Das μ-Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion

Definition (6.10)

Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $E(\Omega, \mathscr{A})$ mit $\sup f_n = f$. Dann ist das μ-Integral von f definiert durch

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \sup \int f_n \, d\mu.$$

μ-Integrierbarkeit reellwertiger Funktionen

Definition (6.13)

Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ wird μ-integrierbar genannt, wenn f eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion und die Integrale $\int f^+ \, d\mu$, $\int f^- \, d\mu$ endlich sind. In diesem Fall nennt man

$$\int f \, d\mu \quad = \quad \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

das μ-Integral von f.

Ist der Maßraum gegeben durch $(\mathbb{R}^d, \mathscr{A}_d, \mu_d)$, dann nennt man die μ_d-integrierbaren Funktionen auch Lebesgue-integrierbar und spricht vom Lebesgue-Integral der Funktion.

Charakterisierung der integrierbaren Funktionen

Satz (6.14)

Für eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Funktion f ist μ-integrierbar.

(ii) Es gibt μ-integrierbare Funktionen $g, h : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ mit $f = g - h$.

(iii) Es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g_1 : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ mit $|f| \le g_1$.

(iv) Die Funktion $|f|$ ist μ-integrierbar.

Ist Bedingung (ii) mit den Funktionen g und h erfüllt, dann gilt $\int f \; d\mu = \int g \; d\mu - \int h \; d\mu$.

Rechenregeln für das μ-Integral

Satz (6.15)

Seien $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ zwei μ-integrierbare Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, αf, $\min\{f, g\}$ und $\max\{f, g\}$, sofern sie auf ganz Ω definiert sind, jeweils μ-integrierbar. Es gilt dann

$$\int (f+g)\ d\mu = \int f\ d\mu + \int g\ d\mu$$

und

$$\int (\alpha f)\ d\mu = \alpha \int f\ d\mu.$$

Die reellwertigen μ-integrierbaren Funktionen bilden also einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, den wir mit $\mathscr{L}^1(\mu)$ bezeichnen.

Integration über messbare Teilmengen

Definition (6.18)

Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion und $A \in \mathscr{A}$. Dann ist das μ-Integral von f über A definiert durch

$$\int_A f \, d\mu = \int f \cdot 1_A \, d\mu.$$

Rechenregel:

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu + \int_{A \cap B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$$

Einschränkung integrierbarer Funktionen

Notation:

Ist $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $B \in \mathscr{A}$, dann setzen wir

$$\mathscr{A}_B = \{A \cap B \mid A \in \mathscr{A}\}$$

und $\mu_B = \mu|_{\mathscr{A}_B}$.

Lemma (6.19)

Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion und $B \in \mathscr{A}$. Dann ist die Einschränkung $f|_B$ eine μ_B-integrierbare Funktion, und es gilt

$$\int (f|_B) \, d\mu_B \quad = \quad \int_B f \, d\mu.$$

Beweis der Rechenregel für Integrale über Teilmengen

geg.: Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $A, B \in \mathcal{A}$

$f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbare Funktion

z.zg.: $\int_{A \cup B} f \, d\mu + \int_{A \cap B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$

überprüfe: $1_{A \cup B} + 1_{A \cap B} = 1_A + 1_B$ $(*)$

Sei $x \in \Omega$. 1. <u>Fall</u>: $x \in A$ und $x \in B$

Dann gilt $1_{A \cup B}(x) + 1_{A \cap B}(x) = 1 + 1 = 1_A(x) + 1_B(x)$

Genauso überprüft man die anderen drei Fälle

$x \in A, x \notin B$ bzw. $x \notin A, x \in B$ bzw. $x \notin A, x \notin B$

Aus (*) folgt nun $\int_{A\cup B} f\, d\mu + \int_{A\cap B} f\, d\mu =$

$\int f\, 1_{A\cup B}\, d\mu + \int f \cdot 1_{A\cap B}\, d\mu = \int (f \cdot 1_{A\cup B} + f \cdot 1_{A\cap B})\, d\mu =$

$\int f \cdot (1_{A\cup B} + 1_{A\cap B})\, d\mu = \int f\, (1_A + 1_B)\, d\mu = \int f \cdot 1_A\, d\mu + \int f \cdot 1_B\, d\mu$

$= \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu.$

Beweis von Lemma 16.19:

geg.: Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $B \in \mathcal{A}$

Setze $\mathcal{A}_B = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}\}$, $\mu_B = \mu|_{\mathcal{A}_B}$.

