Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz

Satz (7.2)

Sei $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-integierbarer Funktionen $f_m : \Omega \to \mathbb{R}$, die fast überall gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert. Sei ferner $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ eine μ-integrierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass μ-fast überall jeweils $|f_m| \le g$ erfüllt ist, für jedes $m \in \mathbb{N}$. Dann ist auch f μ-integrierbar, und es gilt

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \lim_{m\to\infty} \int f_m \, d\mu.$$

Satz (7.4)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Für jedes $t \in I$ ist $\Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t)$ eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion.

(ii) Es gibt ein $t_0 \in I$, so dass $\Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t_0)$ μ-integrierbar ist.

(iii) Auf dem gesamten Definitionsbereich $\Omega \times I$ existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}$.

(iv) Es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$, so dass für alle $t \in I$ jeweils $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le g(x)$ für μ-fast alle $x \in \Omega$ erfüllt ist.

Dann ist $F : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int f(x,t)\,d\mu(x)$ eine reellwertige, auf ganz I definierte und differenzierbare Funktion, und es gilt $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,d\mu(x)$ für alle $t \in I$.

Beweis von Satz 7.4

geg.: Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall

$f: \Omega \times I \to \mathbb{R}$ Funktion, so dass

(i) $x \mapsto f(x,t)$ für alle $t \in I$ messbar

(ii) für ein $t_0 \in I$ sogar μ-integrierbar

(iii) Existenz von $\frac{\partial f}{\partial t}$

(iv) $\exists\, g: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, μ-int. mit $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$

für alle $t \in I$ und jeweils μ-fast alle $x \in \Omega$

z.zg.: (1) $F: I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int f(x,t)\, d\mu(x)$ ist auf ganz I definiert

(2) $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(x) \quad \forall\, t \in I$

<u>zu (1)</u> Sei $t \in I$ $\quad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$ für μ-fast alle $x \in \Omega \Rightarrow x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ ist eine μ-integrierbare Fkt

Mittelwertsatz der Differentialrechnung (einer Variablen)

$\Rightarrow$ Für jedes $x \in \Omega$ gibt es ein $s(x) \in I$ zwischen t und t_0 mit $f(x,t) - f(x,t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, s(x))(t - t_0)$

$$\Rightarrow |f(x,t)| \leq |f(x,t_0)| + \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, s(x))\right| |t - t_0|$$

$$\leq |f(x,t_0)| + g(x)|t - t_0| \qquad (*)$$

Vor. $\Rightarrow x \mapsto f(x,t_0)$ und g sind beide μ-integrierbar

$(*) \Rightarrow x \mapsto f(x,t)$ ist μ-integrierbar

<u>zu (2)</u> Sei $t \in I$ und $t_n \in I \setminus \{t\}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} t_n = t. \Rightarrow \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \frac{1}{t_n - t} \int (f(x,t_n) - f(x,t))\, d\mu(x)$$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$\Rightarrow \exists\, s_n(x) \in I$ zwischen t_n und t mit

$$\frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_n(x)) =: h_n(x)$$

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_n(x))\right| \leq |g(x)|,\ \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in \Omega$$

Da außerdem die Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)$ konvergiert, kann der Satz 7.2 von Lebesgue angewendet werden und liefert

$$\int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int h_n \, d\mu(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = F'(t) \qquad \square$$

Partielle Ableitung unter dem Integralzeichen

Folgerung (7.5)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Lebesgue-messbare und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, und sei $f : A \times U \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften.

(i) Für jedes $y \in U$ ist die Funktion $A \to \mathbb{R}$, $a \mapsto f(a, y)$ Lebesgue-integrierbar.

(ii) Für jeden Punkt $a \in A$ existieren die partiellen Ableitungen $\partial_j f_a$ mit $1 \leq j \leq n$ auf ganz U, wobei $f_a : U \to \mathbb{R}$ durch $f_a(x) = f(a, x)$ definiert ist.

(iii) Es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g : A \to \bar{\mathbb{R}}_+$, so dass $|\partial_j f_a| \leq g(a)$ für $1 \leq j \leq n$ gilt.

Dann ist die Funktion $F : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_A f(a, x)\, d\mu(a)$ partiell differenzierbar, und es gilt

$$\partial_j F(x) = \int_A \partial_j f_a(x)\, d\mu(a) \quad \text{für alle } x \in U.$$

Anwendungsbeispiel zu Folgerung 7.5

Betrachte $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \mapsto x^2 y + 3z$$

partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3$$

$h_n(x)$

Integralfunktion:

$$F(y, z) = \int_0^1 (x^2 y + 3z)\, dx =$$

$$\left[\frac{1}{3} x^3 y + 3xz \right]_0^1 = \frac{1}{3} y + 3z$$

$x \in \Omega$

partielle Ableitungen der Integralfkt:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,z) = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(y,z) = 3$$

andererseits:

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dx = \int_0^1 3\,dx = \left[3x\right]_0^1 = 3$$

