Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Es sei (A, ·) eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi\colon A \to A, \qquad a \mapsto a^{-1}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, welches zeigt, dass die entsprechende Aussage für beliebige Gruppen im Allgemeinen falsch ist.

(c) Mit $\mathfrak{A}_4$ werde die alternierende Gruppe über vier Buchstaben bezeichnet. Bestimmen Sie diejenigen $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, für die es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\phi\colon \mathfrak{A}_4 \to \mathbb{Z}/(n)$ gibt.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition von *Nullteilerfreiheit* eines kommutativen Rings an.

(b) Bestimmen Sie alle Nullteiler und Einheiten sowie die Inklusionen aller Ideale des kommutativen Rings $\mathbb{Z}/(27)$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass jeder irreduzible Faktor von $f := X^4 - 25 \in \mathbb{Q}[X]$ separabel über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Bestimmen Sie ein primitives Element eines Zerfällungskörpers L von f über $\mathbb{Q}$ und die Dimension von L über $\mathbb{Q}$.

(c) Berechnen Sie die Automorphismengruppe von L über $\mathbb{Q}$.

(d) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$ und ihre Inklusionen.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Charakteristik eines endlichen Körpers eine Primzahl ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über einem endlichen Körper K eine Potenz der Charakteristik von K ist.

(c) Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen; die Charakteristik von K sei ungleich 2. Berechnen Sie die Mächtigkeit der Bahn des Elementes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$$

unter der Operation von $\mathrm{GL}_2(K)$ durch Konjugation.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Seien K ein Körper und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen V und W. Seien

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K) \qquad \text{und} \qquad W^* := \mathrm{Hom}_K(W, K)$$

die Dualräume, sowie $f^*\colon W^* \to V^*$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$, die duale Abbildung.

(a) Sei $v_1, \dots, v_n$ eine K-Basis von V. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(v_1), \dots, f(v_n)$ linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie: Ist f injektiv, dann ist f^* surjektiv.

(c) Zeigen Sie: Ist f^* surjektiv, dann ist f injektiv.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$7 \mid (10a + b) \iff 7 \mid (a - 2b)\,.$$

(b) Bestimmen Sie, für welche $r \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem
(i) keine, (ii) genau eine, (iii) unendlich viele Lösungen hat.

$$\begin{aligned} rx + y + z &= 1 \\ x + ry + z &= 1 \\ x + y + rz &= 1 \end{aligned}$$

(c) Geben Sie ein externes direktes Produkt zyklischer Gruppen an, das isomorph ist zur Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/40\mathbb{Z})^\times$.
(Hinweis: Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen.)

(d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren des Endomorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - 2z \\ 0 \\ -2x + 4z \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es sei G eine Gruppe der Ordnung 30. Es bezeichnen U_3 und U_5 jeweils eine 3- und eine 5-Sylow-Gruppe von G. Zeigen Sie:

(a) Mindestens eine der Gruppen U_3 und U_5 ist ein Normalteiler von G.

(b) Ist U_3 normal, so hat G/U_3 eine Untergruppe vom Index 2. Ist U_5 normal, so hat G/U_5 eine Untergruppe vom Index 2.

(c) G hat eine Untergruppe U_{15} vom Index 2.

(d) Zeigen Sie, dass alle 3-Sylow-Gruppen und alle 5-Sylow-Gruppen von G in U_{15} enthalten sind.

(e) Folgern Sie, dass G genau eine 3-Sylow-Gruppe und genau eine 5-Sylow-Gruppe hat.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Es sei $R = \{x + y\sqrt{-31} \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Begründen Sie, dass R ein Ring ist.

(b) Zeigen Sie, dass R nicht faktoriell ist.
Hinweis: Beachten Sie $32 = (1 + \sqrt{-31})\,(1 - \sqrt{-31})$.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Seien p und q zwei Primzahlen. Bestimmen Sie den Zerfällungskörper des Polynoms $X^p - q \in K[X]$ für die Grundkörper $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Es sei $\mathbb{F}_{625}$ der endliche Körper mit 625 Elementen mit Primkörper P. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente $a \in \mathbb{F}_{625}$ mit $P(a) = \mathbb{F}_{625}$.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Es seien G die multiplikative Gruppe $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ und $X = \mathbb{R}^3$ der dreidimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum mit skalarer Multiplikation

$$\mathbb{R} \times X \to X\,, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x\,.$$

Weiter sei die folgende Abbildung gegeben:

$$\cdot \colon G \times X \to X\,, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x := gx$$

(das ist die skalare Multiplikation, eingeschränkt auf $G \times X$).

(a) Zeigen Sie, dass $\cdot$ eine Operation von G auf X ist.

(b) Bestimmen Sie die Menge F der Fixpunkte der Operation.

