Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______ Kennwort: ______ Arbeitsplatz-Nr.: ______	**Frühjahr 2025**	**63912**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei p eine Primzahl, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen und $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass für die Anzahl der Elemente in G gilt:
$$|G| = p(p-1)^2(p+1)\ .$$

b) Bestimmen Sie die Ordnung des Elements $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

c) Zeigen Sie, dass es mehr als eine p-Sylow-Untergruppe in G gibt.

d) Sei nun speziell $p = 3$ und
$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq G.$$
Zeigen Sie, dass der Normalisator $N := \{g \in G \mid g \cdot H = H \cdot g\} \subseteq G$ von H in G aus den oberen Dreiecksmatrizen in G besteht. Folgern Sie, dass G genau vier 3-Sylow-Gruppen besitzt.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Für $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ betrachte man $R_b := \{\frac{a}{b^k} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie, dass R_b ein Teilring von $\mathbb{Q}$ und damit ein kommutativer Ring mit Eins ist.

b) Zeigen Sie, dass für die Einheitengruppe gilt:
$$(R_b)^\times = \left\{ \frac{a}{b^k} \in R_b \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und es existieren } c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } \ell \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } ac = b^\ell \right\}.$$

c) Zeigen Sie, dass R_b ein Hauptidealbereich ist und jedes Ideal $\mathfrak{a} \lhd R_b$ die Form $\mathfrak{a} = R_b \cdot w$ für ein $w \in \mathbb{Z}$ hat.
Hinweis: Offenbar gilt $\mathbb{Z} \subseteq R_b$. Betrachten Sie für ein Ideal $\mathfrak{a} \lhd R_b$ den Durchschnitt mit $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ eine (3×3)-Matrix, deren charakteristisches Polynom $\chi_A(X) \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist. Seien $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $\chi_A(X)$ und $\mathbb{Q}(\alpha)$ der davon erzeugte Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{C}$. Betrachten Sie die Multiplikation mit α:

$$\varphi : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{Q}(\alpha) \ , \ x \mapsto \alpha \cdot x \ .$$

a) Zeigen Sie, dass φ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix B von φ bezüglich der Basis $1, \alpha, \alpha^2$ von $\mathbb{Q}(\alpha)$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und zeigen Sie, dass deren charakteristisches Polynom identisch mit dem von A ist, also $\chi_B(X) = \chi_A(X) \in \mathbb{Q}[X]$ gilt.

c) In der Situation von b): Zeigen Sie, dass die beiden Matrizen A und B, betrachtet in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$, ähnlich sind.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl, die die Gruppenordnung $|G|$ teilt. Seien ferner $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen und $\mathbb{F}_p^\times$ die Einheitengruppe von $\mathbb{F}_p$. Wir definieren

$$M := \{ \ g \in G \mid \mathrm{ord}(g) = p\}$$

als die Menge aller Gruppenelemente, deren Ordnung gleich p ist.

a) Zeigen Sie, dass durch
$$\mathbb{F}_p^\times \times M \to M \ , \ ([a], g) \mapsto g^a$$
eine Gruppenoperation definiert ist.

b) Sei $g \in M$ ein beliebiges Element. Zeigen Sie, dass der Stabilisator
$$(\mathbb{F}_p^\times)_g := \{ \ [a] \in \mathbb{F}_p^\times \mid g^a = g\} \subseteq \mathbb{F}_p^\times$$
von $g \in M$ trivial ist, also $(\mathbb{F}_p^\times)_g = \{[1]\}$ gilt.

c) Folgern Sie, dass $|M|$ ein Vielfaches von $p - 1$ ist.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^{15} - 7 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Sei $L|\mathbb{Q}$ ein Zerfällungskörper von f. Bestimmen Sie den Körpergrad $[L : \mathbb{Q}]$.

b) Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ einen Normalteiler der Ordnung 15 besitzt.

c) Sei $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}(\alpha^5)$ den Körpergrad $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^5)] = 5$ besitzt.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

a) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und sei R ein Ring. Ein Element $\omega \in R$ ist eine *n-te Einheitswurzel in R*, wenn $\omega^n = 1$ gilt, und eine *primitive n-te Einheitswurzel*, wenn zusätzlich für alle $1 \leq m < n$ gilt, dass $\omega^m - 1 \in R^\times$ (also eine Einheit in R) ist.