Dann ist $(B, \mathcal{A}_B, \mu_B)$ wiederum ein Maßraum.

Sei zunächst $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ eine messbare Fkt.

Beh: $f|_B$ ist $\mathcal{A}_B$-messbar, und

$$\int (f|_B)\, d\mu_B = \int_B f \cdot d\mu$$

Zur Messbarkeit: Für jedes $C \in \overline{\mathcal{B}}_1$ gilt

$(f|_B)^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap B$. f messbar $\Rightarrow$

S

be

beid

folg

Fun

$-\int($

$\int f^{+} 1$

$= \int f$

$f^{-1}(C) \in \mathcal{A} \Rightarrow f^{-1}(C) \cap B \in \mathcal{A}_B \rightarrow$

$(f|_B)^{-1}(C) \in \mathcal{A}_{\underline{B}}$

zur Gleichheit der Integrale: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $E(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\sup_n f_n \overset{(*)}{=} f \cdot 1_{\underline{B}}$. Dann gilt nach Def. $\int_B f \, d\mu = \int f \cdot 1_B \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu$

klar: Aus $f_n \in E(\Omega, \mathcal{A})$ folgt jeweils $f_n|_{\underline{B}} \in E(B, \mathcal{A}_B)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt $f|_B = \sup_n (f_n|_B)$ (**)

Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Schreibe $f_n = \sum_{j=1}^{m} u_j 1_{A_j}$ mit $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}_+$, $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$, paarweise disjunkt, $\Omega = A_1 \cup \dots \cup A_m$. $\rightarrow f_n|_B = \sum_{j=1}^{m} u_j 1_{A_j}|_B$

iae

Dann

$f_n\,d\mu$

$f_n|_B$

gilt

mit

weise

$= \sum_{j=1}^{m} u_j 1_{A_j|B}$

$$\Rightarrow \int (f_n|_B)\, d\mu_B = \sum_{j=1}^{m} u_j\, \mu_B(A_j \cap B)$$

andererseits: Wegen (*) gilt $f_n(x) = 0 \ \forall x \notin B$.

$\Rightarrow$ Ist $u_j \neq 0$, dann folgt $A_j \subseteq B$. $\Rightarrow A_j \cap B = A_j$

$$\Rightarrow \int f_n\, d\mu = \sum_{j=1}^{m} u_j\, \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{m} u_j\, \mu(A_j \cap B)$$

insgesamt: $\int (f_n|_B)\, d\mu_B = \int f_n\, d\mu$.

Für die Funktion f erhalten wir nun

$$\int_B f\, d\mu = \int f\, 1_B\, d\mu = \sup_n \int f_n\, d\mu =$$

$$\sup_n \int (f_n|_B)\, d\mu_B \overset{(**)}{=} \int (f|_B)\, d\mu_B$$

…lt $\mathcal{A}_B$.

…are Fkt.

…$\mathcal{B}$, gilt

…essbar $\Rightarrow$

Sei nun $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Fkt.

$\Rightarrow f^+, f^-$ sind $\mathcal{A}$-messbar, und die Integrale sind endlich $\overset{f^+ \cdot 1_B \le f^+,\; f^- \cdot 1_B \le f^-}{\Longrightarrow}$ $\int f^+ 1_B \, d\mu$, $\int f^- 1_B \, d\mu$ sind beide endlich $\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow}$ $\int (f^+|_B)\, d\mu_B$, $\int (f^-|_B)\, d\mu_B$ sind beide endlich. Wegen $(f|_B)^+ = f^+|_B$, $(f|_B)^- = f^-|_B$ folgt daraus insgesamt, dass $f|_B$ eine μ_B-integrierbare Funktion ist. Außerdem gilt

$$\int (f|_B)\, d\mu_B = \int (f|_B)^+ \, d\mu_B - \int (f|_B)^- \, d\mu_B = \int f^+|_B \, d\mu_B - \int f^-|_B \, d\mu_B =$$

$$\int f^+ 1_B \, d\mu - \int f^- 1_B \, d\mu = \int (f \cdot 1_B)^+ \, d\mu - \int (f \cdot 1_B)^- \, d\mu$$

$$= \int f 1_B \, d\mu = \int_B f \cdot d\mu \qquad \square$$

Sprechweise und Notation

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum, $B \in \mathscr{A}$ und $f : B \to \bar{\mathbb{R}}$.