(c) Zeigen Sie, dass $R = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\} \cup \{0\}$ ein Repräsentantensystem der Bahnen der Operation ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es seien $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{n \times n}$ der reellen $(n \times n)$-Matrizen. Für $A \in V$ sei $A^\top \in V$ die zu A transponierte Matrix. Weiter seien

$$U := \{A \in V \mid A^\top = A\} \qquad \text{und} \qquad W := \{A \in V \mid A^\top = -A\}\,.$$

Zeigen Sie:

(a) U und W sind Untervektorräume von V.

(b) $V = U \oplus W$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung $2023 = 7 \cdot 17^2$.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive 7-te Einheitswurzel, und es seien $a := \zeta + \zeta^6$ und $b := \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$.

(a) Geben Sie einen konkreten Isomorphismus zwischen der Einheitengruppe von $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ und der Galois-Gruppe von $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(a)|\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(b)|\mathbb{Q}$ galoissch sind, und bestimmen Sie die zugehörigen Galois-Gruppen bis auf Isomorphie.

(c) Bestimmen Sie die Minimalpolynome von a und b über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Für einen kommutativen Ring R definieren wir $S(R) = \{r_1^2 + r_2^2 \mid r_1, r_2 \in R\}$.

(a) Zeigen Sie: Sind $r, r' \in S(R)$, dann gilt auch $rr' \in S(R)$.

(b) Bekanntlich sind die normierten irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[X]$ genau die Polynome der Form $X - r$ oder $(X - a)^2 + b^2$ mit $r, a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_{>0}$.
Zeigen Sie: $S(\mathbb{R}[X]) = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \forall \xi \in \mathbb{R}\colon f(\xi) \geq 0\}$.

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ____________ Kennwort: ____________ Arbeitsplatz-Nr.: ________	**Herbst 2023**	**63912**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Seien $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $p \neq 2$ eine Primzahl. Zeigen Sie:

$$p \mid (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n) \iff p \mid n \text{ oder } p \mid (n+1).$$

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Einheitengruppe

$$\left(\mathbb{Z}[X]/(2, X^3 + X^2 + X)\right)^*$$

des angegebenen Quotientenringes.

(c) Bestimmen Sie mithilfe des Chinesischen Restsatzes und unter vollständiger Angabe des Lösungsweges die kleinste natürliche Zahl $n \geq 1$, die die Kongruenzen $n \equiv 1 \pmod 3$, $n \equiv 2 \pmod 5$ und $n \equiv 0 \pmod 8$ erfüllt.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Im Folgenden sei S_n die symmetrische Gruppe.

(a) Sei $\sigma \in S_n$ ein Produkt $\sigma = \zeta_1 \cdots \zeta_m$ von paarweise disjunkten Zykeln ζ_j der Länge ℓ_j. Zeigen Sie, dass die Ordnung von σ gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $\ell_1, \ldots, \ell_m$ ist.

(b) Bestimmen Sie die maximale Ordnung eines Elements
(i) der S_6; (ii) der S_7.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Seien G eine einfache Gruppe mit $|G| > 2$, die auf der endlichen Menge X operiere, und $\rho \colon G \to \Sigma(X) \simeq S_n$ $(n := |X|)$ der zugehörige Gruppenhomomorphismus in die symmetrische Gruppe von X. Zeigen Sie, dass $\rho(G)$ in der alternierenden Gruppe A_n enthalten ist.

(b) Seien G eine nicht-abelsche einfache Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe sowie $n := (G : H) \geq 2$. Zeigen Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe von A_n ist, und dass $n \geq 5$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass keine endliche einfache Gruppe der Ordnung 80 existiert.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring (mit 1). Sei weiter $I \subseteq R$ ein Ideal. Wir definieren das *Radikal* von I als

$$rad(I) = \{r \in R \mid r^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $rad(I)$ ist ebenfalls ein Ideal von R.

(b) Ist I ein Primideal, dann gilt $rad(I) = I$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass der Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ genau drei quadratische Teilkörper besitzt, d. h. Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_8)$ mit $[K : \mathbb{Q}] = 2$.

(b) Bestimmen Sie in Teil (a) drei Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Q}$ so, dass die Zwischenkörper $K_i := \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha_i})$ $(1 \leq i \leq 3)$ genau die quadratischen Teilkörper sind.

(c) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ irreduzibel ist.

(d) Nach Teil (c) gilt $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2(\alpha)$ für ein $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_2$ mit $\alpha^4 + \alpha + 1 = 0$. Bestimmen Sie die Grade $[\mathbb{F}_2(\beta) : \mathbb{F}_2]$ in den beiden Fällen $\beta = \alpha + 1$ und $\beta = \alpha^3 + 1$.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei $\omega \in \mathbb{C}$ eine primitive dritte Einheitswurzel.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ eine Galois-Erweiterung ist.

(b) Bestimmen Sie den Grad $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) : \mathbb{Q}]$ dieser Erweiterung.

(c) Sei G die Menge der invertierbaren 2×2-Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit Einträgen in $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe der Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen ist, und geben Sie einen Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q})$ an.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition einer *auflösbaren Gruppe* an.