Erinnerung: Definition des Riemann-Integrals

- gegeben: $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt
- Zerlegung von $[a, b]$ = endliche Teilmenge $\mathscr{Z} = \{x_1, ..., x_{n-1}\} \subseteq \ ]a, b[$
- Setze $c_k = \inf\ f([x_{k-1}, x_k])$ und $d_k = \sup\ f([x_{k-1}, x_k])$ für $1 \leq k \leq n$.
- Definition von Unter- und Obersumme

$$\mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) \quad , \quad \mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}) = \sum_{k=1}^{n} d_k(x_k - x_{k-1})$$

Erinnerung: Definition des Riemann-Integrals

- Die Funktion f ist Riemann-integrierbar genau dann, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Zerlegung $\mathscr{Z}$ existiert mit

$$\mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}) - \mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) < \varepsilon.$$

- Für das Riemann-Integral gilt dann

$$\mathscr{S}_f^-(\mathscr{Z}) \ < \ \int_a^b f(x)\,dx \ < \ \mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}).$$

Beziehung zur Lebesgueschen Integrationstheorie

- Sei μ die Einschränkung des Lebesgue-Maßes μ_1 auf $(\mathscr{A}_1)_{[a,b]}$.
- Für jede Zerlegung $\mathscr{Z}$ definiere die Funktionen

$$f_{\mathscr{Z}}^{-}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot 1_{]x_{k-1},x_k[} + \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot 1_{\{x_k\}}$$

und

$$f_{\mathscr{Z}}^{+}(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k \cdot 1_{]x_{k-1},x_k[} + \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot 1_{\{x_k\}}.$$

- Offenbar gilt dann $f_{\mathscr{Z}}^{-} \leq f \leq f_{\mathscr{Z}}^{+}$.
- Beziehung zwischen Integral und Unter- bzw. Obersumme

$$\int f_{\mathscr{Z}}^{-}\, d\mu_1 = \mathscr{S}_f^{-}(\mathscr{Z}) \quad \text{und} \quad \int f_{\mathscr{Z}}^{+}\, d\mu_1 = \mathscr{S}_f^{+}(\mathscr{Z})$$

Satz (7.6)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

(i) Ist f Riemann-integrierbar, dann auch Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \int_a^b f(x) \, dx.$$

(ii) Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge $N = \{x \in [a, b] \mid f \text{ unstetig in } x\}$ eine Lebesguesche Nullmenge ist.

Beweis von Satz 7.6

geg. beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $Z_m = \{a + k\frac{(b-a)}{m} \mid 1 \leq k \leq m-1\}$

(die äquidistante Unterteilung in m Teilintervalle)

Ersetze für jedes $m \in \mathbb{N}$ Z_{m+1} jeweils durch $Z_m \cup Z_{m+1}$. Danach gilt $Z_m \subseteq Z_{m+1}$ $\forall m \in \mathbb{N}$, und für jedes Intervall I bzgl. Z_m gilt jeweils $l(I) \leq \frac{b-a}{m}$. Setze $\varphi_m = f^-_{Z_m}$, $\psi_m = f^+_{Z_m}$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

Dann gilt jeweils $\varphi_m \leq \varphi_{m+1} \leq f \leq \psi_{m+1} \leq \psi_m$.

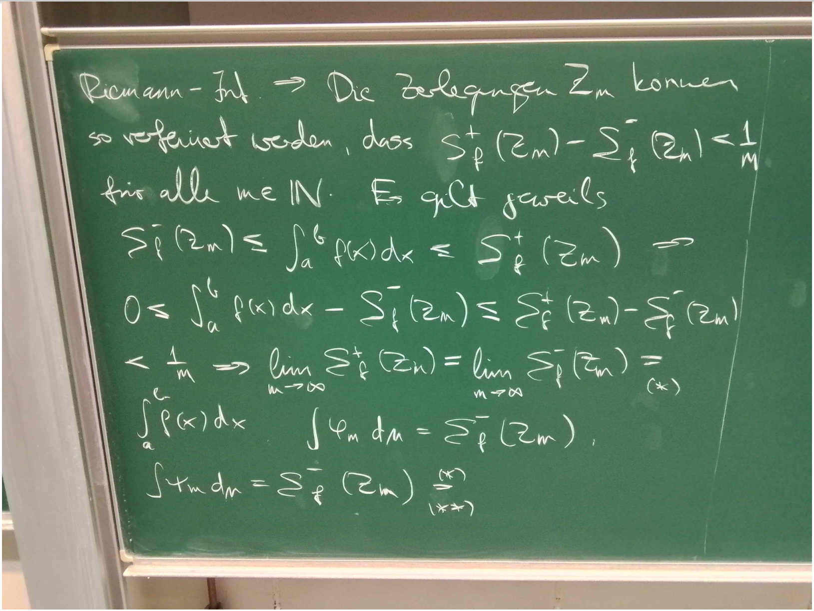
$\Rightarrow$ Für jedes $x \in [a,b]$ ist $(\varphi_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt und mon. wachsend, und $(\psi_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt und mon. fallend

$\Rightarrow$ $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$, (ψ_m) konvergieren punktweise gegen Fkt. φ, ψ auf $[a,b]$, wobei $\varphi_m \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq \psi_m$.