   Zeigen Sie, dass (die Restklasse von) 7 in $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ eine vierte Einheitswurzel, aber keine primitive vierte Einheitswurzel ist.

b) Bestimmen Sie die Ordnung der Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/2025\mathbb{Z}$ und zeigen Sie, dass diese Gruppe nicht zyklisch ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei p eine Primzahl.

a) Sei q ein Primteiler von $2^p - 1$. Zeigen Sie: $q \equiv 1 \pmod p$.
   Hinweis: Betrachten Sie die Ordnung von $2 \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$.

b) Zeigen Sie: Es gibt eine Galois-Erweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K_p$ mit $\mathrm{Gal}(K_p|\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   Hinweis: Betrachten Sie Teilkörper von geeigneten Kreisteilungskörpern.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei K ein Körper mit algebraischem Abschluss $\bar{K}$, sei $f \in K[X]$ normiert und sei $L = K(\alpha)$ mit einer Nullstelle $\alpha \in \bar{K}$ von f.

a) Zeigen Sie: Ist $[L : K] = \deg(f)$, dann ist f irreduzibel in $K[X]$.

b) Sei jetzt $f \in K[X]$ irreduzibel und sei weiter $g \in K[X]$. Wir nehmen an, dass das Polynom $g(X) - \alpha \in L[X]$ irreduzibel ist.
   Zeigen Sie, dass dann $f(g(X)) \in K[X]$ irreduzibel ist.
   Hinweis: Sei $\beta \in \bar{K}$ mit $g(\beta) = \alpha$. Zeigen Sie $K(\beta) = L(\beta)$.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ und seien $U_5, U_5' \subseteq G$ zwei verschiedene 5-Sylow-Gruppen von G.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der 5-Sylow-Gruppen von G.

b) Sei U die von (den Elementen von) U_5 und U_5' erzeugte Untergruppe von G.
Zeigen Sie: $U = G$.

Hinweis: Wie viele 5-Sylow-Gruppen kann eine echt zwischen U_5 und G liegende Untergruppe haben?

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei p eine Primzahl und sei $\mathbb{F}_p$ der endliche Körper mit p Elementen. Sei weiter

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{F}_p^\times, b \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

Zeigen Sie:

a) Die Menge G ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$.

b) Die Gruppe G enthält eine zyklische Untergruppe H_{p-1} der Ordnung $p-1$ und eine zyklische Untergruppe H_p der Ordnung p.

c) Die Gruppe G ist zyklisch.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei $n \geqslant 1$, sei K ein Körper, sei $\mathrm{Mat}_n(K)$ der Ring der $n \times n$ Matrizen über K, und sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Bekanntlich ist das *Minimalpolynom* von A das eindeutig bestimmte normierte Polynom $\mu_A \in K[X]$ minimalen Grades, das $\mu_A(A) = 0_{n,n}$ erfüllt.

a) Sei $m \geqslant 1$ und $B \in \mathrm{Mat}_m(K)$. Des Weiteren sei $C \in \mathrm{Mat}_{n+m}(K)$ die Blockdiagonalmatrix $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Beweisen Sie, dass μ_C ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von μ_A und μ_B ist.

b) Entscheiden Sie begründet, ob es eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_6(\mathbb{R})$ mit charakteristischem Polynom $X^6 + X^4$ und Minimalpolynom μ_A vom Grad 5 gibt.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

a) Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit drei Elementen, und sei G die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_3)$ mit Einsen auf der Hauptdiagonale. Zeigen Sie, dass G eine nichtabelsche Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ der Ordnung 27 ist.

b) Bestimmen Sie 12 paarweise nicht isomorphe Gruppen der Ordnung 2025.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

a) Zerlegen Sie die Polynome $X^6 - Y^6$ und $X^5Y + X^3Y^3 + XY^5$ im faktoriellen Ring $\mathbb{Q}[X,Y]$ in Primfaktoren.