(b) Bestimmen Sie alle endlichen einfachen auflösbaren Gruppen.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Seien G_1 und G_2 endliche Gruppen und $|G_1|$ teilerfremd zu $|G_2|$. Sei weiter $H \subseteq G_1 \times G_2$ eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass es Untergruppen $H_1 \subseteq G_1$ und $H_2 \subseteq G_2$ gibt mit $H = H_1 \times H_2$.

(b) Geben Sie zwei Gruppen G_1 und G_2 an sowie eine Untergruppe $H \subseteq G_1 \times G_2$, sodass H nicht von der Form $H_1 \times H_2$ für zwei Untergruppen $H_1 \subseteq G_1$ und $H_2 \subseteq G_2$ ist.

(c) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für jeden Teiler $k > 0$ von n gibt es eine Untergruppe U von G der Ordnung k.

(ii) G ist nicht abelsch.

Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Es seien $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4$ beliebig und

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad (u_1, u_2, u_3, u_4) \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass x, y, z Elemente des Kerns von f sind.

(c) Zeigen Sie, dass der Kern von f genau dann der von x, y, z aufgespannte Unterraum ist, wenn diese Vektoren linear unabhängig sind.

(d) Bestimmen Sie den Kern von f im Fall, dass x, y, z linear abhängig sind.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

(a) Sei $x \in R$ ein Element mit $x^m = 0$ für ein $m > 0$. Zeigen Sie, dass dann $1 + x \in R$ multiplikativ invertierbar ist.

(b) Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\sqrt{I} := \{x \in R \mid x^m \in I \text{ für ein } m > 0\}$$

ein Ideal in R ist.

(c) Zeigen Sie, dass $N(R) := \{x \in R \mid x^m = 0 \text{ für ein } m > 0\}$ ein Ideal in R ist.

(d) Geben Sie ein Beispiel für einen (nicht kommutativen) Ring R' an, in dem $N(R') \subseteq R'$ (wie in (c)) *kein* (Links-)Ideal ist.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G.

(a) Geben Sie die Definition des *Index* $(G : H)$ an. (G muss nicht endlich sein.)

(b) Zeigen Sie, dass $(G : H)$ ein Teiler von 168 ist, wenn H der Kern eines Homomorphismus $f\colon G \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ in die Gruppe der invertierbaren 3×3-Matrizen über dem Körper $\mathbb{F}_2$ ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es seien $\alpha := \sqrt{\sqrt{12}+3} \in \mathbb{R}$, $\beta := i\sqrt{\sqrt{12}-3} \in \mathbb{C}$ und $L := \mathbb{Q}(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $f = m_{\alpha,\mathbb{Q}}$ von α über $\mathbb{Q}$ und zeigen Sie, dass auch β eine Nullstelle von f ist.

(b) Begründen Sie, warum $L/\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist.

(c) Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\alpha, i)$ gilt, und bestimmen Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$.

(d) Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ einen Normalteiler der Ordnung 2 enthält.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei L Zerfällungskörper des Polynoms $f := X^4 - X^3 + 2X^2 - 2$ über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie

(a) für eine Nullstelle $1 \neq \alpha \in L$ von f das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$,

(b) den Grad $[L : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

(a) Seien p eine ungerade Primzahl und $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 = 1$ in $R = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ genau zwei Lösungen hat.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $x^2 = 1$ im Ring $\mathbb{Z}/2023\mathbb{Z}$.
Hinweis: $2023 = 7 \cdot 17^2$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Seien $R \neq 0$ ein kommutativer Ring und $F, G \in R[X]$ Polynome, wobei G als normiert angenommen sei. Dann (das sollen Sie nicht beweisen) existieren eindeutig bestimmte $A, B \in R[X]$ so, dass gelten $F = AG + B$ und $\deg(B) < \deg(G)$ (hierbei ist $\deg(0) := -\infty$). (Das ist Division mit Rest durch ein normiertes Polynom).

(a) Seien $f\colon R \to S \neq 0$ ein Ringhomomorphismus und $f[X]\colon R[X] \to S[X]$ der Ringhomomorphismus, der auf $R \subseteq R[X]$ mit f übereinstimmt und außerdem $f[X](X) = X$ erfüllt. Zeigen Sie, dass in $S[X]$ gilt $f[X](F) = f[X](A) \cdot f[X](G) + f[X](B)$, und dass diese Gleichung die Division mit Rest von $f[X](F)$ durch $f[X](G)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass genau ein Ideal $I \subseteq R$ existiert, sodass für jeden Ringhomomorphismus $f\colon R \to S \neq 0$ äquivalent sind:

(i) $f[X](G)$ teilt $f[X](F)$ in $S[X]$.

(ii) $f(I) = 0$.

(c) Bestimmen Sie das Ideal $I \subseteq R$ aus Teil (b) in den beiden folgenden Fällen:

(i) $R := \mathbb{Z}, \quad F := X^3 - 1, \quad G := X^2 + 1 \in R[X]$.

(ii) $R := \mathbb{Z}[Y], \quad F(X) := X^2 + Y, \quad G(X) := X - 1 \in R[X]$.