Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei $A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{Q})$ eine 2×2-Matrix mit rationalen Einträgen, sodass A^n die Einheitsmatrix I_2 ist für ein $n \geq 1$. Sei $m_A \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von A. Zeigen Sie:

(a) Der Grad von m_A ist höchstens 2.

(b) Das Polynom m_A ist ein Teiler von $X^n - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$.

(c) Wählt man $n \geq 1$ minimal mit $A^n = I_2$, dann ist $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
Hinweis: Betrachten Sie geeignete Kreisteilungspolynome.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die letzten drei Ziffern von 7^{404404}.

(b) Es sei φ die Eulersche φ-Funktion. Zeigen Sie, dass $\varphi(n^2) = n\,\varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Es sei p eine Primzahl mit $p \notin \{2, 5\}$. Zeigen Sie, dass p eine der Zahlen 9, 99, $999, 9999, \ldots$ teilt.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Man betrachte die symmetrische Gruppe S_4 des Grades 4 und

$$V := \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \subseteq S_4\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass V ein zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorpher Normalteiler in S_4 ist.

(b) Zeigen Sie, dass S_4/V zur symmetrischen Gruppe S_3 isomorph ist.

(c) Beweisen Sie, dass S_4 keinen Normalteiler der Ordnung 8 hat.

(d) Bestimmen Sie alle Untergruppen und alle Normalteiler der Faktorgruppe S_4/V.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (12 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Ideale des Rings $\mathbb{Z}/2022\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie darunter alle Primideale in $\mathbb{Z}/2022\mathbb{Z}$.

(b) Bestimmen Sie alle idempotenten Elemente des Rings $R := \mathbb{Z}/2022\mathbb{Z}$, d.h. alle Elemente $a \in R$ mit $a^2 = a$.

(c) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullteiler im Ring $\mathbb{Z}/2022\mathbb{Z}$.

(d) Bestimmen Sie ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n < 2022$ und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/2022\mathbb{Z})^\times$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_+$ sei $a_n := \sqrt[2^n]{2}$. Weiter seien $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ und $K := \mathbb{Q}(A)$. Zeigen Sie:

(a) $[\mathbb{Q}(a_n) : \mathbb{Q}] = 2^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_+$

(b) $[K : \mathbb{Q}] = \infty$

(c) $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} \mathbb{Q}(a_n)$

(d) K ist eine algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei die komplexe 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}).$$

Berechnen Sie die Matrix A^{2022}.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Geben Sie eine nicht-abelsche Gruppe G der Ordnung 100 an.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Sylowsätze, dass jede Gruppe G der Ordnung 100 auflösbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass eine Gruppe G der Ordnung 100 genau dann abelsch ist, wenn es in G lediglich eine 2-Sylowgruppe gibt.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei $n > 0$ eine natürliche Zahl und R ein kommutativer Ring (mit Einselement). Betrachten Sie für $a, b \in R$ das Ideal $I = (a, b) \subseteq R$.

(a) Zeigen Sie: Aus $a^n = b^n = 0$ folgt $I^{2n} = 0$.

(b) Nehmen Sie an, dass $2 = 1 + 1$ eine Einheit von R ist und dass $c^2 = 0$ für alle $c \in I$ gilt. Zeigen Sie, dass dann $ab = 0$ folgt.

(c) Geben Sie einen kommutativen Ring R mit Elementen $a, b \in R$ an, für welche $a^2 = b^2 = 0$ und $ab \neq 0$ gilt. Begründen Sie, dass diese beide Eigenschaften für den von Ihnen angegebenen Ring erfüllt sind.
Tipp: Betrachten Sie $R = \mathbb{Q}[X, Y]/I$ für ein geeignetes Ideal I.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Seien p eine Primzahl und $n > 0$ eine natürliche Zahl. Seien $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$ endliche Körper mit p bzw. p^n Elementen.