Hinweis: Es sind jeweils vier Primfaktoren.

b) Finden Sie alle Paare von Polynomen $(f,g) \in \mathbb{Q}[X,Y]^2$ mit

$$f \cdot (X^6 - Y^6) + g \cdot (X^5Y + X^3Y^3 + XY^5) = 0.$$

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Für $a \in \mathbb{Z}$ sei $f_a = X^4 + aX^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Mit $\mathrm{Gal}(f_a)$ werde im Folgenden die Galois-Gruppe des in $\mathbb{C}$ enthaltenen Zerfällungskörpers von f_a über $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

a) Finden Sie ein $a \in \mathbb{Z}$, sodass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(f_a)$ nur aus der Identität besteht.

b) Finden Sie ein $a \in \mathbb{Z}$, sodass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(f_a)$ nur aus der Identität und der komplexen Konjugation besteht.

c) Bestimmen Sie den Isomorphietyp der Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(f_a)$ im Fall $a = -1$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, und sei $N_K : K \longrightarrow \mathbb{Q}$ die Normabbildung, die gegeben ist durch $N_K(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2$ für $a, b \in \mathbb{Q}$.

a) Beweisen Sie, dass es zu $x \in R$ und $y \in R \setminus \{0\}$ ein Element $q \in R$ gibt mit $|N_K(\frac{x}{y} - q)| < 1$.

Hinweis: Schreiben Sie $\frac{x}{y}$ in der Form $a + b\sqrt{3}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$.

b) Sei $N_R : R \longrightarrow \mathbb{Z}$ die Einschränkung der Abbildung N_K. Zeigen Sie, dass R bezüglich der Abbildung $|N_R|$ ein euklidischer Ring ist, d. h. zu zwei Elementen $x, y \in R$ mit $y \neq 0$ gibt es Elemente $q, r \in R$ mit $x = qy + r$ und $|N_R(r)| < |N_R(y)|$.

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Eine quadratische $(n \times n)$-Matrix $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ heißt *nilpotent*, wenn ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $B^k = 0$ existiert. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Nil}_n(\mathbb{C})$ die Teilmenge der nilpotenten Matrizen in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

a) Begründen Sie, warum eine nilpotente Matrix B in $\mathrm{Nil}_n(\mathbb{C})$ nur den Eigenwert 0 hat. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_B(X) \in \mathbb{C}[X]$ für $B \in \mathrm{Nil}_n(\mathbb{C})$.

b) Die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ operiert auf der Menge $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ durch Konjugation $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), (A, B) \mapsto ABA^{-1}$. Dies dürfen Sie ohne Beweis benutzen. Zeigen Sie, dass diese Operation eine Operation von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ auf der Teilmenge $\mathrm{Nil}_n(\mathbb{C})$ induziert.

c) Bestimmen Sie für $n := 4$ mit Hilfe der Jordanschen Normalform die Anzahl der Bahnen für die in b) angegebene Operation der Gruppe $\mathrm{Gl}_4(\mathbb{C})$ auf der Menge $\mathrm{Nil}_4(\mathbb{C})$.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit $q := p^n$ Elementen.

a) Begründen Sie, warum $\mathrm{ord}\,\mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_q) = (q-1)^2 q(q+1)$ für die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_q)$ über dem Körper $\mathbb{F}_q$ gilt.

b) Begründen Sie, warum $\mathrm{ord}\,\mathrm{Sl}_2(\mathbb{F}_q) = (q-1)q(q+1)$ für die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{F}_q)$ über dem Körper $\mathbb{F}_q$ gilt.

c) Begründen Sie, warum jede Untergruppe von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{F}_q)$ der Ordnung q konjugiert zur Untergruppe

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{F}_q \right\}$$

von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{F}_q)$ ist. Begründen Sie, warum H kein Normalteiler in $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{F}_q)$ ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Weiter gelte auch $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \in \mathbb{Z}$.

a) Es sei $f(X) := (X - \frac{ab}{c})(X - \frac{bc}{a})(X - \frac{ca}{b}) \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie, dass f ganzzahlige Koeffizienten hat.

