleichung ist besonders wichtig, deshalb beweisen wir sie. Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\pm x \leq |x|, \quad \pm y \leq |y|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x + y &\leq |x| + |y| \\ -(x + y) &\leq |x| + |y|. \end{aligned}$$

Da $|x + y| = \pm(x + y)$, je nachdem ob $x + y$ positiv oder negativ ist, folgt

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

□

Beispiel 4.10. Anwendung der Dreicksungleichung: Es gilt

$$\begin{aligned} 11 &= |7 + 4| \leq |7| + |4| = 11 \\ 3 &= |7 + (-4)| \leq |7| + |4| = 11 \\ 3 &= |(-7) + 4| \leq |7| + |4| = 11 \\ 11 &= |(-7) + (-4)| \leq |7| + |4| = 11 \end{aligned}$$

4.2. **Maximum, Minimum, Schranken.**

Definition 4.11. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Menge.

(a) Eine Zahl M heißt **Maximum** von A, geschrieben, $M = \max A$, falls $M \in A$ und $x \leq M$ für alle $x \in A$.
(b) Eine Zahl m heißt **Minimum** von A, geschrieben, $m = \min A$, falls $m \in A$ und $m \leq x$ für alle $x \in A$.

Bemerkung 4.12. Das Maximum oder Minimum einer Menge müssen immer Elemente der Menge selbst sein.

Lemma 4.13. *Falls das Maximum oder Minimum einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ existiert, dann sind sie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien z.B. M und M' Maxima einer Menge A. Dann gelten

$$\begin{aligned} x &\leq M \\ x &\leq M' \end{aligned}$$

für alle $x \in A$. Da M und M' Elemente von A sind, gilt insbesondere

$$\begin{aligned} M' &\leq M \\ M &\leq M', \end{aligned}$$

also $M = M'$. □

Beispiel 4.14. Sei $A = \{a, b\}$ mit $a < b$ eine zweielementige Menge. Dann gilt $\max A = b$ und $\min A = a$.

Man kann zeigen, dass endliche Teilmengen von $\mathbb{R}$ immer ein Maximum und Minimum haben. Das muss für unendliche Teilmengen nicht gelten.

Beispiel 4.15. Sei $A = [1, 3]$ das abgeschlossene Intervall von 1 bis 3. Dann gilt

$$\max A = 3, \quad \min A = 1.$$

Sei $B = (1, 3)$ das offene Intervall von 1 bis 3. Dann hat B weder ein Maximum noch ein Minimum (1 und 3 sind keine Elemente von B).

Definition 4.16. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Menge.

(a) Die Menge A heißt **nach oben beschränkt**, falls es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq K$ für alle $x \in A$. Die Zahl K heißt **obere Schranke** von A. Die kleinste obere Schranke von A, falls sie existiert, heißt **Supremum** von A, geschrieben $\sup A$.

(b) Die Menge A heißt **nach unten beschränkt**, falls es eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ gibt mit $L \leq x$ für alle $x \in A$. Die Zahl L heißt **untere Schranke** von A. Die größte obere Schranke von A, falls sie existiert, heißt **Infimum** von A, geschrieben $\inf A$.

Falls A nach oben und nach unten beschränkt ist, heißt sie **beschränkt**, andernfalls **unbeschränkt**.

Eine obere und untere Schranke für eine Menge A sind nicht eindeutig, das Supremum und Infimum dagegen schon. Das Supremum (Infimum) ist die "beste" obere (untere) Schranke.

Beispiel 4.17. Sei $B = (1, 3)$ das offene Intervall von 1 bis 3. Dann ist z.B. 10 eine obere Schranke für B und -4 eine untere Schranke. Es gilt

$$\sup B = 3$$
$$\inf B = 1.$$

Für die Menge $A = [1, 3]$ gilt

$$\sup A = \max A = 3$$
$$\inf A = \min A = 1.$$

Supremum und Infimum können also Elemente der Menge selbst sein.

Ein wichtiger Satz über reelle Zahlen, den wir nicht beweisen, ist:

Satz 4.18 (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$)**.** *Jede nach oben (unten) beschränkte, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum (Infimum).*

4.3. **Potenzen und Wurzeln.** Wir wollen Ausdrücke der Form a^r definieren, wobei $a \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{Q}$ (später definieren wir diese Ausdrücke auch für $r \in \mathbb{R}$).

Definition 4.19. Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ nur für } a \neq 0$$

Außerdem sei

$$a^0 = 1.$$

Ein Ausdruck der Form a^p heißt **Potenz**. Die Zahl a heißt **Basis**, die Zahl p heißt **Exponent**. Wir haben also Potenzen für alle ganzzahligen Exponenten definiert.