(a) Sei zunächst $n = 2$. Zeigen Sie: Für jedes $a \in \mathbb{F}_{p^2} \setminus \mathbb{F}_p$ gilt $\mathbb{F}_p(a) = \mathbb{F}_{p^2}$.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente $a \in \mathbb{F}_{p^2}$ mit $\mathbb{F}_{p^2} = \mathbb{F}_p(a)$.

(c) Sei jetzt $n = 6$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente $a \in \mathbb{F}_{p^6}$ mit $\mathbb{F}_{p^6} = \mathbb{F}_p(a)$ genau $p^6 - p^3 - p^2 + p$ beträgt.

(d) Bestimmen Sie die Anzahl der irreduziblen, normierten Polynome $f \in \mathbb{F}_p[X]$ vom Grad 6.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Betrachten Sie die Teilkörper $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ von $\mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie: Für das Kompositum $L = K_1\,K_2$ gilt $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(b) Beweisen Sie: $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Q}$.

(c) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$.

(d) Zeigen Sie, dass $L/\cancel{K}$ galoissch ist und bestimmen Sie die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ bis auf Isomorphie. $\mathbb{Q}$

(e) Bestimmen Sie sämtliche Zwischenkörper der Erweiterung $L/\mathbb{Q}$.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

(12 Punkte)

Gegeben sei die Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen im Körper $\mathbb{F}_2$.

(a) Listen Sie alle Elemente von G auf.

(b) Zeigen Sie, dass die natürliche Operation von G auf dem Vektorraum $\mathbb{F}_2^2$ einen Isomorphismus

$$\varphi : G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bij}(\mathbb{F}_2^2 \setminus \{0\})$$

induziert. (Hier bezeichne $\mathrm{Bij}(M)$ die Gruppe der Bijektionen auf einer Menge M.)

Zeigen Sie insbesondere, dass G isomorph ist zu S_3, der symmetrischen Gruppe über 3 Elementen.

(c) Zeigen Sie, dass eine Gruppe der Ordnung 30 höchstens 6 Untergruppen der Ordnung 5 haben kann.

Aufgabe 2

(12 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{Z}$ so, dass $(1 + 2\mathbb{Z}) \cap (2 + 3\mathbb{Z}) \cap (3 + 5\mathbb{Z}) = a + b\mathbb{Z}$.

(b) Bestimmen Sie sämtliche ganzzahlige Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ der Gleichung $221\,x + 39\,y = 26$.

(c) Sei $n \geq 2$ und nehmen wir an, dass $p = 2^n + 1$ eine Primzahl ist. Zeigen Sie, dass eine Restklasse $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ genau dann die Gruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ erzeugt, wenn a kein Quadrat in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 3

(12 Punkte)

Es sei $R := \mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ der Ring der ganzen gaußschen Zahlen.

(a) Bestimmen Sie die Einheitengruppe von R. Führen Sie einen expliziten und vollständigen Beweis der Korrektheit Ihres Ergebnisses.

(b) Zeigen Sie, dass zwei Elemente $w, z \in R$ genau dann assoziiert sind, wenn $w^4 = z^4$ gilt.

(c) Es sei $(1 - i)$ das von dem Element $1 - i$ erzeugte Ideal von R. Bestimmen Sie das Ideal $(1 - i) \cap \mathbb{Z}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Es sei K ein Teilkörper von $\mathbb{C}$, sodass $K/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung vom Grad 4 mit zyklischer Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ist. Zeigen Sie, dass dann $i \notin K$ gilt.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $i \in K$ gilt und betrachten Sie $K/\mathbb{Q}(i)$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, i)$.

(a) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $[K : \mathbb{Q}]$.

(b) Entscheiden und begründen Sie, ob es einen $\mathbb{Q}$-Automorphismus $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt{3}$ gibt.

(c) Entscheiden und begründen Sie, ob die Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ galoissch ist.

