Ludwig-Maximilians-Universität München
Mathematisches Institut
Gregor Kleen

Programmieren II für Studierende der Mathematik

Blatt 1

Aufgabe 1 Erstellen Sie eine Klasse `Complex`, die komplexe Zahlen $z = r \cdot e^{i\varphi}$, $r \geq 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$, intern mithilfe der Datenkomponenten `r` und `phi` speichert. Auch für `r` und `phi` soll sichergestellt werden, dass die obigen Invarianten stets gelten.

Der Konstruktor soll Argumente `x` und `y` akzeptieren und die komplexe Zahl $z = x + iy$ erzeugen (d.h. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \operatorname{atan2}(y, x)$). Sind `x`, `y` oder beide nicht angegeben, so soll stattdessen jeweils `0` verwendet werden. D.h. den Konstruktor ohne Argumente aufzurufen soll die komplexe Zahl 0 anlegen.

Überladen Sie die arithmetischen Operatoren `+`, `-`, `*` und `/` in mathematisch sinnvoller Weise.

Hinweis. Für $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ gilt mit $k \in \mathbb{Z}$ jeweils geeignet:

$$z_1 \pm z_2 = r \cdot e^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 \pm 2 \cdot r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$
$$\varphi = \operatorname{atan2}(r_1 \sin(\varphi_1) \pm r_2 \sin(\varphi_2), r_1 \cos(\varphi_1) \pm r_2 \cos(\varphi_2))$$

$$z_1 \cdot z_2 = r \cdot e^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad r = r_1 \cdot r_2$$
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + k \cdot 2\pi \in [-\pi, \pi]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = r \cdot e^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad r = \frac{r_1}{r_2}$$
$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + k \cdot 2\pi \in [-\pi, \pi]$$

Erstellen Sie zudem für die Exponentialfunktion (`exp`), den Hauptwert der Quadratwurzel (`sqrt`), den Logarithmus (`log`) und die allgemeine Potenzfunktion (`pow`) jeweils entsprechende Funktionen.

Hinweis. Für $z = r \cdot e^{i\varphi}$ gilt mit $k \in \mathbb{Z}$ jeweils geeignet:

$$\exp(z) = r' \cdot e^{i\varphi'} \quad \text{mit} \quad r' = e^{r\cos(\varphi)}$$
$$\varphi' = r\sin(\varphi) + k \cdot 2\pi \in [-\pi, \pi]$$

$$\sqrt{z} = r' \cdot e^{i\varphi'} \quad \text{mit} \quad r' = \sqrt{r}$$
$$\varphi' = \frac{\varphi}{2}$$

$$\log(z) = \ln(r) + i\varphi$$

Überladen Sie den Shiftoperator `<<` geeignet, sodass die Ausgabe komplexer Zahlen wie in der Standardbibliothek erfolgt.

Beispiel. Für $z = 41 + 23{,}1 \cdot i$ soll `(41,23.1)` ausgegeben[1] werden.

[1] ohne aktive Ausgabe-Manipulatoren

Erstellen Sie ein Hauptprogramm in dem zwei Zahlen z_1 und z_2 zunächst als `complex<double>`-Zahlen eingelesen werden. Erzeugen Sie auch die entsprechenden Zahlen vom Typ `Complex`. Berechnen und geben Sie die folgenden Ausdrücke für die Zahlen vom Typ `Complex` und zum Vergleich auch für die Zahlen vom Standarddatentyp `complex<double>` aus:

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \qquad \sqrt{z_1 \cdot z_2} \qquad \exp(z_1) \qquad \log(z_2) \qquad z_1^{z_2}$$

Führen Sie Ihr Programm aus für $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 2 + i$.