- Man bezeichnet $f : B \to \bar{\mathbb{R}}$ als μ-integrierbar, wenn f auf dem Maßraum $(B, \mathscr{A}_B, \mu_B)$ eine μ_B-integrierbare Funktion ist.
- Man setzt dann $\int_B f \, d\mu = \int f \, d\mu_B$.
- Aus dem Lemma folgt, dass für jede μ-integrierbare Funktion $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ und jedes $B \in \mathscr{A}$ auch die Einschränkung $g|_B$ eine μ-integrierbare Funktion ist und dann $\int_B g \, d\mu = \int_B (g|_B) \, d\mu$ gilt.

Die Nullfortsetzung einer Funktion

Definition (6.20)

Sei $B \in \mathscr{A}$, $f : B \to \bar{\mathbb{R}}$ und $\widehat{f_B} : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$\widehat{f_B}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in B \\ 0 & \text{für } x \notin B. \end{cases}$$

Dann nennen wir $\widehat{f_B}$ die Nullfortsetzung von f auf Ω.

Eigenschaften der Nullfortsetzung

Lemma (6.21)

Sei $B \in \mathscr{A}$ und $f : B \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion.

(i) Ist f nicht-negativ und $\mathscr{A}_B$-messbar, dann ist $\widehat{f_B}$ eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion.

(ii) Ist f μ-integrierbar, dann gilt dasselbe für $\widehat{f_B}$, und es gilt $\int_B f \; d\mu = \int \widehat{f_B} \; d\mu$.

Nullmengen und fast überall existierende Eigenschaften

Definition (6.22)

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir bezeichnen eine Teilmenge $N \subseteq \Omega$ als Nullmenge, wenn $\mu(N) = 0$ gilt.

Sprechweise:

Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ besitzt eine Eigenschaft μ-fast überall, wenn eine Nullmenge $N \subseteq \Omega$ existiert, so dass die Eigenschaft für alle $x \in \Omega \setminus N$ erfüllt ist.

Beispiele für fast überall existierende Eigenschaften

- Wir sagen, zwei Funktionen $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ sind μ-fast überall gleich, falls eine Nullmenge $N \subseteq \Omega$ existiert, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \Omega \setminus N$ gilt.
- Insbesondere sagt man, die Funktion f verschwindet μ-fast überall, wenn f μ-fast überall mit der Nullfunktion übereinstimmt.
- Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ ist μ-fast überall endlich, falls eine Nullmenge $N \subseteq \Omega$ existiert, so dass $|f(x)| < +\infty$ für alle $x \in \Omega \setminus N$ erfüllt ist.

Fast überall verschwindende Funktionen

Satz (6.23)

Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion. Genau dann ist $\int f \; d\mu = 0$, wenn f μ-fast überall verschwindet.

Folgerung (6.24)

Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine $\mathscr{A}$-messbare Funktion und $N \subseteq \Omega$ eine Nullmenge. Dann ist f über N μ-integrierbar, und es gilt $\int_N f \; d\mu = 0$.

Beweis von Satz 6.23

geg: Maßraum (Ω, A, μ), $f: \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{A}$-messbar

<u>Beh</u>: $\int f\,d\mu = 0 \iff f$ ist μ-fast überall gleich null

Sei $N = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\} = \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}$.

„$\Leftarrow$" Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E(A, \Omega)$ geg. durch $f_n = n \cdot 1_N$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \int f_n\,d\mu = n \cdot \mu(N) = n \cdot 0 = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $g = \sup f_n \Rightarrow g$ ist $\mathcal{A}$-messbar und $\int g\,d\mu = \sup_n \int f_n\,d\mu = 0$. Wegen $f \leq g$ folgt $\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$, also $\int f\,d\mu = 0$.

für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $g = \sup f_n \Rightarrow g$ ist $\mathcal{A}$-messbar und $\int g \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu = 0$. Wegen $f \leq g$

„$\Rightarrow$" Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachte $A_n = \{x \in \Omega \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$

f $\mathcal{A}$-messbar $\Rightarrow A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}$. außerdem: $A_n \subseteq A_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) \overset{(*)}{=} \mu(N)$

Aus $f \geq n^{-1} \cdot 1_{A_n}$ folgt jeweils $0 \leq n^{-1} \mu(A_n) = \int n^{-1} 1_{A_n} \, d\mu \leq \int f \, d\mu = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ folgt $\mu(A_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wegen $(*)$ also $\mu(N) = 0$. $\square$

Fast überall gleiche Funktionen

Satz (6.25)

Seien $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathscr{A}$-messbare Funktionen, die μ-fast überall übereinstimmen.