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei die Gruppe

$$G = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{Q}) \mid a, b, c \in \mathbb{Q}, ac \neq 0\}$$

der invertierbaren oberen 2×2-Dreiecksmatrizen über $\mathbb{Q}$. Ferner seien

$$H = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid c = a\} \quad \text{und} \quad U = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid b = 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler in G ist und dass durch

$$\varphi\colon\ G/H \longrightarrow \mathbb{Q}^\times \qquad \text{mit} \quad \varphi(\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right]) = \frac{a}{c}$$

ein wohldefinierter Gruppenisomorphismus gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass U eine Untergruppe von G, aber kein Normalteiler ist.

(c) Betrachten Sie die Operation von U auf H durch Konjugation. Geben Sie ein Repräsentantensystem der Bahnen dieser Gruppenoperation an.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei R der Faktorring $R = \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 7X + 12)$.

(a) Zeigen Sie, dass R als Ring zu $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ isomorph ist.

(b) Geben Sie explizit einen Ringisomorphismus $\varphi\colon\ \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow R$ an.

(c) Bestimmen Sie alle Zahlen $a \in \mathbb{Q}$, sodass die Restklasse von $X + a$ in R eine Einheit ist, und finden Sie jeweils das dazu inverse Element.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung und sei $a \in L$. Zeigen Sie, dass a genau dann ein primitives Element für L/K ist, wenn die Elemente $\sigma(a)$ für $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ paarweise verschieden sind.

(b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist und bestimmen Sie die Elemente der Galoisgruppe.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ das Element $a = \sqrt{3} + q \cdot i$ ein primitives Element der Galoiserweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)/\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^4 + 5X^2 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$. Es sei $Z \subset \mathbb{C}$ sein Zerfällungskörper in $\mathbb{C}$ und $\alpha \in Z$ eine Nullstelle.

(a) Dividieren Sie das Polynom $f(X)$ durch $X^2 - \alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha)[X]$, ohne die Nullstelle explizit zu berechnen.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $(\alpha^3 + 3\alpha)^2 = -(5 + \alpha^2)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $[Z : \mathbb{Q}] = 4$ und $\mathrm{Gal}(Z/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei $\Phi_n(X) \in \mathbb{Q}[X]$ das n-te Kreisteilungspolynom über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $X^n - 1 = (X - 1) \cdot h(X)$ mit einem Polynom $h(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $h(1) = n$.

(b) Ist $n = p^k$ für eine Primzahl p und $k \geq 1$, so gilt $\Phi_n(1) = p$.

(c) Hat n mindestens zwei Primzahlen $p \neq q$ als Teiler, so ist $\Phi_n(1) = 1$.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Eine *affine Ebene* in $\mathbb{R}^3$ ist die Menge aller Punkte (x, y, z) in $\mathbb{R}^3$, die eine Gleichung der Form $ax + by + cz + d = 0$ erfüllen mit fest vorgegebenen Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

(a) Für $j = 1, 2, 3, 4$ seien vier Punkte $P_j = (x_j, y_j, z_j) \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Zeigen Sie, dass P_1, P_2, P_3, P_4 genau dann in einer affinen Ebene liegen, wenn gilt:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(b) Sei $C = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$, und sei $E \subset \mathbb{R}^3$ eine affine Ebene. Zeigen Sie, dass $C \cap E$ höchstens drei Elemente hat.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei K ein Körper, sei $K[X]$ der Polynomring über K in einer Unbestimmten, und sei $L = K(X)$ der Quotientenkörper von $K[X]$. Sei weiter

$$R = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in K[X],\ \mathrm{ggT}(a, b) = 1,\ b(0) \neq 0\} \subseteq L.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge R ist ein Unterring von L.

(b) Sei I ein Ideal von R. Dann ist $I \cap K[X]$ ein Ideal von $K[X]$.

(c) Der Ring R ist ein Hauptidealring.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Es ist $337 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 + 7 = 13 \cdot 17 + 2^2 \cdot 29$. Erklären Sie, dass daraus folgt, dass 337 eine Primzahl ist.

(b) Sei p eine Primzahl und $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^n = 1$ in $\mathbb{F}_p$ genau $\mathrm{ggT}(n, p-1)$ verschiedene Lösungen besitzt.