b) Zeigen Sie, dass die rationalen Zahlen $\frac{ab}{c}$, $\frac{bc}{a}$ und $\frac{ca}{b}$ bereits in $\mathbb{Z}$ liegen.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Wir betrachten das Polynom $f := X^4 - 4X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

b) Für $\alpha := \sqrt{2 - \sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ sei $L := \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{C}$. Berechnen Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$.

c) Begründen Sie, warum die Elemente $\sqrt{2}$ und $\beta := \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ im Körper L liegen. Folgern Sie, dass L ein Zerfällungskörper für f über $\mathbb{Q}$ ist. Begründen Sie, warum $L|\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist.

d) Zeigen Sie, dass ein eindeutig bestimmtes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$ existiert. Berechnen Sie $\sigma(\sqrt{2})$ und $\sigma^2(\alpha)$. Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe von $L|\mathbb{Q}$ zyklisch ist.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Es sei $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ der endliche Körper mit drei Elementen.

a) Bestimmen Sie alle normierten, irreduziblen Polynome vom Grad 2 in $\mathbb{F}_3[X]$.

b) Begründen Sie, warum der Faktorring $K := \mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 1)$ ein Körper ist. Geben Sie die Anzahl der Elemente dieses Körpers K an.

c) Zerlegen Sie das Polynom $f := X^8 - 1$ im Polynomring $\mathbb{F}_3[X]$ in irreduzible Faktoren.

d) Geben Sie ein Polynom g in $\mathbb{F}_3[X]$ an, dessen Restklasse in K eine primitive 8-te Einheitswurzel ist.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

a) Für eine Matrix $W \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ sei W^t die transponierte Matrix. Gibt es eine Matrix $W \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, so dass

$$W^t \cdot W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

gilt? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Es seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Das charakteristische Polynom von A sei gegeben durch

$$\chi_A(X) = X^n + s_1 X^{n-1} + \ldots + s_r X^{n-r}$$

mit $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{R}$ und $s_r \neq 0$. Zeigen Sie, dass der Rang von A gleich r ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es sei G die Untergruppe der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$, die von den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

a) Es sei $E \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ die Einheitsmatrix. Beweisen Sie:

$$A^4 = E, \quad B^2 = A^2, \quad BAB^{-1} = A^3.$$

b) Zeigen Sie, dass man jedes Element in G eindeutig in der Form $A^k B^l$ mit $0 \leq k \leq 3$ und $0 \leq l \leq 1$ darstellen kann. Bestimmen Sie die Ordnung von G.

c) Zeigen Sie, dass G genau eine Untergruppe der Ordnung 2 besitzt.

d) Es sei N die Untergruppe von G der Ordnung 2. Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler in G ist, und bestimmen Sie den Isomorphietyp von G/N.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $f(X) = X^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass L genau drei Teilkörper vom Grad 2 hat, und geben Sie diese explizit an.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Es sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Es gelte $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$.

a) Zeigen Sie, dass $f(a) \equiv 1 \pmod{a-1}$ und $f(a) \equiv 2 \pmod{a-2}$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $a \geq 3$ gilt.

b) Weiter gelte $f(10) > 10$. Zeigen Sie, dass dann $f(10) \geq 82$ gilt.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Es sei p eine Primzahl, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der endliche Körper mit p Elementen und

$$R\colon \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{F}_p[X],\ f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \longmapsto R(f) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + p\mathbb{Z}) X^i$$

die Reduktionsabbildung für Polynome. Weiter sei $h \in \mathbb{F}_p[X]$ ein irreduzibles Polynom und (h) das zugehörige Hauptideal im Ring $\mathbb{F}_p[X]$. Zeigen Sie, dass das Urbild $\mathfrak{m} := R^{-1}((h))$ ein maximales Ideal im Ring $\mathbb{Z}[X]$ bildet und der Körper $\mathbb{Z}[X]/\mathfrak{m}$ die Charakteristik p hat.