(i) Sind f, g beide nicht-negativ, dann gilt $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

(ii) Ist f eine μ-integrierbare Funktion, dann gilt dasselbe für g, und es ist $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

Folgerung (6.26)

Seien $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ zwei $\mathscr{A}$-messbare Funktionen, und es gelte $|f| \leq g$ μ-fast überall. Ist g eine μ-integrierbare Funktion, dann gilt dasselbe für f.

Endlichkeitseigenschaft integrierbarer Funktionen

Definition

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir sagen, eine Menge $B \in \mathscr{A}$ besitzt ein *σ-endliches Maß*, wenn $\mu_B : \mathscr{A}_B \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein σ-endliches Maß ist.

Satz (6.27)

Sei $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare Funktion. Dann gilt

(i) Die Funktion f nimmt μ-fast überall endliche Werte an.

(ii) Die Menge $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$ besitzt ein σ-endliches Maß.

Beweis von Satz 6.27, nur (i)

geg.: Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$
μ-integrierbar

Beh.: $N = \{ x \in \Omega \mid f(x) \in \{\pm \infty\} \}$ ist
eine μ-Nullmenge

Betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge
$N_n = \{ x \in \Omega \mid |f(x)| \geq n \}$. Dann ist
$(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$. Für jedes
$n \in \mathbb{N}$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gilt $\alpha \cdot 1_N$
$\leq |f| \Rightarrow \alpha \cdot \mu(N) = \int \alpha \cdot 1_N \, d\mu$

$n \in \mathbb{N}$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gilt $\alpha \cdot 1_N$

$$\leq \int |f| \, d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < +\infty$$

Weil dies für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gilt, folgt $\mu(N) = 0$

$\square$

μ-fast überall definierte Funktionen

Sprechweise:

- Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Man sagt, eine $\bar{\mathbb{R}}$-wertige Funktion f ist μ-fast überall auf Ω definiert, wenn f auf einer Menge $M \subseteq \Omega$ definiert ist, deren Komplement in einer Nullmenge enthalten ist.
- Man sagt, die Funktion f ist μ-integrierbar, wenn eine μ-integrierbare Funktion $g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $g|_M = f$ existiert.
- Das μ-Integral einer solchen Funktion f ist dann definiert durch

$$\int f \; d\mu \quad = \quad \int g \; d\mu.$$

Satz von Beppo Levi über die monotone Konvergenz

Satz (7.1)

Sei $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von μ-fast überall monoton wachsenden, μ-integrierbaren Funktionen $f_m : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft, dass die Folge der Integral $\int f_m \, d\mu$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist. Dann existiert eine μ-integrierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ punktweise μ-fast überall gegen f konvergiert, und es gilt $\lim_m \int f_m \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Anmerkungen:

- Der Satz von Beppo Levi gilt auch für monoton fallende Folgen μ-integrierbarer Funktionen.
- Für Riemann-integrierbare Funktionen ist eine entsprechende Aussage falsch.

Anwendungsbeispiel zum Satz von Beppo Levi.

Betrachte die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$.

Ziel: Berechnung von $\int_a^b e^{x^2}\, dx$

Betrachte auf $[a,b]$ die Folge der Funktionen

geg. durch $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!}$. Diese Folge

ist auf $[a,b]$ monoton wachsend und jedes

$= 0$

$\square$

geg. durch $f_n(x) = \sum^{n} \frac{x^{2k}}{}$ Diese Folge

f_n ist Lebesgue-integrierbar, mit

$$\int_{[a,b]} f_n \, d\mu_1 = \int_a^b f_n(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\cdot k!} \right]_a^b$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)\cdot k!} \left(b^{2k+1} - a^{2k+1} \right).$$

Aus dem Satz von Beppo Levi folgt $\int_a^b e^{x^2} dx = \int_{[a,b]} f \, d\mu_1 =$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n \, d\mu_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\, n!} \left(b^{2n+1} - a^{2n+1} \right)$$