Ludwig-Maximilians-Universität München
Mathematisches Institut
Gregor Kleen

Programmieren II für Studierende der Mathematik

Blatt 3

Aufgabe 3 Erstellen Sie eine Klasse `rational` deren Objekte rationale Zahlen modellieren. Die interne Darstellung soll Zähler und Nenner jeweils als private Datenkomponenten vom Typ `long int` speichern. Die interne Darstellung jeder Zahl soll eindeutig sein, insb. der gespeicherte Bruch also jederzeit vollständig gekürzt sein.

Hinweis (Euklidischer Algorithmus). Gegeben zwei Zahlen $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{N}$ mit obdA. $a > b$ ist ihr größter gemeinsamer Teiler $\operatorname{ggT}(a, b) \in \mathbb{N}$ die größte natürliche Zahl, sodass a und b beide ohne Rest durch $\operatorname{ggT}(a, b)$ teilbar sind.

Es gilt $\operatorname{ggT}(a, b) = \operatorname{ggT}(b, a \bmod b)$ und $\operatorname{ggT}(a, 0) = a$.

Ein Bruch kann vollständig gekürzt werden indem Zähler $p \in \mathbb{N}$ und Nenner $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ jeweils geteilt werden durch $\operatorname{ggT}(p, q)$.

Überladen Sie die arithmetischen Grundoperationen, die arithmetischen Zuweisungsoperatoren und die Operatoren zur Ein- und Ausgabe auf Strömen. Für $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sollen rationale Zahlen in der Form p/q ein- und ausgegeben werden, optional mit einem positiven oder negativen Vorzeichen davor.

Implementieren Sie eine Typkonvertierung von `rational` nach `long double`.

Erstellen Sie eine Potenzfunktion `pow` zur Berechnung von r^n für rationales r und $n \in \mathbb{Z}$.

Erstellen Sie eine Funktion zur Berechnung von $\sum_{k=1}^{n} kr^k$.

Erstellen Sie eine Funktion zur Berechnung des Kettenbruchs

$$b_0 + \cfrac{a_0}{b_1 + \cfrac{a_1}{b_2 + \cfrac{a_2}{\ddots \quad b_{n-1} + \cfrac{a_{n-1}}{b_n}}}}$$

mit $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{N}$.

Erstellen Sie ein Hauptprogramm und berechnen Sie die folgenden Beispiele sowohl als rationale Zahl wie auch eine dezimale Näherung:

a)
$$\sum_{k=1}^{n} kr^k$$

mit $r = \frac{2}{3}, -\frac{10}{7}$ und $n = 8$

b)
$$\frac{nr^{n+2} - (n+1)r^{n+1} + r}{(r-1)^2}$$
mit $r = \frac{2}{3}, -\frac{10}{7}$ und $n = 8$

c)
$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}}$$

d) Kettenbrüche mit $a_0 = 4$, $b_0 = 0$, $a_i = i^2$, und $b_i = 2i - 1$ für $i \geq 1$ und $n = 1, 2, \ldots, 10$