<u>Thema Nr. 3</u>
(Aufgabengruppe)

Es sind <u>alle</u> Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Gruppen $(\mathbb{R}\backslash\{0\},\cdot)$ und $(\mathbb{C}\backslash\{0\},\cdot)$ nicht isomorph sind.

b) Zeigen Sie: Falls das Polynom $X^2+a \in R[X]$ über einem Integritätsbereich R reduzibel ist, so ist $-a$ ein Quadrat in R.

c) Zeigen Sie, dass das Polynom $P = 5X^3 - 10X^2 - \frac{5}{2}X + \frac{5}{3} \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Zur Erinnerung: Für eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge Ω heißt $K := \{g \in G : g \cdot \omega = \omega \text{ für alle } \omega \in \Omega\}$ der *Kern* der Operation. Im Fall $K = \{1_G\}$ heißt die Operation *treu*.

a) Es sei G eine abelsche Gruppe, die treu und transitiv auf einer Menge Ω operiere. Zeigen Sie, dass der Stabilisator $Stab_G(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$ gleich dem Kern der Operation von G auf Ω ist.

b) Es sei G eine endliche abelsche Gruppe, die treu und transitiv auf einer endlichen Menge Ω operiere. Zeigen Sie, dass $|G| = |\Omega|$ ist.

c) Geben Sie jeweils eine nichtabelsche endliche Gruppe G sowie eine treue und transitive Operation von G auf einer endlichen Menge Ω so an, dass gilt:

  i) $|G| = |\Omega|$;

  ii) $|G| \neq |\Omega|$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

a) Es seien R ein Integritätsbereich und K ein Teilkörper von R. Ferner sei R ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass dann R ebenfalls ein Körper ist.

b) Es sei $F|K$ eine Körpererweiterung mit Zwischenkörpern L und M. Dabei sei $M|K$ endlich. Ohne Beweis darf benutzt werden, dass $R := \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in L, b_i \in M\}$ ein Teilring von ML ist. Zeigen Sie, dass R ein endlichdimensionaler L-Vektorraum ist, wobei die Skalarmultiplikation durch Einschränkung der auf F gegebenen Multiplikation induziert werde.

c) Zeigen Sie unter den Voraussetzungen von b), dass $[ML : L] \leq [M : K]$ ist.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Es seien $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{3})$, $\varepsilon := \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ und $L = K(\varepsilon)$.

a) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $K|\mathbb{Q}$.

b) Begründen Sie, warum $K|\mathbb{Q}$ nicht galoissch ist, $L|\mathbb{Q}$ hingegen schon.

c) Bestimmen Sie die Mächtigkeit $|\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})|$ der Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ von $L|\mathbb{Q}$.

d) Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ nicht abelsch ist.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Es sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ existieren eindeutig bestimmte $r_0, r_1, r_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ mit $|\{i \in \mathbb{N}_0 : r_i \neq 0\}| < \infty$ und $n = \sum_{i=0}^{\infty} r_i b^i$. Man nennt $n = \sum_{i=0}^{\infty} r_i b^i$ die *b-adische Entwicklung von n*. Dies dürfen Sie ohne weiteren Beweis benutzen. Im Folgenden sei stets $n \in \mathbb{N}_0$ mit b-adischer Entwicklung $n = \sum_{i=0}^{\infty} r_i b^i$.

a) Es sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2$, und es gelte $d \mid b^j$ für ein $j \in \mathbb{N}_0$ und $d \nmid b^i$ für alle $i < j$. Zeigen Sie:

   i) genau dann gilt $d \mid n$, wenn $d \mid \sum_{i=0}^{j-1} r_i b^i$ gilt;

   ii) im Fall $d = b^j$ gilt genau dann $d \mid n$, wenn $r_0 = \cdots = r_{j-1} = 0$ gilt.

b) Es sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2$ und $d \mid b - 1$.

   i) Zeigen Sie, dass $n \equiv \sum_{i=0}^{\infty} r_i \pmod{d}$ ist.

   ii) Bestimmen Sie das eindeutige $m \in \{0, \ldots, 8\}$ mit $154421643 \equiv m \pmod{9}$.