Beide Folgen sind betragsmäßig beschränkt durch die μ-integrierbare Fkt. $|\varphi_1| + |\psi_1|$. Satz 7.1 von B. Levi $\Rightarrow$ φ, ψ sind μ-integrierbar, $\lim\limits_{m\to\infty} \int \varphi_m \, d\mu = \int \varphi \, d\mu$, und $\lim\limits_{m\to\infty} \int \psi_m \, d\mu = \int \psi \, d\mu$ (**)

zu ii) Setze nun voraus, dass f Riemann-int. ist. z.zg.:

f ist auch Lebesgue-int. (= μ-int.), und $\int f \, d\mu = \int_a^b f(x)\,dx$



Riemann-Int ⇒ Die Zerlegungen Z_m können so verfeinert werden, dass $S_f^+(Z_m) - S_f^-(Z_m) < \frac{1}{m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Es gilt jeweils

$$S_f^-(Z_m) \le \int_a^b f(x)\,dx \le S_f^+(Z_m) \Rightarrow$$

$$0 \le \int_a^b f(x)\,dx - S_f^-(Z_m) \le S_f^+(Z_m) - S_f^-(Z_m) < \frac{1}{m} \Rightarrow \lim_{m\to\infty} S_f^+(Z_n) = \lim_{m\to\infty} S_f^-(Z_m) \overset{(*)}{=} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int \varphi_m \,d\mu = S_f^-(Z_m),$$

$$\int \psi_m \,d\mu = S_f^-(Z_m) \underset{(**)}{\overset{(*)}{=}}$$

Korrektur: In der letzten Zeile muss $\mathscr{S}_f^+(\mathscr{Z}_m)$ stehen, und an Stelle des Gleichheitszeichens am Ende ein Implikationspfeil „⇒“.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int \varphi\, d\mu = \int \psi\, d\mu$$

$\varphi \leq f \leq \psi \Rightarrow \psi - \varphi \geq 0$, $\int (\psi - \varphi)\, d\mu$

$= \int \psi\, d\mu - \int \varphi\, d\mu = 0 \overset{§6}{\Rightarrow}$ μ-fast überall

gilt $\psi - \varphi = 0$ bzw. $\varphi = \psi \Rightarrow \varphi = f = \psi$

μ-fast überall. Mit φ und ψ ist somit auch

f μ-integrierbar, und $\int f\, d\mu = \int \varphi\, d\mu = \int_a^b f(x)\,dx$.

all

$= \psi$

auch

$\int f(x)\,dx$.

<u>zu (ii)</u> Sei $N = \{ x \in [a,b] \mid f \text{ unstetig in } x \}$.

Beh.: f ist Riemann-integrierbar $\Longleftrightarrow$ N ist eine μ-Nullmenge

Sei $Z = \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_m$ (ist eine abzählbare Menge)

Aus der Abzählbarkeit folgt $\mu(Z) = 0$

Zeige: Für jeden Punkt $x_0 \in [a,b] \setminus Z$ ist f genau dann stetig in x_0, wenn $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ ist (siehe Skript).

"$\Longrightarrow$" Vor.: f ist Riemann-int. Teil (i) $\to$ $\varphi(x) = \psi(x) = f(x)$ für μ-fast alle $x \in [a,b]$.

$\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow}$ f ist stetig in μ-fast allen Pkt. von $[a,b] \setminus Z$.

Z μ-Null-menge $\Longrightarrow$ f ist stetig in μ-fast allen Punkten von $[a, b]$.

„$\Longleftarrow$" Vor.: N ist μ-Nullmenge $\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow}$ $\varphi(x) = f(x) = \psi(x)$

für μ-fast alle $x \in [a, b] \setminus Z$ $\xrightarrow{Z\ \mu\text{-Nullm.}}$ $\varphi(x) = f(x) = \psi(x)$

für μ-fast alle $x \in [a, b]$ $\Longrightarrow \int \varphi \, d\mu = \int \psi \, d\mu$

Satz 7.2 (majorisierte Konvergenz) $\Rightarrow$

$$\lim_{m\to\infty} \Sigma_f^+(Z_m) - \Sigma_f^-(Z_m) = \lim_{m\to\infty} \int \psi_m \, d\mu - \lim_{m\to\infty} \int \varphi_m \, d\mu$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int (\psi_m - \varphi_m) \, d\mu \underset{\text{Satz 7.2}}{\overset{\varphi_m, \psi_m \to \varphi, \psi}{=}} \int (\psi - \varphi) \, d\mu = 0$$

$n \to \infty$ Satz 7.2

$\Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists$ Zerl. Z von $[a,b]$ mit $S_f^+(Z) - S_f^-(Z) < \varepsilon$

$\Rightarrow$ f ist Riemann-integrierbar. $\square$