(c) Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen n, für die die Gleichung $x^n = 1$ im Ring $R := \mathbb{Z}/2022\,\mathbb{Z}$ genau n Lösungen hat.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei $f = X^6 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f, und sei $K = \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Das Polynom f ist über $\mathbb{Q}$ irreduzibel.

(b) Die Zahl $\zeta := \frac{1}{2}(1 + \alpha^3) \in K$ ist eine primitive sechste Einheitswurzel.

(c) Der Körper K ist eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$.

(d) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ist nicht abelsch.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 2022.

(a) Nennen Sie vier paarweise nicht isomorphe Beispiele von Gruppen der Ordnung 2022 und begründen Sie, dass die Gruppen paarweise nicht isomorph sind.

(b) Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

(c) Beweisen Sie, dass G einen Normalteiler H vom Index 2 besitzt.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei eine endliche Körpererweiterung L/K. Weiterhin sei $\mathrm{Tr}_{L/K} : L \longrightarrow K$ die Abbildung, die jedem Element $a \in L$ die Spur der Multiplikation $m_a : L \longrightarrow L$ $(b \mapsto ab)$ zuordnet. Dabei ist die *Spur* einer K-linearen Abbildung $\varphi : L \longrightarrow L$ definiert als die Summe der Hauptdiagonalelemente einer Darstellungsmatrix.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tr}_{L/K}$ eine K-lineare Abbildung ist.

(b) Nun sei $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine K-Basis von L. Beweisen Sie, dass sich die *Diskriminante* $\Delta_{L/K}(a_1, \ldots, a_n) = \det(\mathrm{Tr}_{L/K}(a_i a_j)_{i,j})$ um einen Faktor aus $(K^\times)^2$ ändert, wenn man die Basis wechselt.

(c) Seien $p, q \in \mathbb{Q}$ so gewählt, dass $X^2 + pX + q$ ein irreduzibles Polynom ist. Finden Sie $\Delta_{L/K}(1, x)$ für $K = \mathbb{Q}$ und $L = K[X]/(X^2 + pX + q)$, wobei x die Restklasse von X in L bezeichne.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Geben Sie eine vollständige Definition des kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier ganzer Zahlen an.

(b) Beweisen Sie mithilfe Ihrer Definition aus (a), dass für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ die folgende Formel gilt:

$$\mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(a, b), \mathrm{kgV}(c, d)) = \mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(a, c), \mathrm{kgV}(b, d))$$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Seien p, q, r Primzahlen mit $p < q < r$, und sei G eine Gruppe der Ordnung $p \cdot q \cdot r$. Für $i \in \{p, q, r\}$ bezeiche s_i die Anzahl der verschiedenen i-Sylowuntergruppen von G. Beweisen Sie:

(a) Besitzt G keine normale Sylowuntergruppe, so gilt $s_p \geq q$ und $s_q \geq r$ und $s_r = pq$.

(b) Die Gruppe G besitzt eine normale Sylowuntergruppe.

(c) Eine Gruppe der Ordnung 2022 ist nicht einfach.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Z}[X]/(X^5 + 2,\ X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$.

(a) Beweisen Sie, dass $3 \in (X^5 + 2,\ X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass K ein Körper ist.

(c) Beweisen Sie, dass K eine Galoiserweiterung seines Primkörpers $\mathbb{F}_3$ ist und bestimmen Sie die Galoisgruppe von $K/\mathbb{F}_3$.

(d) Sei x die Restklasse von X in K. Zeigen Sie, dass $\{x,\ x^3,\ x^9,\ x^{27}\}$ eine $\mathbb{F}_3$-Basis von K ist und bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der Elemente der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{F}_3)$ bzgl. dieser Basis.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, und sei I der Durchschnitt der maximalen Ideale von R.

(a) Zeigen Sie, dass I ein Ideal von R ist.

(b) Beweisen Sie, dass ein Element $a \in R$ genau dann in I liegt, wenn für alle $b \in R$ das Element $ab - 1$ eine Einheit von R ist.