Proposition 4.20. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ (gegebenenfalls $\neq 0$) und $z, z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

(a) $(a \cdot b)^z = a^z \cdot b^z$
(b) $\left(\frac{a}{b}\right)^z = \frac{a^z}{b^z}$
(c) $a^z = \frac{1}{a^{-z}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-z}$
(d) $a^{z_1} \cdot a^{z_2} = a^{z_1 + z_2}$
(e) $(a^{z_1})^{z_2} = a^{z_1 \cdot z_2}$.

Beweis. Der Beweis funktioniert einfach durch Anschreiben und Umklammern, wobei man zunächst die Exponenten positiv wählen sollte. $\square$

Beispiel 4.21.

$$(2^4)^6 = 2^{24}$$
$$2^4 \cdot 2^6 = 2^{10}$$
$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{(-1)^2 \cdot 3^2} = \frac{1}{9}$$
$$7^{2k+1} \cdot 7^{3k-1} = 7^{5k} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Satz 4.22. *Sei $b > 0$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau eine reelle Zahl $x > 0$, so dass $x^n = b$.*

Beweis. (Skizze) Wenn wir Satz 4.18 annehmen, kann man die Existenz von x so beweisen: Sei $A \subset \mathbb{R}$ die Menge

$$A = \{y \in \mathbb{R} \mid y^n \leq b \text{ mit } y > 0\}.$$

Die Menge A ist nach oben beschränkt und hat ein Supremum $x > 0$. Dieses x erfüllt $x^n = b$. $\square$

Definition 4.23. Für eine reelle Zahl $b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt die Lösung x der Gleichung $x^n = b$ die **n-te Wurzel** aus b. Man schreibt

$$x = \sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}.$$

Es gilt also

$$x^n = b \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{b}.$$

Man setzt

$$\sqrt[n]{0} = 0.$$

Die 2-Wurzel heißt auch **Quadratwurzel** oder einfach **Wurzel** und man schreibt $\sqrt{b}$ für $\sqrt[2]{b}$.

Bemerkung 4.24. Die Wurzel ist nur für $b \geq 0$ definiert und es gilt $\sqrt[n]{b} \geq 0$ für alle $b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 4.25.

$$\sqrt{36} = 6$$
$$\sqrt{(-4)^2} = 4$$
$$\sqrt[3]{27} = 3$$
$$\sqrt{-4} \text{ nicht definiert!}$$
$$\sqrt[3]{-27} \text{ nicht definiert!}$$

Proposition 4.26. *Seien $a, b > 0$ reelle Zahlen und $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(a) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
(b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

(c) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
(d) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n\cdot m]{b}$, *insbesondere*

$$\sqrt[n\cdot m]{a^m} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m}} = \sqrt[n]{a}.$$

Aus der letzten Eigenschaft folgt:

Korollar 4.27. *Seien $a > 0$ reell und $p, q \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\sqrt[n\cdot q]{a^{n\cdot p}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Deshalb können wir definieren:

Definition 4.28. Seien $a > 0$ reell und $r \neq 0$ rational, $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und $q > 0$. Dann definieren wir

$$a^r = \sqrt[q]{a^p}.$$

Das hängt nicht von der Darstellung von r als Quotient von $\frac{p}{q}$ ab. Außerdem setzen wir

$$a^0 = 1.$$

Wir haben jetzt die Potenz a^r für alle reellen $a > 0$ und alle rationalen r definiert.

4.4. **Fakultät und Binomialkoeffizient.**

Definition 4.29. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $n! \in \mathbb{N}$ ("n Fakultät") durch

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Man setzt außerdem

$$0! = 1.$$

Beispiel 4.30.

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \\ 3! &= 6 \\ 4! &= 24 \\ 5! &= 120 \\ 6! &= 720 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Werte $n!$ wachsen sehr schnell. Es gilt

$$\begin{aligned} 20! &> 10^{18} \\ 50! &> 10^{64} \\ 100! &> 10^{157}. \end{aligned}$$

Daraus wird erkennbar (was tatsächlich stimmt), dass $n!$ schneller als 10^n wächst.

Lemma 4.31. *Es gilt* $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Klar. □

5. 14. November 2016

Ab heute ist die Vorlesung sehr ähnlich wie das Buch [Pruscha-Rost 2008].

Literatur

Pruscha-Rost 2008. Helmut Pruscha, Daniel Rost, *Mathematik für Naturwissenschaftler. Methoden, Anwendungen, Programmcodes* , Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2008).